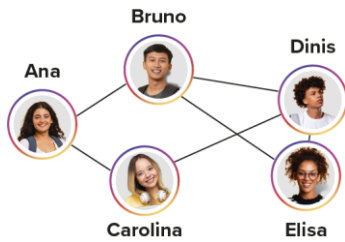
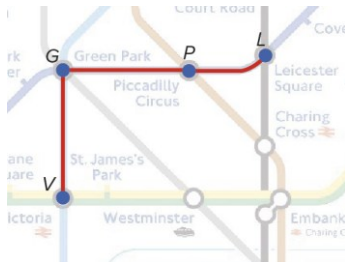


1.1. III e VII

1.2.



2.



1.1. $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

1.2. $A = \{BB, BC, BE, EB, EC, CD, DE, EF, FD, DD, DF\}$

1.3. A, G e H

1.4. BE e EB; DF e FD

1.5. BB e DD

2.1. Por exemplo:

- a) A e B
- b) B e E
- c) BA e AD
- d) AB e CE

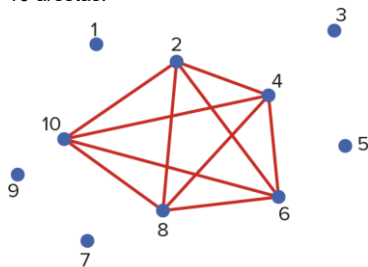
2.2. Duas (CB e AB).

3.1. a) Grau (A) = 4; grau (B) = grau (C) = grau (D) = grau (E) = 3

b) O grafo tem ordem 5.

3.2. Não, pois o vértice A tem grau diferente dos restantes.

4.1. 10 arestas.



4.2.

Vértice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Grau	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4

$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$ e

$2 \times 10 = 20 \rightarrow$ soma dos graus de todos os vértices

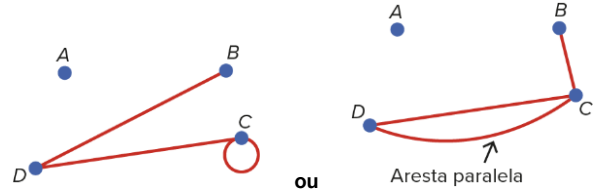


n.º arestas

5.1. A soma dos graus de todos os vértices é ímpar ($1 + 2 + 3 + 3 = 9$). Como 9 não pode ser o dobro de um número inteiro de arestas (o dobro de um número inteiro é sempre um número par), então não é possível construir o grafo.

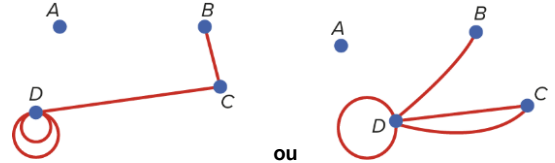
5.2. a) $0 + 1 + 3 + 2 = 6$ (par), logo o grafo existe e tem 3 arestas.

Por exemplo:



b) $0 + 1 + 2 + 5 = 8$ (par), logo o grafo existe e tem 4 arestas.

Por exemplo:



6. Se existem n pessoas, cada uma delas dá $n - 1$ apertos de mão (não se cumprimenta a si própria). No entanto, metade desses apertos de mão são repetições (por exemplo, se A cumprimenta B, já não se contabiliza B a cumprimentar A).

Então, nesta situação, tem-se que:

$$\frac{n \times (n - 1)}{2} = 66, \text{ ou seja } n \times (n - 1) = 132$$

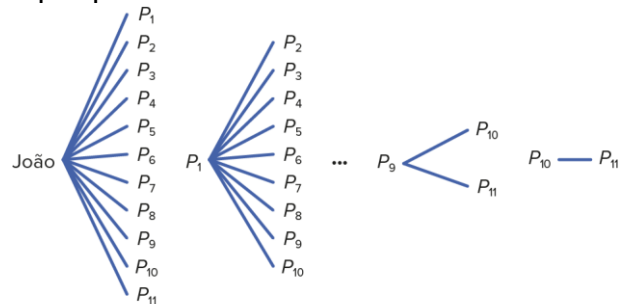
Como n e $n - 1 = 12$ são números inteiros consecutivos, podemos resolver esta equação procurando dois números inteiros consecutivos cujo produto seja 132.

Esses números são 12 e 11 ($12 \times 11 = 132$).

Logo, estão envolvidos nos cumprimentos 12 pessoas (incluindo o João).

Conclusão: O João tem 11 primos.

Repare que:



$11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 66$ apertos de mão

Também podemos resolver a equação (recorrendo à fórmula resolvente):

$$n \times (n - 1) = 132 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 132 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = -11 \vee n = 12$$

Então, $n = 12$.

1. I - c); II - a); III - a); IV - b)

2.1. (C)

2.2. (B)

2.3. I. Falsa; II. Verdadeira; III. Verdadeira; IV. Verdadeira

3. (C) (A soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas.)

1.1. Grafo G: $V = \{A, B, C, D\}$; grafo H: $V = \{A, B, C, D, E, F\}$;

grafo T: $V = \{A, B, C, D, E, F\}$

1.2. Grafo G: $A = \{AB, AD, DA, BB\}$;

grafo H: $A = \{AB, CD, CE, DE, FF\}$;

grafo T: $A = \{AB, BC, AC, DE, DF, EF\}$

1.3. Grafo G: C; grafo H: não tem; grafo T: não tem

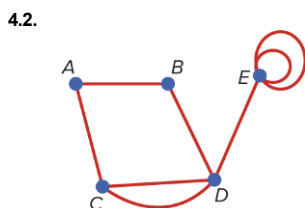
1.4. Grafo G: BB; grafo H: FF; grafo T: não tem

1.5. Grafo G: AD, DA; grafo H: não tem; grafo T: não tem

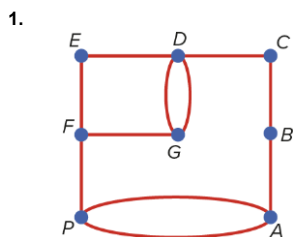
- 1.6. Grafo *G*:
 A: 3; B: 3; C: 0; D: 2
 Grafo *H*:
 A: 1; B: 1; C: 2; D: 2; E: 2; F: 2
 Grafo *T*:
 A: 2; B: 2; C: 2; D: 2; E: 2; F: 2

- 2.1. Por exemplo:
 a) *C e D*
 b) *D e E*
 c) *AD e DC*
 d) *AD e CE*
 e) *AB e BA*
 f) *EC, DC e BC*

- 2.2. Arestas *ED, DE, AE e CB*
 3. $2+2+3+4+6=17$, como é ímpar, então não existe um grafo nestas condições (pois 17 não é o dobro de nenhum número inteiro).
 4.1. $2+2+3+4+5=16$. O grafo tem $16:2=8$ arestas, pois o número de arestas é metade da soma dos graus de todos os vértices.



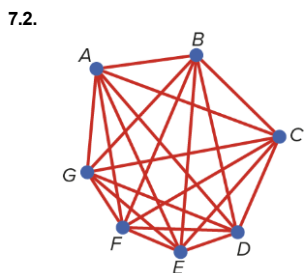
Pág. 22



2. Por exemplo:
P-A-B-C-D-G-F-E-D-G-F-P-A-P ou
P-F-G-D-E-F-G-D-C-B-A-P-A

Pág. 24

- 7.1. Grafo *H*: II; grafo *T*: I e II

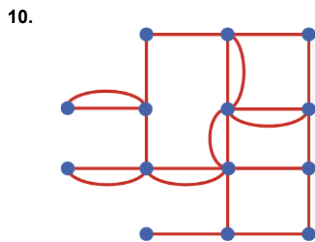


Grau de cada vértice: 6
 Soma de todos os graus dos vértices: $7 \times 6 = 42$
 Número de arestas: $42:2=21$

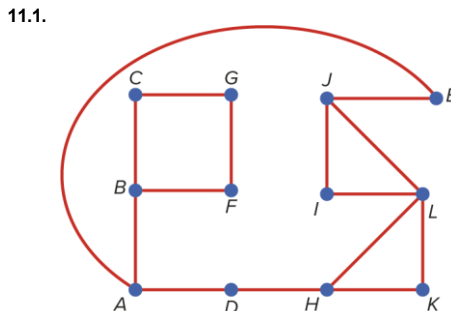
Pág. 27

- 8.1. $Aa_1Fa_7Ea_6D$; $Aa_2Ba_4Ca_5D$
 8.2. $Aa_2Ba_4Ca_5Da_6Ea_7Fa_1A$; $Aa_1Fa_6Ea_6Da_5Ca_4Ba_2A$
 9.1. *A E F E D*
 9.2. *D C B A E D*
 9.3. *C D E F E A B C*

Pág. 28



Pág. 29



- 11.2. Não é completo. Por exemplo, o vértice *E* e *B* não estão ligados por nenhuma aresta.
 11.3. Sim, qualquer vértice está ligado por uma aresta ou por uma sequência de arestas a qualquer um dos outros vértices.
 11.4. Basta retirar a aresta *AB*. Uma parte da casa não tinha acesso à rua.

11.5.

Vértice	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Grau	3	3	2	2	2	2	2	3	2	3	2	4

- 11.6. Soma dos graus de todos os vértices: 30
 Número de arestas: $30:2=15$
 12. *A*: Alice; *P_e*: Pedro; *P*: Paula; *V*: Vasco; *E*: Eduardo;
N: Nuno

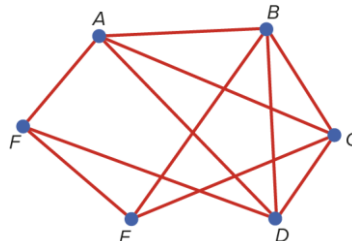
	A	E	N	P	P _e	V
A		✓	✗	✓	✓	✓
E			✗	✓	✗	✗
N				✗	✓	✗
P					✗	✓
P _e						✗
V						

Pág. 30

1. I - b); II - b); III - c); IV - b)
 2. (C)
 3. (D)

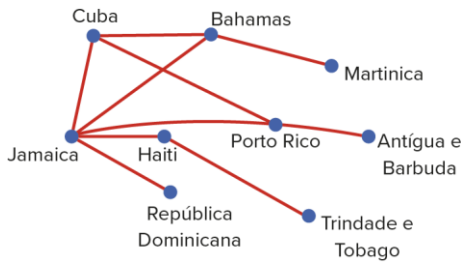
Pág. 31

- 1.1. Os seis vértices representam os seis jovens e as arestas indicam a não existência de interesses em comum entre dois jovens.



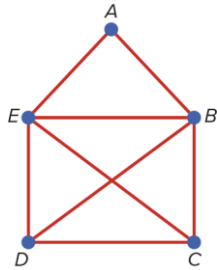
- 1.2. Aline e Eduardo; Bernardo e Fábio
 2.1. Por exemplo:
 a) *A-D-C*
 b) *B-C-D-E-G-F-E-D-A*
 c) *E-D-A-B-C-D-E*

- 2.2. (B) (a aresta DE)
- 2.3. A aresta DE.
- 3.



Pág. 32

1.1.



1.2.

Vértice	A	B	C	D	E
Grau	2	4	3	3	4

1.3.

- a) Não é possível.
- b) $C-E-B-A-E-D-C-B-D$

1.4. O problema tem solução se começarmos num dos vértices com grau ímpar e terminarmos no outro.

2.1. $D-C-A-B-I-G-F-H-E-D$

2.2. (D)

Pág. 35

13. O grafo é euleriano, pois admite um circuito de Euler. Por exemplo, $ABDGEDFEFCBCA$ é um circuito de Euler.

Pág. 36

- 14.1. Não é um grafo de Euler, uma vez que, apesar de conexo, tem vértices com grau ímpar (vértices A e C).
- 14.2. É um grafo de Euler, pois é conexo e todos os vértices têm grau par.
- 14.3. Não é um grafo de Euler, uma vez que, apesar de conexo, tem vértices de grau ímpar (grau (A) = 5 e grau (F) = 1).

Pág. 37

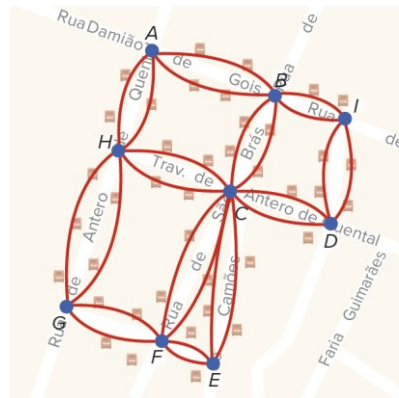
15. Grafo G: Não admite um circuito de Euler pois, apesar de ser conexo, tem dois vértices que têm grau ímpar (F e C). Grafo H: O grafo não é conexo, por isso não é euleriano. Logo, não admite um circuito de Euler.

Pág. 38

- 1. G_1, G_3 e G_6
- 2. I - b) ; II - b) ; III - a)
- 3. I. Falsa; II. Verdadeira; III. Falsa; IV. Verdadeira; V. Falsa

Pág. 39

1.1.

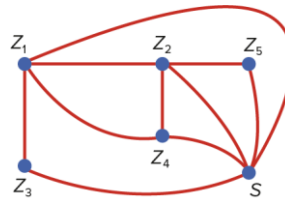


1.2.

Vértice	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Grau	4	6	10	4	4	6	4	6	4

- 1.3. Sim. O António consegue percorrer ambos os lados de cada rua e entregar a correspondência sem ter de repetir nenhuma das ruas, terminando onde começou.
- 2. Todos os vértices do grafo têm grau par, logo é euleriano. Assim, é possível percorrer todos os passeios das ruas uma só vez, começando num local (cruzamente) e terminando nesse mesmo local. Por exemplo:
 $D-H-I-E-A-B-C-D-B-D-E-D-H-G-F-D$

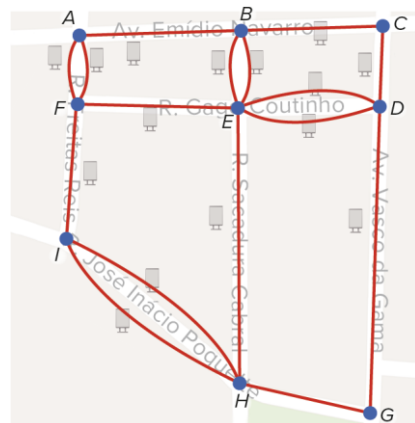
3.1.



- 3.2. O grafo não é euleriano pois, apesar de conexo, tem dois vértices com grau ímpar (Z_4 tem grau 3 e S tem grau 5).
- 3.3. A passagem (aresta) $Z_4 - S$.

Pág. 40

1.



2. (C)

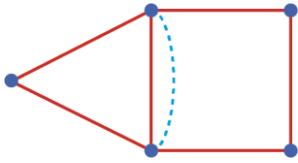
- 3. Não, pois o grafo, apesar de conexo, tem vértices com grau ímpar. Assim, não admite circuitos de Euler.
- 4. $A-B-E-B-C-D-E-D-G-H-I-H-E-F-A-F-I$
- 5. Grafo I: Neste grafo há quatro vértices com grau ímpar (três vértices com grau 3 e três com grau 5). Na situação apresentada, nenhum vértice tem grau 5. Nota: O grafo II é igual (isomorfo) ao grafo da questão 1, pois ambos têm o mesmo conjunto de vértices e de arestas.

Pág. 42

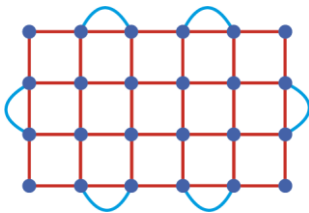
- 16.1. Não é um grafo de Euler, pois os vértices F e E têm grau ímpar.
- 16.2. O grafo tem dois vértices de grau ímpar (os vértices C , D e G têm grau 2, H tem grau 4 e F e E têm grau 3), portanto, o grafo admite um caminho de Euler.
- 16.3. O caminho começa em F (ou em E) ou em E (ou em F). Por exemplo, $F - G - H - C - D - E - F - H - E$.
- 17. Sim, pois o grafo admite um circuito de Euler (é conexo e todos os vértices têm grau par).

Pág. 45

18.

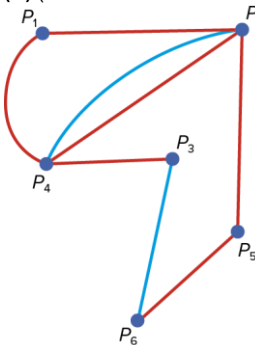


19.



Pág. 46

1. (B) (acrescentar as arestas $P_4 - P_2$ e $P_3 - P_6$)

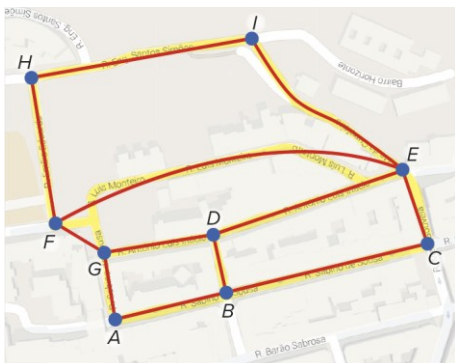


- 2. (C) (nova rota: $A - C$)
- 3. ímpar; B ; a aresta EB ; par

Pág. 47

- 1. Em G_1 , há quatro vértices de grau 3 (A , B , C e D) e, pelo Teorema de Euler, o grafo não pode ser euleriano. Em G_2 , o grafo tem apenas dois vértices (B e I) de grau ímpar. Assim, G_2 não é euleriano mas tem um caminho euleriano: $I - F - A - B - C - D - E - F - G - H - I - J - E - B$

2.1.

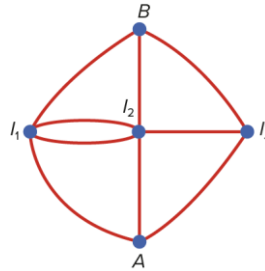


2.2. Uma vez.

2.3.



3.1.

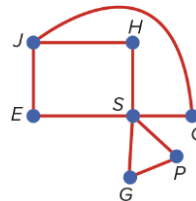


O grafo que representa a situação tem quatro vértices de grau ímpar (B , A , I_2 e I_3). Assim, apesar de conexo, não admite um caminho euleriano.

- 3.2. Para admitir um caminho euleriano, só poderia ter dois vértices com grau ímpar. É necessário acrescentar a aresta $I_2 - I_3$.

Pág. 48

1.



- 2.1. Por exemplo: $H - S - E - J - C - S - P - G - S - H$
- 2.2. Por exemplo: $H - S - P - G - S - E - J - C - S - H$
- 2.3. Por exemplo: $H - J - C - S - P - G - S - E - J - H$

Pág. 50

- 20. G_1 é um grafo de Hamilton (admite um circuito de Hamilton, por exemplo, $D A B C H G F E D$). G_2 não é um grafo de Hamilton, pois qualquer esforço para obter um circuito de Hamilton levaria à repetição de vértices.

Pág. 51

- 21. O grafo G é conexo, simples e tem ordem $n = 5$. Pares de vértices não adjacentes: A e C ; B e D ; B e E
 $\text{Grau}(A) + \text{Grau}(C) = 2 + 3 = 5$ (é igual a 5)
 $\text{Grau}(B) + \text{Grau}(D) = 2 + 3 = 5$ (é igual a 5)
 $\text{Grau}(B) + \text{Grau}(E) = 2 + 3 = 5$ (é igual a 5)
 Satisfaz as condições do Teorema de Ore pois a soma dos graus de cada par de vértices não adjacentes é maior ou igual a 5. Podemos concluir que o grafo tem um circuito de Hamilton (por exemplo: $A - D - E - C - B - A$).

Pág. 52

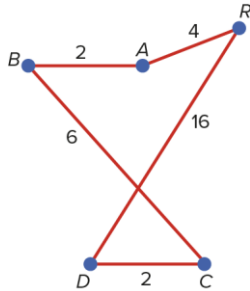
- 22. O grafo é conexo, simples e tem ordem $n = 5$. O Teorema de Dirac exige que o grau de cada vértice seja, no mínimo, $5 : 2 = 2,5$. Como os vértices A , B , D e E têm grau 3 e o C tem grau 4, então o grafo satisfaz as condições do Teorema de Dirac. Assim, podemos concluir que o grafo é hamiltoniano.

Pág. 57

23. Circuito e duração:
 $A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$
 $21 + 23 + 24 + 23 + 22 = 113 \text{ min}$

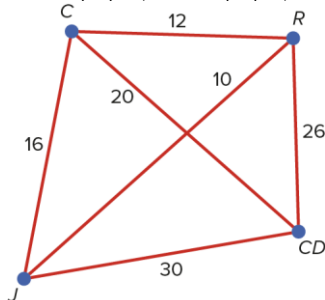
Pág. 60

24. Arestas (pesos): $A - B$ (2) ✓; $D - C$ (2) ✓; $A - R$ (4) ✓;
 $B - C$ (6) ✓; $B - R$ (8) ✗; $B - D$ (10) ✗; $A - C$ (14) ✗; $D - R$ (16) ✓
 $R - A - B - C - D - R$
 $4 + 2 + 6 + 2 + 16 = 30 \text{ minutos}$

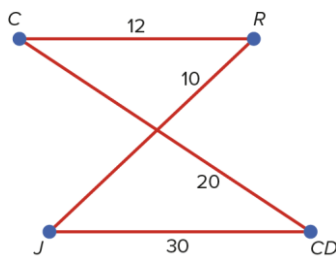


Pág. 61

25. Arestas (pesos): $R - J$ (10) ✓; $C - R$ (12) ✓; $C - J$ (16) ✗;
 $C - CD$ (20) ✓; $R - CD$ (26) ✗; $J - CD$ (30) ✓



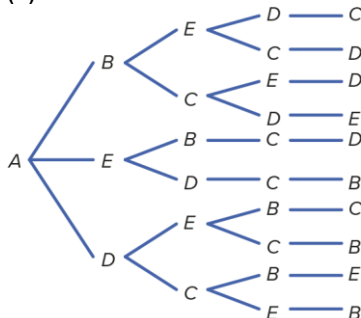
Circuito (a começar no centro de dia):
 $CD - C - R - J - CD$
 $20 + 12 + 10 + 30 = 72 \text{ €}$



Circuito (a começar na creche):
 $C - CD - J - R - C$
 $20 + 30 + 10 + 12 = 72 \text{ €}$

Pág. 62

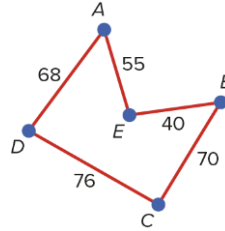
- 1.1. (C)



- 1.2. (D) ($70 + 40 + 74 + 68 = 252$)

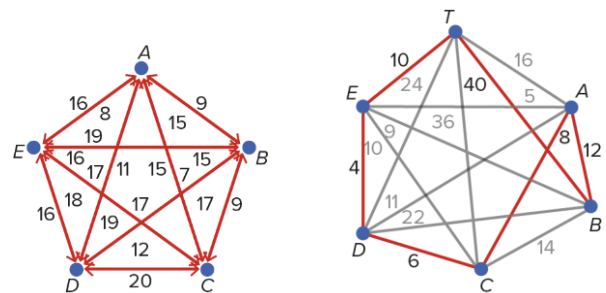
- 1.3. não é; as arestas BD e AC

- 1.4. I - a); II - a); III - c); IV - c)

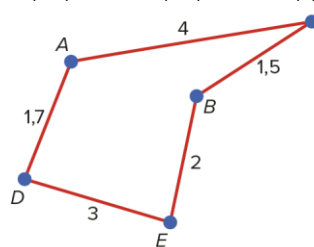


Pág. 63

1. Da leitura da tabela conclui-se que:
 Vértice inicial: A
 Vértice, não selecionado, mais próximo de A: C (11 km)
 Vértice, não selecionado, mais próximo de C: E (15 km)
 Vértice, não selecionado, mais próximo de E: B (16 km)
 Vértice, não selecionado, mais próximo de B: D (19 km)
 Ligação de D ao vértice inicial: A (15 km)
 Circuito muito satisfatório: $A - C - E - B - D - A$
 Distância total: $11 + 15 + 16 + 19 + 15 = 76 \text{ km}$



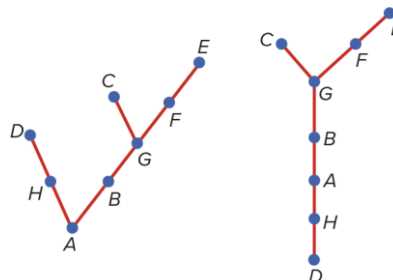
2. Estação de tratamento: T; ES António Carreira: A;
 AE José Mota: B; AE Vila Nova: C; ES Rainha Beatriz: D;
 EB 2,3 de Vila Velha: E
 $T \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow T$
 $10 + 4 + 6 + 8 + 12 + 40 = 80 \text{ km}$
3. Arestas (pesos): $B - C$ (1,5) ✓; $A - D$ (1,7) ✓; $B - E$ (2) ✓; $A - B$ (2,5) ✗; $E - C$ (2,8) ✗; $D - E$ (3) ✓; $A - C$ (4) ✓; $D - C$ (5) ✗



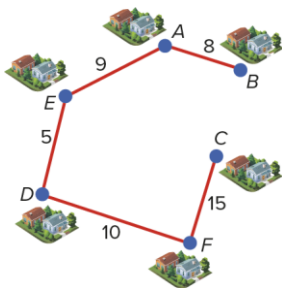
Por exemplo:
 $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$
 $1,7 + 3 + 2 + 1,5 + 4 = 12,2 \text{ km}$

Pág. 64

1. $V = \{B, A, H, C, G, D, F, E\}$
 $A = \{BA, AH, HD, BG, GC, GF, FE\}$
2. O conjunto dos vértices, V, e o conjunto das arestas, A, são iguais nos grafos G e T.
- 3.

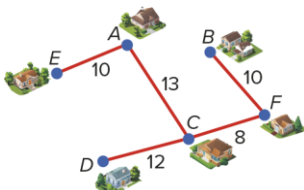


26.



$E - D$; $A - B$; $A - E$; $D - F$; $F - C$
 Peso total: $5 + 8 + 9 + 10 + 15 = 47$ km

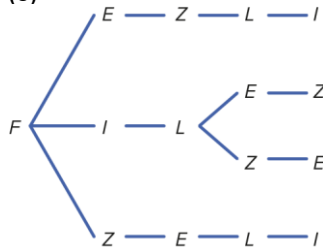
27.



Tempo mínimo: $8 + 10 + 10 + 12 + 13 = 53$ minutos

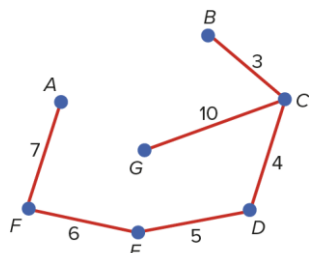
1. Grafo G_1 (pois não é conexo); grafo G_5 e grafo G_6 (pois contêm circuitos).

2.1. (C)



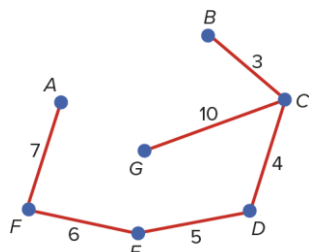
2.2. I - b); II - a); III - a)

1.1.



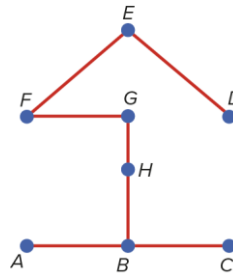
$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 10 = 35$ km

1.2.

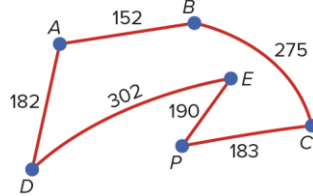


$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 10 = 35$ km

2.



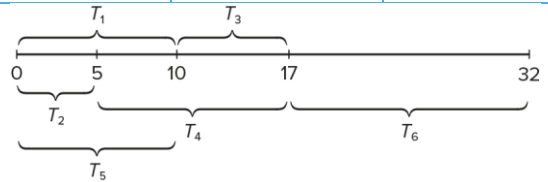
3. Arestas (pesos): $A - B$ (152) ✓; $A - D$ (182) ✓; $P - C$ (183) ✓; $P - E$ (190) ✓; $A - P$ (200) ✗; $B - D$ (200) ✗; $B - C$ (275) ✓; $A - E$ (300) ✗; $D - E$ (302) ✓



Itinerário: $P - C - B - A - D - E - P$
 $183 + 275 + 152 + 182 + 302 + 190 = 1284$ metros

28.

Tarefa	Tempo (minutos)	Dependência
T_1	10	Nenhuma
T_2	5	Nenhuma
T_3	7	T_1 e T_2 (2)
T_4	12	T_2 (1)
T_5	10	Nenhuma
T_6	15	T_5 e T_4 (2)



As tarefas T_1 , T_2 e T_5 podem ser realizadas em simultâneo. Logo, para T_1 , T_2 e T_5 são necessários 10 minutos.

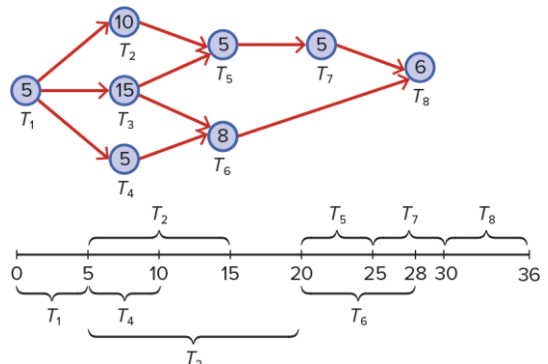
Para realizar T_3 são necessários 7 minutos.

A realização de T_4 termina ao mesmo tempo que a T_3 .

A realização de T_6 é 15 minutos.

Assim, o tempo total necessário é $10 + 7 + 15 = 32$ minutos.

29.



Para realizar T_1 , T_2 , T_3 e T_4 são necessários (5+15) dias, ou seja, 20 dias.

T_5 , T_6 e T_7 demoraram 10 dias. T_8 demorou 6 dias.

Assim, são necessários $20 + 10 + 6 = 36$ dias para realizar o projeto.

1.

Questão	Grafo		
	G_1	G_2	G_3
1.1.	$V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$	$V = \{A, B, C, D\}$	$V = \{A, B, C, D, E\}$
1.2.	$A = \left\{ \begin{matrix} AB, BB, BC, \\ CC, CD, \\ DF, FD \end{matrix} \right\}$	$A = \left\{ \begin{matrix} AB, BA, BC, \\ AC, CD \end{matrix} \right\}$	$A = \left\{ \begin{matrix} AB, BA, \\ BC, CD, \\ DD, DA \end{matrix} \right\}$
1.3.	$E; G$	—	E
1.4.	$BB; CC$	—	DD
1.5.	DF e FD	AB e BA	AB e BA

1.6. Grafo G_1

Vértice	A	B	C	D	E	F	G
Grau	1	4	4	3	0	2	0

Grafo G_2

Vértice	A	B	C	D
Grau	3	3	2	2

Grafo G_3

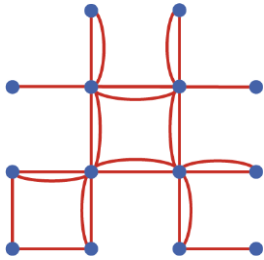
Vértice	A	B	C	D	E
Grau	3	3	2	4	0

2. (B)

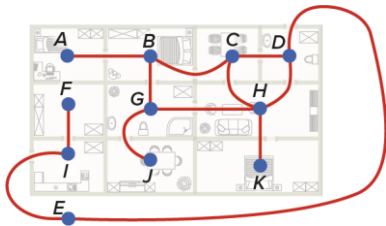
O grafo é regular, pois todos os vértices têm o mesmo grau (grau 3).

3. Grafo G_2 , pois qualquer vértice está ligado por uma aresta ou por uma sequência de arestas a qualquer um dos outros vértices.

4.



5.1.

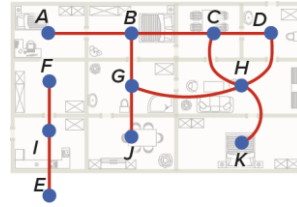
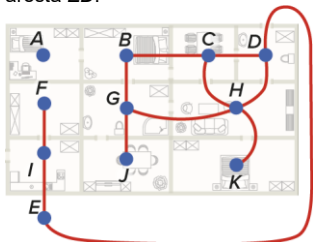


5.2. O grafo não é completo, pois num grafo completo qualquer par de vértices está ligado por uma aresta, o que não é verificado neste caso, por exemplo, os vértices J e K não estão ligados.

5.3. É conexo, pois existe um caminho a unir quaisquer dos seus vértices.

5.4. 12 arestas.

5.5. Do grafo anterior deveria excluir, por exemplo, a aresta AB ou a aresta ED .



5.6. O número de arestas é igual a metade da soma dos graus de todos os vértices.

Soma dos graus: $1+3+3+3+3+4+3+1+1+2+2=24$

Número de arestas: 12

6. Por exemplo:

6.1. $BEFC D$

6.2. $ABCEA$

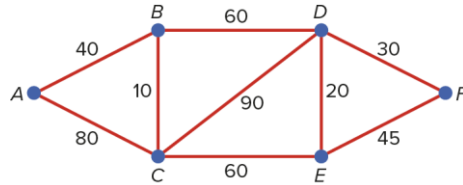
6.3. $EFDCBE$

6.4. ABF

6.5. $AEBFB EFC$

6.6. $D FEABECBFCD$

7.



$A B D F$

$$40 + 60 + 30 = 130 \text{ km}$$

$A C E F$

$$80 + 60 + 45 = 185 \text{ km}$$

$A C D F$

$$80 + 90 + 30 = 200 \text{ km}$$

$A B C D F$

$$40 + 10 + 90 + 30 = 170 \text{ km}$$

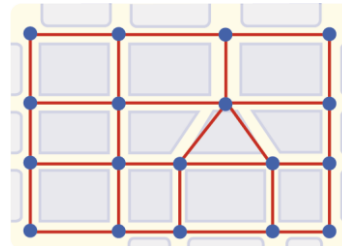
$A C B D F$

$$80 + 10 + 60 + 30 = 180 \text{ km}$$

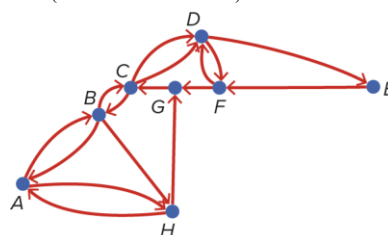
$A B C E F$

$$40 + 10 + 60 + 45 = 155 \text{ km}$$

8.



9.1. $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$



9.2.

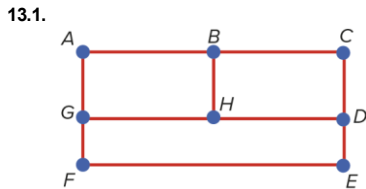
$$A = \left\{ \begin{matrix} (A,B), (B,A), (B,C), (C,B), (C,D), (D,C), (D,F), (F,D), (D,E), \\ (E,F), (F,G), (G,C), (H,G), (B,H), (A,H), (H,A) \end{matrix} \right\}$$

- 9.3. $A \rightarrow (A,B),(B,H),(H,A)$
 $B \rightarrow (B,A),(A,B)$
 $C \rightarrow (C,B),(B,C)$
 $D \rightarrow (D,E),(E,F),(F,D)$
 $E \rightarrow (E,F),(F,D),(D,E)$
 $F \rightarrow (F,D),(D,F)$
 $G \rightarrow (G,C),(C,B),(B,H),(H,G)$
 $H \rightarrow (H,A),(A,H)$

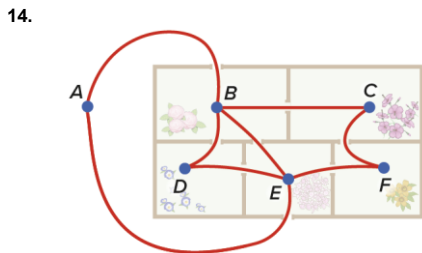
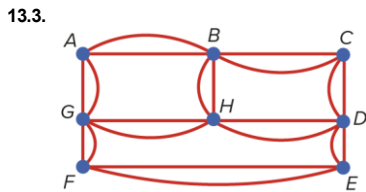
Pág. 77

10. Por exemplo: $A D B C D E B A E C A$
 11.1. (C)
 11.2. Não é possível, pois o grafo não é euleriano. Apesar de conexo, possui dois vértices que têm grau ímpar (F e B), logo não admite circuitos de Euler.
 Nota: Admitiria um caminho de Euler começando em F (ou em B) e terminando em B (ou em F).
 12.1. (B)
 12.2. Não é um subgrafo de G , pois a aresta CA não pertence ao conjunto das arestas do grafo G .
 12.3. O grafo admite caminho euleriano, pois é conexo e possui dois vértices que têm grau ímpar (F e E). Assim, é possível percorrer um caminho nas condições apresentadas.
 12.4. Por exemplo: $F C B A D E A F E$

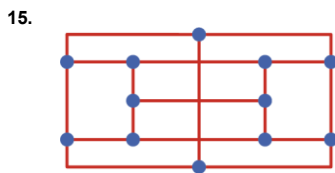
Pág. 78



- 13.2. a) Não é possível, pois o grafo não é euleriano.
 b) Terá de repetir as ruas BH ou HD ou GH . Por exemplo, terá de repetir a rua BH se optar por percorrer:
 $G H B A G F E D C B H D$



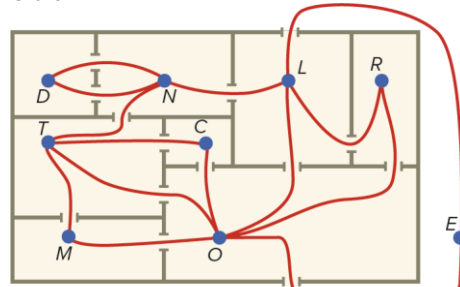
Sim, é possível uma vez que o grafo é euleriano.
 Por exemplo: $A B C F E D B E A$



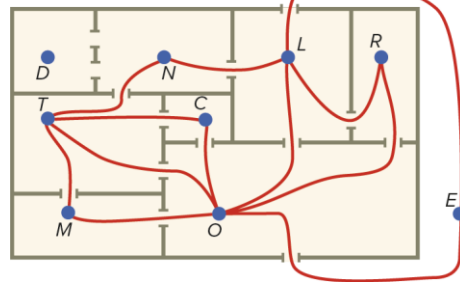
São 12 os vértices de grau ímpar (assinalados na figura). Se existissem apenas dois vértices de grau ímpar, haveria um caminho euleriano e não seria necessário levantar o rolo. Para isso, teria de se acrescentar 5 arestas ao grafo, ou seja, na realidade é necessário levantar o rolo cinco vezes.

Pág. 79

16. Grafo:



Jardineiro: circuito com início em E eliminando D .

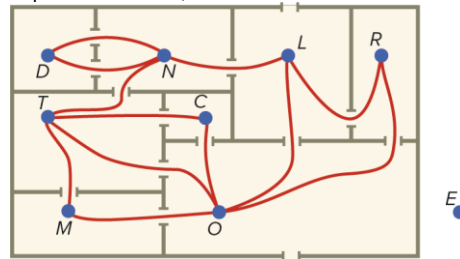


Grafo conexo

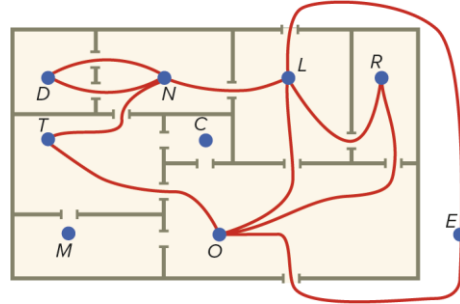
Todos os vértices são de grau par.

Circuito: $E O T M O C T N L O R L E$

Mordomo: mentiu, pois, os vértices L, T, O e E são de grau ímpar. Desta forma, não existe nenhum caminho de Euler.



Cozinheiro: entrou pelas traseiras e saiu pela frente. Visitou todas as salas, exceto a dos Cravos e a das Margaridas.



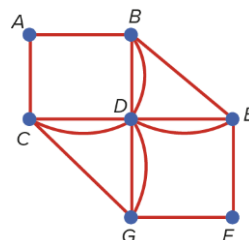
É conexo. Todos os vértices são de grau par.

Circuito possível: $ELROLNDNTOE$

O jardineiro e o cozinheiro disseram a verdade, enquanto o mordomo mentiu.

Pág. 80

17.1.



- 17.2. É conexo e todos os seus vértices têm grau par (A e F têm grau 2; B, C, E e G têm grau 4 e D tem grau 8).

- 17.3. Por exemplo: $F - E - D - E - B - D - B - A - C - D - C - G - D - G - F$
 18. III, IV, V e VI
 19.1. Por exemplo: $F A B D C E G F$ ou $G E C B D F A G$
 19.2. Por exemplo: $A B C G F E H D A$ ou $D A C G F B E H D$

Pág. 81

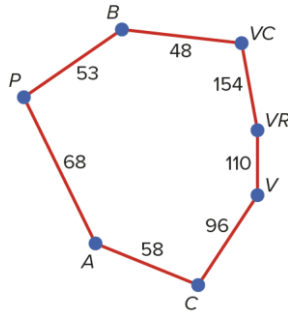
20. Para determinar o circuito pedido foi utilizado o algoritmo da cidade mais próxima. Assim temos: Beja – Setúbal – Lisboa – Castelo Branco – Faro – Beja (1018 km)

21. $A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$
 $42 + 80 + 39 + 70 + 67 = 298$ km

22.1. Método da cidade mais próxima.
 $V - A - C - P - B - VC - VR - V$ (635 km)

22.2. Método do peso das arestas:

- $B - VC \rightarrow 48$
 - $B - P \rightarrow 53$
 - $A - C \rightarrow 58$
 - $A - P \rightarrow 68$
 - $VC - P \rightarrow 71$
 - $V - A \rightarrow 95$
 - $V - C \rightarrow 96$
 - $VR - B \rightarrow 106$
 - $VR - V \rightarrow 110$
- A próxima terá de ser:
 $VR - VC \rightarrow 154$
 Distância total: 587 km
 Assim um possível percurso poderia ser:
 $V - VR - VC - B - P - A - C - V$ (587 km)



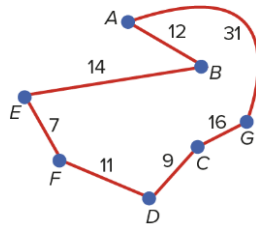
Pág. 82

23.

	A	B	C	D	E	F	G
A		12	15	12	22	21	31
B			27	20	14	23	35
C				9	21	20	16
D					12	11	19
E						7	21
F							14
G							

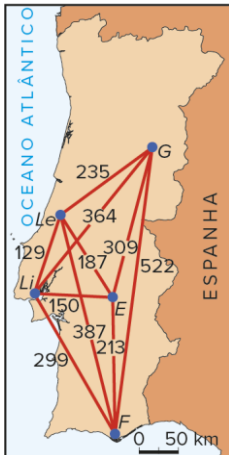
Pelo método do peso das arestas temos:

- $E - F \rightarrow 7$
- $C - D \rightarrow 9$
- $A - B \rightarrow 12$
- $D - F \rightarrow 11$
- $A - D \rightarrow 12$
- $B - E \rightarrow 14$
- $F - G \rightarrow 14$
- $A - C \rightarrow 15$
- $C - G \rightarrow 16$
- $D - G \rightarrow 19$

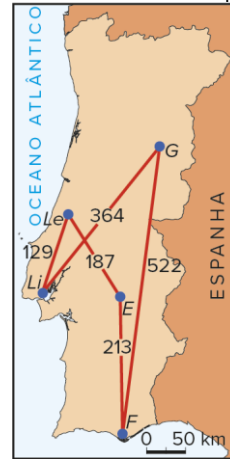


A próxima terá de ser $A - G \rightarrow 31$. Distância total: 100 metros.

24.



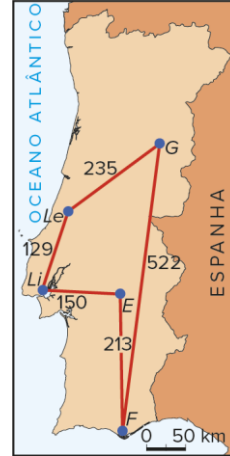
Método da cidade mais próxima:



Li Le E F G Li

$$129 + 187 + 213 + 522 + 364 = 1415 \text{ km}$$

Método do peso das arestas:



Li E F G Le Li

$$150 + 213 + 522 + 235 + 129 = 1249 \text{ km}$$

Pág. 83

25.1. Método da cidade mais próxima:

Pa Br Be Bu Co Os Es He Pa
 $296 + 672 + 1117 + 1344 + 620 + 590 + 237 + 2744 = 7620$

25.2. Não, a escolha mais económica seria a cidade de Bruxelas (Br) com um circuito de Hamilton de 6976 km, isto é:

Br Pa Be Bu Co Os Es He Br
 $296 + 534 + 1117 + 1344 + 620 + 590 + 237 + 2238 = 6976$

26. Aplicando o algoritmo do peso das arestas:

$A B C D E G F$ ($7 + 4 + 8 + 6 + 2 + 3 = 30$ m)

Aplicando o algoritmo da cidade mais próxima:

$A B F G E D C$ ($7 + 4 + 3 + 2 + 6 + 8 = 30$ m)

Pág. 84

27. Depois de a Bárbara sair do bloco A tem duas hipóteses à mesma distância: bloco B ou D. Ao escolher aleatoriamente uma delas, faz com que a distância total percorrida seja diferente.

Percurso optando por B: $A B C E D A$
 Distância: $50 + 50 + 70 + 55 + 50 = 275$ m

Percurso optando por D: $A D E B C A$
 Distância: $50 + 55 + 55 + 50 + 55 = 265$ m

28. Para cada localidade, calcula-se o número de travessias de passagens de nível efetuadas por crianças. Por exemplo, para determinar este número para a localidade G:

F – G (n.º de travessias de passagens de nível efetuadas por crianças que se deslocam de F para G): $3 \times 5 = 15$

D – G: $8 \times (0 + 5) = 40$

E – G: $9 \times (2 + 0 + 5) = 63$

C – G: $2 \times (2 + 0 + 5) = 14$

B – G: $5 \times (1 + 2 + 0 + 5) = 40$

A – G: $3 \times (1 + 1 + 2 + 0 + 5) = 27$

Total (localidade G): 199 travessias

De modo análogo, calcula-se este número para as restantes localidades.

Localidade A:

$5 \times 1 + 2 \times (1 + 1) + 8 \times (2 + 1 + 1) + 9 \times (2 + 2 + 1 + 1) + 3 \times (0 + 2 + 1 + 1) + 2 \times (5 + 0 + 2 + 1 + 1) = 125$

Localidade B:

$3 \times 1 + 2 \times 1 + 8 \times (2 + 1) + 9 \times (2 + 2 + 1) + 3 \times (0 + 2 + 1) + 2 \times (5 + 0 + 2 + 1) = 99$

Localidade C:

$5 \times 1 + 3 \times (1 + 1) + 8 \times 2 + 9 \times (2 + 2) + 3 \times (0 + 2) + 2 \times (5 + 0 + 2) = 83$

Localidade D:

$2 \times 2 + 5 \times (1 + 2) + 3 \times (1 + 1 + 2) + 3 \times 0 + 9 \times 2 + 2 \times (5 + 0) = 59$

Localidade E:

$8 \times 2 + 2 \times (2 + 2) + 5 \times (1 + 2 + 2) + 3 \times (1 + 1 + 2 + 2) + 3 \times (0 + 2) + 2 \times (5 + 0 + 2) = 87$

Localidade F:

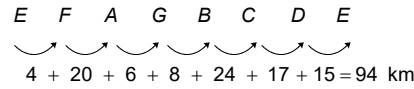
$2 \times 5 + 8 \times 0 + 9 \times (2 + 0) + 2 \times (2 + 0) + 5 \times (1 + 2 + 0) + 3 \times (1 + 1 + 2 + 0) = 59$

Verifica-se que as localidades que levam a um menor número de travessias são a D e a F.

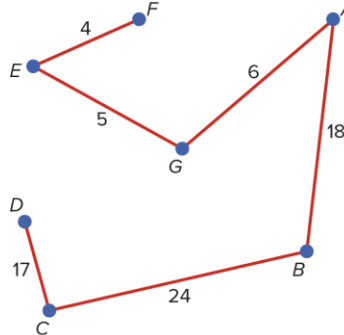
Assim, a escola deve ser construída na localidade D ou F.

Pág. 85

29.1.



29.2. Arestas (pesos): E – F (4) ✓; E – G (5) ✓; G – A (6) ✓; G – B (8) ✗; D – G (13) ✗; E – D (15) ✗; D – C (17) ✓; A – B (18) ✓; A – F (20) ✗; F – G (22) ✗; B – C (24) ✓; B – D (26) ✗;

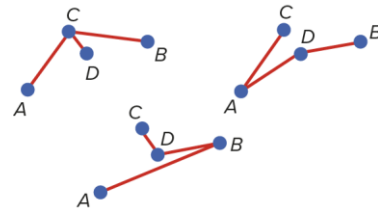
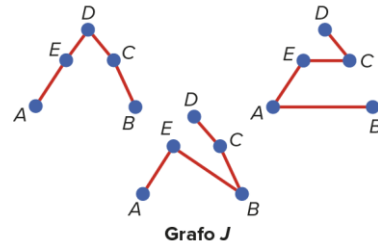
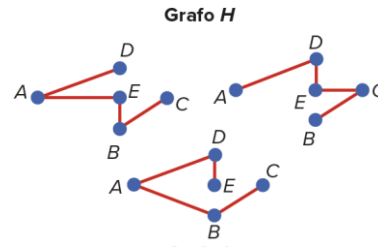
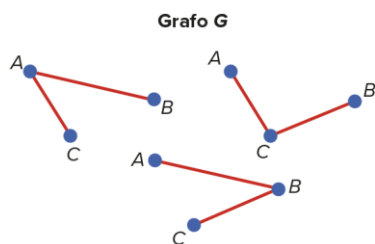


Não é possível encontrar um circuito a começar em E.

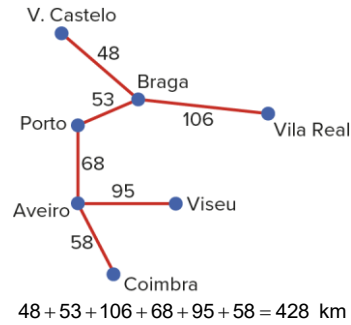
30. G₁, G₃ e G₄ (G₁ não é conexo; G₃ tem arestas paralelas; G₄ tem um laço).

Pág. 86

31.

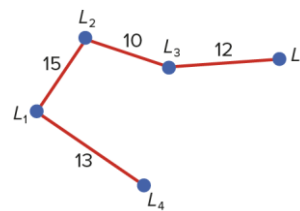


32.1.



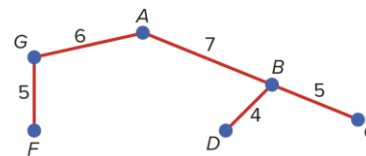
32.2. $428 \times 820 \text{ €} = 350\,960 \text{ €}$

33. Peso total: $13 + 15 + 10 + 12 = 50$ metros

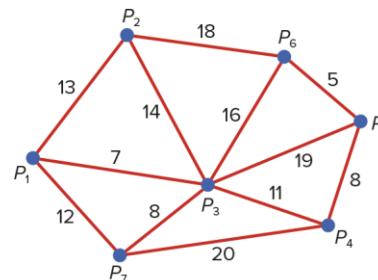


Pág. 87

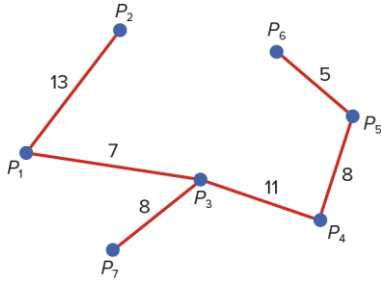
34. Comprimento: $5 + 6 + 7 + 4 + 5 = 27$



35.1.

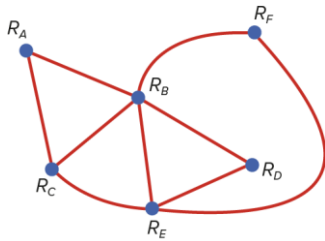


35.2. Pelo algoritmo de Prim: $13 + 7 + 8 + 11 + 8 + 5 = 52$ km



Pág. 88

36.1.

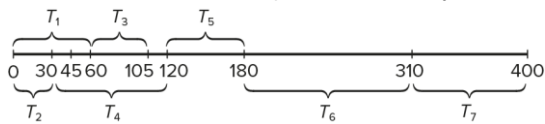


- 36.2. $\rightarrow R_A$ pode realizar-se em simultâneo com R_D e com R_F (50 minutos)
 $\rightarrow R_B$ só pode realizar-se sozinho (50 minutos)
 $\rightarrow R_C$ (50 minutos)
 $\rightarrow R_E$ (50 minutos)
 Total: $50 + 50 + 50 + 50 = 200$ minutos

37.1.

Tarefa	Tempo (minutos)	Dependência
T_1	60	Nenhuma
T_2	30	Nenhuma
T_3	45	T_1, T_2
T_4	90	T_2
T_5	60	T_4
T_6	120	T_4, T_5
T_7	100	T_6

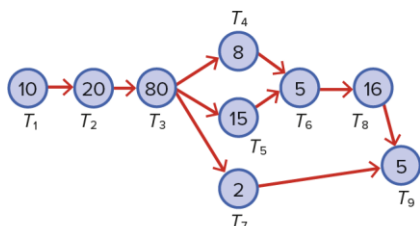
- 37.2. $\rightarrow T_1$ e T_2 podem realizar-se em simultâneo (60 minutos).
 $\rightarrow T_3$ demora 45 minutos e depende de T_1 e T_2 , logo são necessários $60 + 45 = 105$ minutos.
 $\rightarrow T_4$ demora 90 minutos e depende de T_2 , logo são necessários $30 + 90 = 120$ minutos até que esta tarefa esteja concluída.
 $\rightarrow T_5$ demora 60 minutos e depende de T_4 , logo são necessários $120 + 60 = 180$ minutos até que esta tarefa esteja concluída.
 $\rightarrow T_6$ demora 120 minutos e depende de T_4 e T_5 , logo são necessários $180 + 120 = 300$ minutos até que esta tarefa esteja concluída.
 $\rightarrow T_7$ demora 100 minutos e depende de T_6 , logo é necessário $100 + 300 = 400$ minutos até que esta tarefa esteja concluída.



Total: 400 minutos

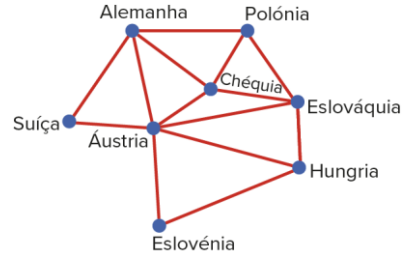
Pág. 89

38.1.



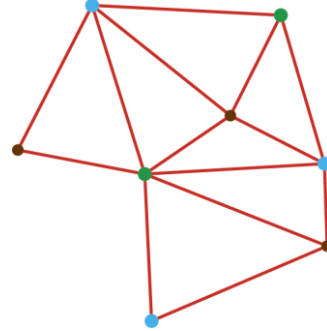
38.2. $10 + 20 + 80 + 15 + 5 + 16 + 5 = 151$ dias

39.1.



39.2. Áustria: grau 6; Alemanha: grau 4; Eslováquia: grau 4; Chéquia: grau 4; Hungria: grau 3; Polónia: grau 3; Eslovénia: grau 2; Suíça: grau 2

- 39.3. Verde – Áustria e Polónia
 Azul – Alemanha, Eslovénia e Eslováquia
 Castanha – Chéquia, Hungria e Suíça
 Resposta: 3 cores



Pág. 90

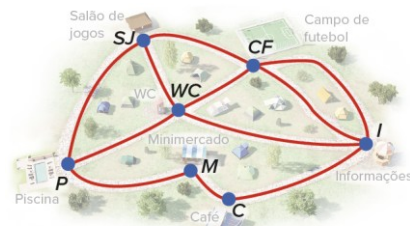
1.1.

- a) $V = \{A, B, C, D, E, F\}$
 b) $A = \{AB, BA, AF, BF, FD, BE, FE, DE, EC, CD\}$
 c) Não tem.
 d) Não tem.
 e) AB e BA
 f) $A: 3; B: 4; C: 2; D: 3; E: 4; F: 4$
 g) Ordem 6
 h) A e F (por exemplo)

1.2.

- a) Por exemplo: $A B F D$
 b) Por exemplo: $B F E C$
 c) Por exemplo: $B A F D E F D C E B A$ (repete a aresta FD)
 d) Por exemplo: $A B E C D F A$

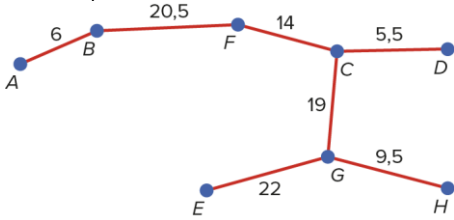
2.



O grafo é conexo, mas tem dois vértices com grau ímpar (piscina e salão de jogos), logo não é euleriano, ou seja, não é possível iniciar um percurso num vértice, percorrer todas as arestas uma única vez e terminar no mesmo vértice.

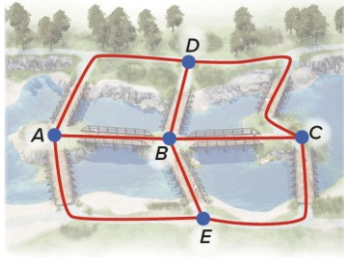
Duplicando a aresta que liga os vértices piscina e salão de jogos (ou seja, percorrer duas vezes o troço entre a piscina e o salão de jogos) permite que o grafo passe a ser euleriano e, assim, já é possível efetuar o percurso pretendido.

3. Por exemplo:



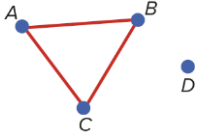
Comprimento da ligação: $6 + 20,5 + 14 + 5,5 + 19 + 9,5 + 22 = 96,5$ m
 Custo: $96,5 \times 5 \text{€} = 482,50 \text{€}$

1.1.

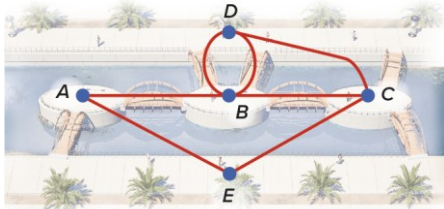


1.2. $D - A - B - E - C - D$

2. Não, pois o grafo pode não ser conexo. Por exemplo, no grafo seguinte o circuito $A - B - C - A$ inclui todas as arestas e não repete nenhuma delas.

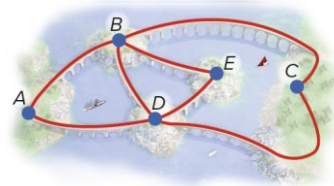


3.1.



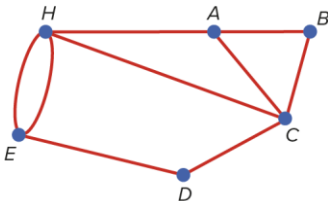
3.2. Não, pois o grafo não admite circuitos de Euler (tem dois vértices de grau ímpar (C e D)).

4.



O grafo é euleriano pois é conexo e tem todos os vértices com grau par. Assim, é possível efetuar o passeio indicado. Por exemplo: $A - D - C - B - E - D - B - A$

5.1.



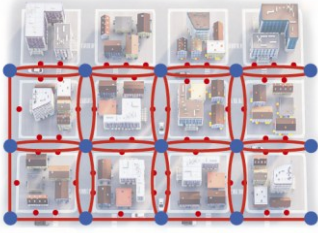
5.2. O grafo, apesar de conexo, não admite circuitos eulerianos, pois há dois vértices que têm grau ímpar (E e A). Assim, não é possível começar num vértice, percorrer todas as arestas uma única vez, e terminar no mesmo vértice.

5.3. Podemos construir a seguinte tabela, onde cada quadrícula representa um dia.

Minutos	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							
32							
33							
34							
35							
36							
37							
38							
39							
40							
41							
42							
43							
44							
45							
46							
47							
48							
49							

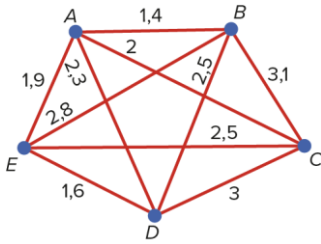
Duração do conjunto de tarefas: 49 minutos
 Durante 5 dias, 2 vezes ao dia, tem-se $2 \times 49 \times 5 = 490$ minutos .

6.



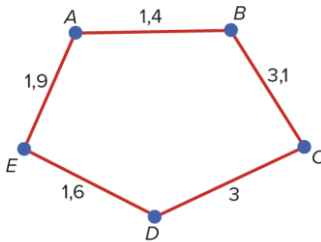
Pág. 94

7.1.



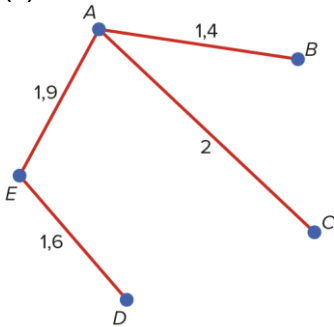
7.2. (C)

7.3. Arestas (pesos): $A - B$ (1,4) ✓; $D - E$ (1,6) ✓; $A - E$ (1,9) ✓; $A - C$ (2) ✗; $A - D$ (2,3) ✗; $B - D$ (2,5) ✗; $C - E$ (2,5) ✗; $B - E$ (2,8) ✗; $C - D$ (3) ✓; $B - C$ (3,1) ✓; Grafo obtido:

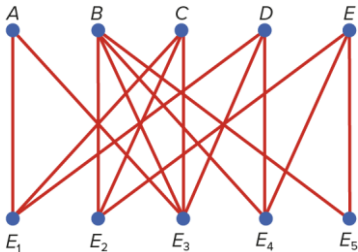


Distância: $1,4 + 3,1 + 3 + 1,6 + 1,9 = 11$ km

7.4. (A)



8.1.

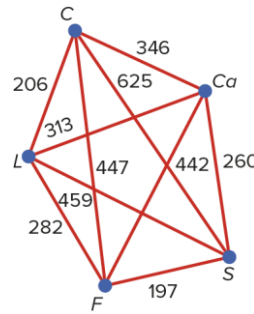


8.2. Quatro dias.

Os únicos exames que podem ser realizados no mesmo dia são o E_1 e o E_5 (o E_1 pelos alunos A, C e D e o E_5 pelos alunos B e E). Como o aluno B tem de realizar mais três exames, então serão necessários mais três dias.

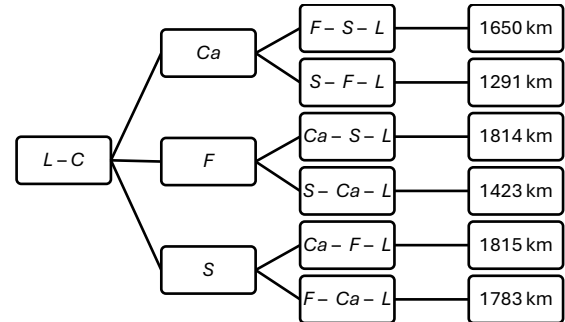
Pág. 95

9.1.



$L \ C \ Ca \ F \ S \ L$
 $\curvearrowright \ \curvearrowright \ \curvearrowright \ \curvearrowright \ \curvearrowright$
 $206 + 346 + 442 + 197 + 459 = 1650$ km

9.2.



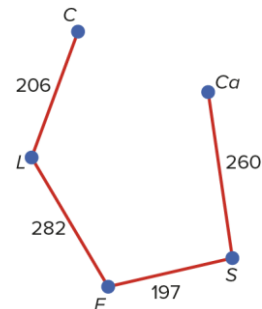
O António, ao ter de começar por visitar o seu cliente em Coimbra, fica com seis possibilidades de percursos, esquematizados acima. Se de Coimbra seguir para Faro e só depois visitar as cidades espanholas, ou seja:

$L \ C \ F \ Ca \ S \ L$
 $\curvearrowright \ \curvearrowright \ \curvearrowright \ \curvearrowright \ \curvearrowright$
 $206 + 447 + 442 + 260 + 459 = 1814$ km

ou
 $L \ C \ F \ S \ Ca \ L$
 $\curvearrowright \ \curvearrowright \ \curvearrowright \ \curvearrowright \ \curvearrowright$
 $206 + 447 + 197 + 260 + 313 = 1423$ km

Não estará a percorrer o circuito de menor distância. O circuito que lhe permite economizar no espaço percorrido é: $L - C - Ca - S - F - L$ (1291 km)

9.3. Algoritmo de Kruskal:



$FS \ CL \ SCa \ LF$
 $\curvearrowright \ \curvearrowright \ \curvearrowright$
 $197 + 206 + 260 + 282 = 945$ km

Uma localização possível da filial e área de residência dos funcionários é a cidade de Faro.