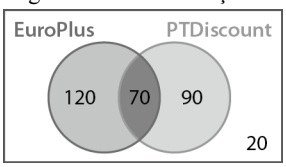
Modelos de probabilidade

Pág. 118

1. O Diogo pode vestir-se de $3 \times 2 \times 5 = 30$ formas diferentes.

2. Organiza-se a informação num diagrama de Venn:



2.1. $P = \frac{120}{300} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

2.2. $P = \frac{20}{300} = \frac{1}{15}$

2.3. $P = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$

3.1. 1.º lançamento: $P = \frac{1}{2}$

2.º lançamento: $P = \frac{1}{2}$

3.º lançamento: $P = \frac{1}{2}$

$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Probabilidade pedida: $\frac{1}{8}$

3.2. $P = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times 3 = \frac{3}{8}$

Probabilidade pedida: $\frac{3}{8}$

Pág. 121

1.1. $S = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (1, 7); (1, 8); (2, 1); \ldots; (8, 7); (8, 8)\}$

1.2. $A = \{(8, 8)\}$. Acontecimento elementar

$B = \{(1, 3); (3, 1); (2, 2)\}$. Acontecimento composto

$C = \{\ \}$. Acontecimento impossível

$D = S$. Acontecimento certo

Pág. 122

2.1. Por exemplo: O produto das pontuações obtidas é 1.

2.2. Por exemplo: Obter duas faces com o mesmo número de pintas.

2.3. Por exemplo: A soma das pontuações obtidas é 13.

2.4. Por exemplo: A soma das pontuações obtidas é no máximo 12.

Pág. 124

3.1. Designe-se por V_1 e V_2 as duas maçãs vermelhas e por A a maçã amarela.

$S = \{(V_1, V_1); (V_1, V_2); (V_1, A); (V_2, V_1); (V_2, V_2); (V_2, A); (A, V_1); (A, V_2); (A, A)\}$

3.2. $S = \{(V_1, V_2); (V_1, A); (V_2, V_1); (V_2, A); (A, V_1); (A, V_2)\}$

Pág. 126

4.1. $S = \{A_1, A_2, A_3, V_1, V_2, R\}$

4.2. **a)** $A = \{V_1, V_2\}$ **b)** $B = \{R\}$

c) $C = \{A_1, A_2, A_3\}$ **d)** $A \cup B = \{V_1, V_2, R\}$

e) $A \cap B = \{\ \}$

Pág. 129

5.1. $P = \frac{1}{50}$ **5.2.** $P = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

5.3. $P = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$ **5.4.** $P = \frac{7}{50}$

Pág. 130

6.1. $P(A) = \frac{1}{13}$

6.2. $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{1}{13} + \frac{3}{13} = \frac{4}{13}$

6.3. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} + \frac{3}{13} = \frac{5}{13}$

6.4. $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

Pág. 132

7.1. $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

7.2. Número de casos possíveis: $6 \times 6 = 36$

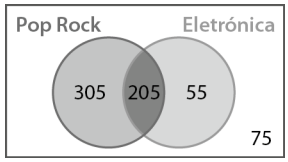
Número de casos favoráveis: 6

$\{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\}$

$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Pág. 133

8. Organiza-se a informação num diagrama de Venn:



8.1. $P = \frac{510}{640} = \frac{51}{64}$

8.2. $P = 1 - \frac{51}{64} = \frac{13}{64}$

8.3. $P = \frac{510}{640} + \frac{260}{640} - \frac{205}{640} = \frac{565}{640} = \frac{113}{128}$

8.4. $P = \frac{205}{640} = \frac{41}{128}$

Pág. 134

9. $2 + 4 = 6$

<u>Hipóteses</u>: 1.º lançamento: 2

2.º lançamento: 4

3.º lançamento + 4.º lançamento:

$1 + 4$ ou $2 + 3$ ou $3 + 2$ ou $4 + 1$

$P(\text{"Soma ser 11"}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$P(\text{"Soma não ser 11"}) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

A probabilidade pedida é $\frac{8}{9}$.

Pág. 135

10. Número de casos possíveis: $7 \times 7 = 49$

Número de casos favoráveis: 7

Hipóteses

$0 + 6$ ou $6 + 0$ ou

$1 + 5$ ou $5 + 1$ ou

$4 + 2$ ou $2 + 4$ ou

$3 + 3$

$P = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$

A probabilidade pedida é $\frac{1}{7}$.

Pág. 136

11.1. $P = 0{,}7 \times 0{,}5 \times 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}0028 = 0{,}28\%$

11.2. $P = 0{,}3 \times 0{,}5 \times 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}0768 = 7{,}68\%$

11.3. P("Defender pelo menos dois penalties") =

= 1 – [P("Defender apenas um penalty") +

+ P("Não defender qualquer penalty")] =

= 1 – (0,3136 + 0,0768) = 0,6096 = 60,96%

Cálculos auxiliares:

P("Defender apenas o 1.º penalty") = $0{,}7 \times 0{,}5 \times 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 =$
$= 0{,}1792$

P("Defender apenas o 2.º penalty") = $0{,}3 \times 0{,}5 \times 0{,}3 \times 0{,}8 \times 0{,}8 =$
$= 0{,}0768$

P("Defender apenas o 3.º penalty") = $0{,}3 \times 0{,}5 \times 0{,}2 \times 0{,}8 \times 0{,}8 =$
$= 0{,}0192$

P("Defender apenas o 4.º penalty") = 0,0192

P("Defender apenas o 5.º penalty") = 0,0192

P("Defender apenas 1 penalty") = $0{,}1792 + 0{,}0768 + 0{,}0192 \times 3 =$
$= 0{,}3136$

P("Não defender qualquer um dos penalties") = 0,0768 (**11.2.**)

Probabilidade pedida: 60,96%.

Pág. 137

12. $P(\text{"Tirar um chocolatinho branco"}) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

$P(\text{"Tirar um chocolatinho leite"}) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

$P(\text{"Tirar um chocolatinho negro"}) = \frac{11}{30}$

Tipo de chocolate	Branco	Leite	Negro
Probabilidade	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{30}$

Pág. 139

13.1. Número de casos possíveis: 6

{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)}

Número de casos favoráveis: 0

$P = \frac{0}{6} = 0$

13.2. $P = \frac{6}{6} = 1$

13.3. Número de casos favoráveis: 1 {(4, 4)}

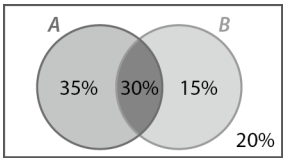
$P = \frac{1}{6}$

Pág. 140

14. A: Viu o anúncio na TV

B: Comprou o *smartphone*

Diagrama de Venn



$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}30}{0{,}35 + 0{,}30} = \frac{0{,}30}{0{,}65} = \frac{6}{13}$

A probabilidade pedida é $\frac{6}{13}$.

15.1. $P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$

15.2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{9}{32}$

Pág. 141

16. $P = 0{,}50 \times 0{,}60 = 0{,}30 = 30\%$

Pág. 143

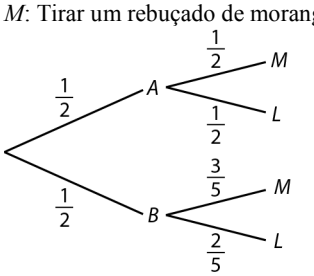
17. Definam-se os seguintes acontecimentos:

A: Tirar da embalagem A;

B: Tirar da embalagem B;

L: Tirar um rebuçado de laranja;

M: Tirar um rebuçado de morango.



$P(A \mid M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}} = \frac{5}{11}$

A probabilidade pedida é $\frac{5}{11}$.

Pág. 146

18. Definam-se os seguintes acontecimentos:

V_A: Tirar bola verde da embalagem A;

V_B: Tirar bola verde da embalagem B;

V_C: Tirar bola verde da embalagem C.

V_A, V_B e V_C são acontecimentos independentes, logo:

$P = P(V_A) \times P(V_B) \times P(V_C) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{9}{14} = \frac{36}{175}$

A probabilidade pedida é $\frac{36}{175}$.

Pág. 149

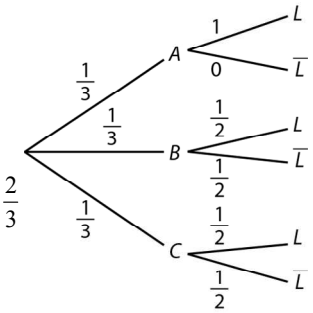
19. Definam-se os seguintes acontecimentos:

A: Escolher a ficha *A*;

B: Escolher a ficha *B*;

C: Escolher a ficha *C*;

L: A face cor de laranja fica voltada para cima.



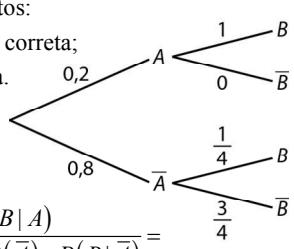
$$P(L)=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

Pág. 150

20. Considerem-se os acontecimentos:

A: A Clara identifica a resposta correta;

B: A Clara dá a resposta correta.



Aplicando a Regra de Bayes:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)\times P(B\mid A)}{P(A)\times P(B\mid A)+P(\overline{A})\times P(B\mid\overline{A})}=$$

$$=\frac{0,2\times 1}{0,2\times 1+0,8\times\frac{1}{4}}=0,5$$

A probabilidade pedida é 50%.

Pág. 151

21.1. $P(R\mid A)=\frac{10}{22}=\frac{5}{11}$

21.2. $P(A\mid R)=\frac{P(A\cap R)}{P(R)}=\frac{P(A)\times P(R\mid A)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}}{\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}+\frac{1}{2}\times\frac{8}{23}}=$

$$=\frac{115}{203}$$

Pág. 155

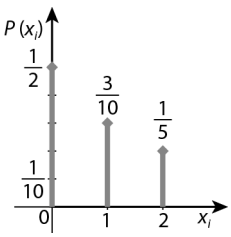
22. $P(\text{"sair bola azul"})=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

$P(\text{"sair bola cor de laranja"})=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

$P(\text{"sair bola vermelha"})=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

Seja X a variável aleatória que representa o valor do prémio (em euros).

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$



Pág. 156

23. Sabe-se que $a=b$ e $c=3b$.

Assim:

$$a+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+b+\frac{1}{12}+c=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+b+\frac{1}{12}+3b=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5b=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\Leftrightarrow 5b=\frac{5}{12}\Leftrightarrow 60b=5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b=\frac{5}{60}\Leftrightarrow b=\frac{1}{12}$$

Logo, $b=\frac{1}{12}$, $a=\frac{1}{12}$ e $c=3\times\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$.

Pág. 160

24.1. *Y* pode tomar os valores 0, 2, 4, 6, 8, 10 ou 12.

y_i	0	2	4	6	8	10	12
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

24.2. $\mu=\frac{1}{7}\times 0+\frac{1}{7}\times 2+\frac{1}{7}\times 4+\frac{1}{7}\times 6+\frac{1}{7}\times 8+\frac{1}{7}\times 10+\frac{1}{7}\times 12=6$

$$\sigma=\sqrt{6^2\times\frac{1}{7}+4^2\times\frac{1}{7}+2^2\times\frac{1}{7}+0^2\times\frac{1}{7}+2^2\times\frac{1}{7}+4^2\times\frac{1}{7}+4^2\times\frac{1}{7}}$$

$$=4$$

Valor médio: 6

Desvio-padrão: 4

Pág. 162

25.1. $P(\text{"sair bola vermelha"})=\frac{2}{9}$

$P(\text{"sair bola verde"})=\frac{4}{9}$

$P(\text{"sair bola azul"})=\frac{3}{9}$

y_i	− 2	0	1
$P(Y=y_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$

25.2. $\mu=\frac{4}{9}\times(-2)+\frac{3}{9}\times 0+\frac{2}{9}\times 1=-\frac{2}{3}$

Como $\mu\neq 0$, o jogo não pode ser considerado equitativo (diz-se que é favorável à casa pois $\mu<0$).

25.3. $\sigma=\sqrt{\left(-2-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2\times\frac{4}{9}+\left(0-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2\times\frac{3}{9}+\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2\times\frac{2}{9}}$

$\approx 1,2$

O desvio-padrão indica o risco que o jogador corre. Quanto maior for o desvio-padrão, maior será o risco.

Pág. 163

26.1. $P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

$P(X=1)=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times 4=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

(Repare que a face nacional pode sair em qualquer uma das 4 moedas.)

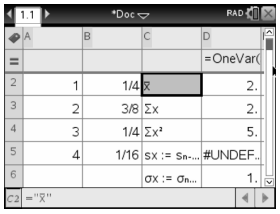
$P(X=2)=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times 6=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

$$P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times 4=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

26.2. Recorrendo à calculadora gráfica:



Então $\mu = 2$ (também podíamos observar que a distribuição é simétrica em relação a $X = 2$).

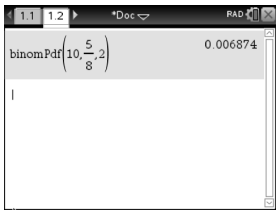
26.3. Recorrendo à calculadora gráfica (ver alínea anterior), $\sigma = 1$.

Pág. 166

27. Seja X a variável aleatória que representa o número de bolas brancas extraídas do saco. Como a probabilidade de sucesso é a de tirar uma bola branca então $p=\frac{5}{8}$ e $X \sim B\left(10,\frac{5}{8}\right)$.

Assim, recorrendo à calculadora gráfica obtemos:

$P(X = 2) \approx 0{,}007$



A probabilidade pedida é, aproximadamente, 0,007.

Pág. 174

28. Seja X a variável aleatória que representa o número de avarias detetadas nas calculadoras gráficas.

Assim, $X \sim N(2{,}5;\ 0{,}5)$.

28.1. Como $4 = 2{,}5 + 3 \times 0{,}5$ e $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$ então:

$$P(X>4)\approx\frac{1-0{,}9973}{2}=0{,}001\,35$$

A probabilidade pedida é, aproximadamente, 0,001 35.

28.2. Como $3{,}5 = 2{,}5 + 2 \times 0{,}5$; $1{,}5 = 2{,}5 - 2 \times 0{,}5$ e $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$ então:

$P(1{,}5 < X < 3{,}5) \approx 0{,}9545$

A probabilidade pedida é, aproximadamente, 0,9545.

Pág. 176

29. Seja X a variável aleatória que representa o *peso* do açúcar embalado.

Sabe-se que $X \sim N(10;\ 1{,}2)$.

Assim, recorrendo à calculadora gráfica:

$P(X \leq 8) = 0{,}5 - P(8 < X < 10) \approx 0{,}5 - 0{,}4522 = 0{,}0478$

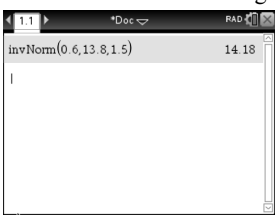
A probabilidade pedida é, aproximadamente, 0,0478.

30. Seja X a variável aleatória que representa os resultados obtidos na disciplina de MACS no 2.º período.

Sabe-se que $X \sim N(13{,}8;\ 1{,}5)$.

Pretende saber-se qual o valor a tal que $P(X < a) = 0{,}60$.

Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $a \approx 14{,}2$.



Assim, a classificação pedida é 14,2 valores.

Pág. 179

31.1. $P(Z > 2{,}75) = 1 - P(Z \leq 2{,}75) = 1 - 0{,}997\,02 = 0{,}002\,98$

31.2. $P(Z \geq -1{,}01) = P(Z \leq 1{,}01) = 0{,}843\,75$

31.3. $P(1{,}2 \leq Z < 2{,}97) = P(Z \leq 2{,}97) - P(Z \leq 1{,}2) =$
$= 0{,}998\,51 - 0{,}884\,93 = 0{,}113\,58$

31.4. $P(-1{,}23 < Z < -0{,}05) = P(0{,}05 < Z < 1{,}23) =$
$= P(Z < 1{,}23) - P(Z < 0{,}05) = 0{,}890\,65 - 0{,}519\,94 =$
$= 0{,}370\,71$

Pág. 181

32. Seja X a variável aleatória que representa a esperança de vida, em anos, das girafas daquela espécie. Sabe-se que $X \sim N(28,\ 3)$. Começa-se por estandardizar a variável X: $Z=\frac{X-28}{3}$ e $Z \sim N(0,1)$. Assim:

$$P(27 \leq X \leq 30)=P\left(\frac{27-28}{3}\leq\frac{X-28}{3}\leq\frac{30-28}{3}\right)=$$

$$=P\left(-\frac{1}{3}\leq Z\leq\frac{2}{3}\right)=P\left(Z\leq\frac{2}{3}\right)-P\left(Z\leq-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=P\left(Z\leq\frac{2}{3}\right)-P\left(Z\geq\frac{1}{3}\right)=P\left(Z\leq\frac{2}{3}\right)-\left[1-P\left(Z\leq\frac{1}{3}\right)\right]=$$

$= P(Z \leq 0{,}67) - (1 - P(Z \leq 0{,}33)) =$
$= 0{,}748\,57 - (1 - 0{,}629\,30) = 0{,}377\,87$

$0{,}377\,87 \times 1000 \approx 378$

Resposta: 378 girafas

Pág. 182

33. Seja X a variável aleatória que representa o vencimento bruto mensal dos 300 funcionários da empresa.

Sabe-se que $X \sim N(650,\ \sigma)$ e que $P(X > 700) = 0{,}084$.

33.1. Seja Z a variável aleatória tal que $Z=\frac{X-650}{\sigma}$ e $Z \sim N(0,\ 1)$. Assim:

$$P(X>700)=0{,}084 \Leftrightarrow P\left(Z>\frac{700-650}{\sigma}\right)=0{,}084\Leftrightarrow$$

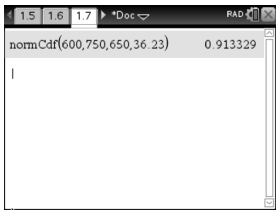
$$\Leftrightarrow P\left(Z>\frac{50}{\sigma}\right)=0{,}084\Leftrightarrow 1-P\left(Z\leq\frac{50}{\sigma}\right)=0{,}084\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z\leq\frac{50}{\sigma}\right)=0{,}916$$

Consultando a tabela da distribuição normal *standard* vem que $P(Z \leq 1{,}38) \approx 0{,}916$.

Assim, $\frac{50}{\sigma}=1{,}38\Leftrightarrow\sigma=\frac{50}{1{,}38}$. Logo $\sigma \approx 36{,}23$.

33.2. Sabendo que $X \sim N(650; 36{,}23)$ e recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $P(600 < X < 750) \approx 0{,}91$.



$0{,}91 \times 300 = 273$

Espera-se que 273 funcionários da empresa tenham um vencimento bruto mensal compreendido entre 600 € e 750 €.

Pág. 186

34.1. O produto dos números saídos ser 1.

34.2. O produto dos números saídos ser não superior a 16.

34.3. O produto dos números saídos ser 20.

35. Considerem-se os acontecimentos:

P: Sair face nacional portuguesa;

E: Sair face nacional espanhola;

F: Sair face nacional francesa.

35.1. N.º de resultados possíveis: 27

$S = \{(P, P, P); (P, P, E); (P, P, F); (P, E, P); (P, F, P); (P, E, F); (P, F, E); (P, E, E); (P, F, F); (E, P, P); (E, P, E); (E, P, F); (E, E, P); (E, E, E); (E, E, F); (E, F, P); (E, F, E); (E, F, F); (F, P, P); (F, P, E); (F, P, F); (F, E, P); (F, E, E); (E, E, F); (F, F, P); (F, F, E); (F, F, F)\}$

35.2. N.º de resultados possíveis: 6

$S = \{(P, E, F); (P, F, E); (E, P, F); (E, F, P); (F, P, E); (F, E, P)\}$

36.1. $A = \{(P, P, P); (E, E, E); (F, F, F)\}$

$B = \{(P, P, P); (P, P, E); (P, P, F); (P, E, P); (P, F, P); (P, E, F); (P, F, E); (P, E, E); (P, F, F); (E, P, P); (E, P, E); (E, P, F); (E, E, P); (E, F, P); (F, P, P); (F, P, E); (F, P, F); (F, E, P); (F, E, E)\}$

$C = \{(P, P, P); (P, P, E); (P, E, P)\ (P, E, E); (E, P, P); (E, P, E); (E, E, P); (E, E, E)\}$

$D = \{(P, E, F); (P, F, E); (E, P, F); (E, F, P); (F, P, E); (F, E, P)\}$

$E = \{(E, E, E); (E, E, F); (E, F, E); (E, F, F); (F, E, E); (F, E, F); (F, F, E); (F, F, F)\}$

$B \cap E = \{\ \}$

$A \cap B = \{(P, P, P)\}$

$B \cup E = S$

36.2. Os acontecimentos *B* e *E* pois $B \cap E = \{\ \}$ e $B \cup E = S$.

37.

		1.ª Moeda	
		N	**E**
2.ª Moeda	**N**	(N, N)	(E, N)
	E	(N, E)	(E, E)

$S = \{(N, N); (E, N); (N, E); (E, E)\}$

Existem 4 casos possíveis e 3 deles são favoráveis: (E, N); (N, E) e (E, E). Logo D´Alembert deveria ter respondido que a probabilidade era 3 em 4 e não 2 em 3.

38.1. $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

38.2. $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

38.3. Como A e C são acontecimentos independentes:

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{13}{52} + \frac{2}{52} = \frac{15}{52}$

38.4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{13}{52} = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}$

Pág. 187

39.1. $3 \times 2 \times 2 = 12$

12 combinações

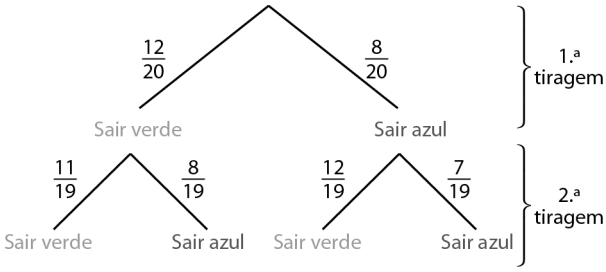
39.2. N.º de casos possíveis: 12

N.º de casos favoráveis: 2 (blusa verde, saia verde e casaco verde ou blusa azul, saia azul e casaco azul)

$P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

40.1. 1.ª bola ser verde: $P = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

2.ª bola ser azul depois da 1.ª bola ter saído verde: $P = \frac{8}{19}$



Probabilidade pedida: $P = \frac{3}{5} \times \frac{8}{19} = \frac{24}{95}$

40.2. N.º de casos possíveis: $20 \times 19 \times 18 = 6840$

N.º de casos favoráveis: $3 \times 672 = 2016$

Repare que se pretendemos obter duas azuis e uma verde pode-se ter:

Azul-Azul-Verde: $8 \times 7 \times 12 = 672$

ou

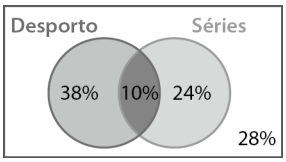
Azul-Verde-Azul: $8 \times 12 \times 7 = 672$

ou

Verde-Azul-Azul: $12 \times 8 \times 7 = 672$

Assim, $P = \frac{2016}{6840} = \frac{28}{95}$.

41. Organiza-se a informação num diagrama de Venn:



41.1. 24% **41.2.** 38% **41.3.** 28%

42. N.º de casos possíveis: $6 \times 6 = 36$

N.º de casos favoráveis: $3 \times 1 = 3$

(repare que na 1.ª jogada temos 3 hipóteses – sair 2, 4 ou 6 – e na 2.ª jogada apenas uma – sair 5.)

$P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

43.1. $P=\frac{3}{5}\times\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

43.2.

	Recipiente		
	A	***B***	**Probabilidade**
Hipótese 1	Branca	Branca	$\frac{3}{5}\times\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$
Hipótese 2	Preta	Preta	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{20}$

$P=\frac{3}{8}+\frac{3}{20}=\frac{21}{40}$

43.3. Temos de calcular a probabilidade contrária de "serem ambas da mesma cor". Assim, pela alínea anterior:

$P=1-\frac{21}{40}=\frac{19}{40}$

44. Definam-se os acontecimentos seguintes:

A: Sair faces diferentes no lançamento dos dois dados;

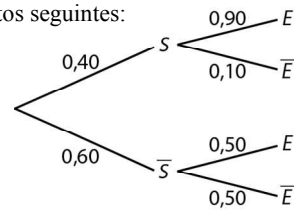
B: A soma das pontuações é 5.

Assim, $P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{36}}{\frac{30}{36}}=\frac{2}{15}$.

45. Definam-se os acontecimentos seguintes:

S: Ter curso superior;

E: Ter emprego.



45.1. $P(E)=0{,}40\times0{,}90+0{,}60\times0{,}50=0{,}66$

A probabilidade pedida é 66%.

45.2. $P(S\mid E)=\frac{P(S\cap E)}{P(E)}=\frac{0{,}40\times0{,}90}{0{,}66}\approx0{,}545$

A probabilidade pedida é, aproximadamente, 54,5%.

Pág. 188

46.

	Homem	Mulher	Total
Ginástica	0,20 × 0,60 = 0,12	0,80 × 0,60 = 0,48	0,60
Natação	0,70 × 0,40 = 0,28	0,30 × 0,40 = 0,12	0,40
Total	0,40	0,60	1

A partir da leitura da tabela é simples responder às questões.

46.1. $P=0{,}40=40\%$ **46.2.** $P=\frac{0{,}28}{0{,}40}=0{,}70=70\%$

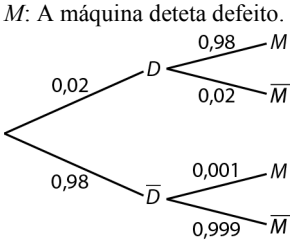
47.1. $P=\frac{392+110}{860}=\frac{251}{430}$ **47.2.** $P=\frac{268}{860}=\frac{67}{215}$

47.3. $P=\frac{110}{268+110}=\frac{55}{189}$

48. Definam-se os acontecimentos seguintes:

D: O automóvel tem defeito;

M: A máquina deteta defeito.



Aplicando a Regra de Bayes:

$P(D\mid M)=\frac{P(D)\times P(M\mid D)}{P(M)}=$

$=\frac{0{,}02\times0{,}98}{0{,}02\times0{,}98+0{,}98\times0{,}001}\approx0{,}95$

A probabilidade pedida é, aproximadamente, 95%.

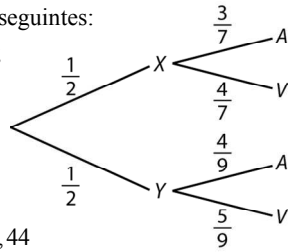
49. Definam-se os acontecimentos seguintes:

X: A bola é extraída da caixa *X*;

Y: A bola é extraída da caixa *Y*;

A: A bola extraída é azul;

V: A bola extraída é vermelha.



49.1. $P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{55}{126}\approx0{,}44$

A probabilidade pedida é, aproximadamente, 44%.

49.2. Aplicando a Regra de Bayes:

$P(X\mid A)=\frac{P(X)\times P(A\mid X)}{P(X)\times P(A\mid X)+P(Y)\times P(A\mid Y)}=$

$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}}=\frac{27}{55}\approx0{,}49$

A probabilidade pedida é, aproximadamente, 0,49.

50. Sabe-se que depois da 1.ª extração $\frac{2}{3}$ das bolas no saco são vermelhas. Como inicialmente havia 7 bolas vermelhas e 1 delas já foi retirada então, depois da 1.ª extração, há 6 bolas vermelhas no saco.

Seja x o número total de bolas no saco depois da 1.ª extração.

Assim:

$\frac{2}{3}x=6\Leftrightarrow2x=6\times3\Leftrightarrow x=\frac{18}{2}\Leftrightarrow x=9$

Como depois da 1.ª extração há 9 bolas no saco, então 6 são vermelhas e 3 são azuis.

Resposta: 3 bolas azuis

Pág. 189

51. X pode tomar os valores 0, 1, 2 ou 3.

$P(X=0)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{6}$

$P(X=1)=\left(\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\right)\times3=\frac{1}{2}$

(Repare que o único bombom de avelã pode ser o 1.º a sair, o 2.º ou o 3.º.)

$P(X=2)=\left(\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}\right)\times3=\frac{3}{10}$

$P(X=3)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{30}$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

52.1. a) $P(Z=17)=1-\frac{1}{15}-\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{13}{30}$

A probabilidade pedida é $\frac{13}{30}$.

b) $P(Z \leq 16) = P(Z = 15) + P(Z = 16) =$

$$= \frac{1}{15} + \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

A probabilidade pedida é $\frac{7}{15}$.

52.2. a) $P(Z \geq 17) = P(Z = 17) + P(Z = 18) = \frac{13}{30} + \frac{1}{10} = \frac{8}{15}$

b) $P(15 \leq Z \leq 17) = P(Z = 15) + P(Z = 16) + P(Z = 17) =$

$$= 1 - P(Z = 18) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

53.1. $\mu = 0{,}25 \times (-2) + 0{,}1 \times (-1) + 0{,}5 \times 0 +$
$+ 0{,}1 \times 1 + 0{,}05 \times 2 = -0{,}4$

53.2. $\sigma^2 = (-2 - (-0{,}4))^2 \times 0{,}25 + (-1 - (-0{,}4))^2 \times 0{,}1 +$
$+ (0 - (-0{,}4))^2 \times 0{,}5 + (1 - (-0{,}4))^2 \times 0{,}1 +$
$+ (2 - (-0{,}4))^2 \times 0{,}05 = 1{,}24$

53.3. $\sigma = \sqrt{1{,}24} \approx 1{,}11$

54.1. X pode tomar os valores -10, -2, 5, 6, 13 ou 20.

Repare nas pontuações possíveis:

		1.ª jogada		
	Soma	**+ 3**	**+ 10**	**− 5**
2.ª jogada	**+ 3**	6	13	− 2
	+ 10	13	20	5
	− 5	− 2	5	− 10

Atendendo a que sabemos que existem 18 casa pretas, 18 casas vermelhas e apenas uma casa com o número 0 podemos determinar as probabilidades que se seguem.

$P(X = -10) = P$("sair preta nas duas jogadas") $=$

$$= \frac{18}{37} \times \frac{18}{37} = \frac{324}{1369}$$

$P(X = -2) =$

$= P$("sair casa vermelha numa jogada e preta na outra")

$$= \frac{18}{37} \times \frac{18}{37} + \frac{18}{37} \times \frac{18}{37} = \frac{648}{1369}$$

$P(X = 5) =$

$= P$("sair o zero numa jogada e casa preta na outra") $=$

$$= \frac{1}{37} \times \frac{18}{37} + \frac{18}{37} \times \frac{1}{37} = \frac{36}{1369}$$

$P(X = 6) = P$("sair casa vermelha nas duas jogadas") $=$

$$= \frac{18}{37} \times \frac{18}{37} = \frac{324}{1369}$$

$P(X = 13) =$

$= P$("sair o zero numa jogada e casa vermelha na outra")

$$= \frac{1}{37} \times \frac{18}{37} + \frac{18}{37} \times \frac{1}{37} = \frac{36}{1369}$$

$P(X = 20) = P$("sair o zero nas duas jogadas") $=$

$$= \frac{1}{37} \times \frac{1}{37} = \frac{1}{1369}$$

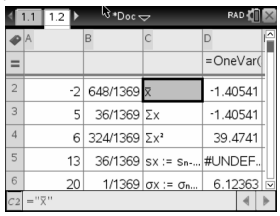
x_i	-10	-2	5	6	13	20
$P(X = x_i)$	$\frac{324}{1369}$	$\frac{648}{1369}$	$\frac{36}{1369}$	$\frac{324}{1369}$	$\frac{36}{1369}$	$\frac{1}{1369}$

54.2. $P(X \geq 5) =$

$= P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 13) + P(X = 20) =$

$$= \frac{36}{1369} + \frac{324}{1369} + \frac{36}{1369} + \frac{1}{1369} \approx 29\%$$

54.3. $\mu \approx -1{,}41$ e $\sigma \approx 6{,}12$



54.4. Como $\mu \neq 0$, o jogo não é equitativo. Pode-se afirmar que o jogo é "favorável à casa" pois $\mu < 0$. Repare que o jogador perderá, em média, 1,41 € por jogada.

Pág. 190

55.1. $P(A) = 0{,}04$ e $P(B) = 0{,}03$

Como A e B são independentes:

$P(A \cap B) = 0{,}04 \times 0{,}03 = 0{,}0012$

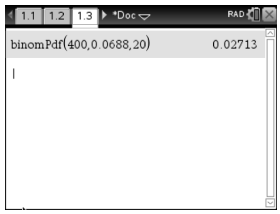
55.2. $P(V) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= 0{,}04 + 0{,}03 - 0{,}0012 = 0{,}0688$

55.3. Seja X a variável aleatória que representa o número de pares de sapatos que vão para venda em saldo.

A probabilidade de sucesso é dada por $p = 0{,}0688$.

$X \sim B(400; 0{,}0688)$



$P(X = 20) \approx 0{,}027$, ou seja, aproximadamente, 2,7%.

56. Seja X a variável aleatória que representa o *peso* das crianças da escola.

Sabe-se que $X \sim N(25{,}5; 3{,}5)$.

56.1. Como $22 = 25{,}5 - 3{,}5$ e $29 = 25{,}5 + 3{,}5$ e

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$ então:

$P(22 < X < 29) \approx 0{,}6827$

A probabilidade pedida é, aproximadamente, 68,27%.

56.2. Como $32{,}5 = 25{,}5 + 2 \times 3{,}5$ e

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$ então:

$$P(X > 32{,}5) \approx \frac{1 - 0{,}9545}{2} = 0{,}02275$$

A probabilidade pedida é, aproximadamente, 2,28%.

56.3. Como $22 = 25{,}5 - 3{,}5$ e $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$ então:

$$P(X \leq 22) \approx \frac{1 - 0{,}6827}{2} = 0{,}158\ 65$$

A probabilidade pedida é, aproximadamente, 15,87%.

57. Seja X a variável aleatória que representa o número de peras por caixa.

Sabe-se que $X \sim N(45, 5)$.

57.1. Recorrendo à calculadora gráfica:

a) $P(X > 50) = 0{,}5 - P(45 < X < 50) \approx 0{,}5 - 0{,}3413 =$
$= 0{,}1587$

b) $P(X \leq 54) = 0{,}5 + P(45 \leq X \leq 54) \approx 0{,}5 + 0{,}4641 =$
$= 0{,}9641$

c) $P(X < 42) = 0{,}5 - P(42 < X < 45) \approx 0{,}5 - 0{,}2257 =$
$= 0{,}2743$

d) $P(46 \leq X \leq 56) \approx 0{,}4068$

57.2. $P(X < 39) = 0{,}5 - P(39 < X < 45) \approx 0{,}5 - 0{,}3849 = 0{,}1151$

$0{,}1151 \times 80 \approx 9$

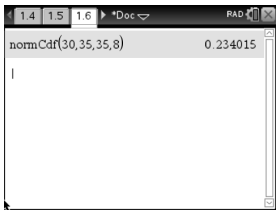
Aproximadamente, 9 caixas.

58. Seja X a variável aleatória que representa o tempo gasto pelo Martinho na sua deslocação diária para o emprego.

Sabe-se que $X \sim N(35, 8)$.

58.1. a) $P(X \leq 30) = 0{,}5 - P(30 \leq X \leq 35) \approx 0{,}5 - 0{,}2340 =$

$= 0{,}266$



Aproximadamente, 0,266.

b) $P(X \geq 45) = 0{,}5 - P(35 \leq X \leq 45) \approx 0{,}5 - 0{,}3944$

$= 0{,}1056$

Aproximadamente, 0,1056.

c) $P(25 < X < 37) \approx 0{,}4931$

Aproximadamente, 0,4931.

58.2. $2 \times 35 = 700$

Espera-se que gaste 700 minutos, ou seja, 11 horas e 40 minutos.

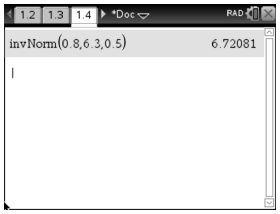
Pág. 191

59. Seja X a variável aleatória que representa o consumo, em litros, dos automóveis daquela marca.

Sabe-se que $X \sim N(6{,}3;\ 0{,}5)$.

Pretende saber-se qual o valor a tal que $P(X < a) = 0{,}80$.

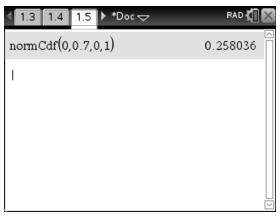
Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $a \approx 6{,}7$.



O valor do consumo é 6,7 litros por cada 100 km.

60.1. $P(Z \leq 0{,}7) = 0{,}5 + P(0 \leq Z \leq 0{,}7) \approx 0{,}5 + 0{,}258\,04 =$

$= 0{,}758\,04$



60.2. $P(Z > -0{,}67) = 0{,}5 + P(-0{,}67 < Z < 0) \approx$

$\approx 0{,}5 + 0{,}248\,57 = 0{,}748\,57$

60.3. $P(0{,}8 \leq Z \leq 1{,}2) \approx 0{,}096\,79$

60.4. $P(-2{,}3 < Z < 0{,}11) \approx 0{,}533\,07$

61.1. $P(10 < X < 20) = P\left(\frac{10-14}{2} < Z < \frac{20-14}{2}\right) =$

$= P(-2 < Z < 3) \approx 0{,}98$

61.2. $P(10 < Y < 20) = P\left(\frac{10-10}{7} < Z < \frac{20-10}{7}\right) =$

$= P\left(0 < Z < \frac{10}{7}\right) \approx 0{,}42$

61.3. $P(10 < W < 20) = P\left(\frac{10-8}{12} < Z < \frac{20-8}{12}\right) =$

$= P\left(\frac{1}{6} < Z < 1\right) \approx 0{,}28$

62. Seja X a variável aleatória que representa a temperatura média diária, em graus Celsius.

Sabe-se que $X \sim N(16, 8)$.

O ano 2018 tem 365 dias (não é bissexto).

62.1. $P(X > 25) = 0{,}5 - P(16 < X < 25) \approx 0{,}5 - 0{,}3697 = 0{,}1303$

$0{,}1303 \times 365 \approx 48$

Em, aproximadamente, 48 dias.

62.2. $P(X < 10) = 0{,}5 - P(10 < X < 16) \approx 0{,}5 - 0{,}2734 = 0{,}2266$

$0{,}2266 \times 365 \approx 83$

Em, aproximadamente, 83 dias.

63. Seja X a variável aleatória que representa a altura, em centímetros, dos habitantes de Beiraliz.

Sabe-se que $X \sim N(\mu, 12)$.

63.1. Sabe-se que $P(X > 175) \approx 0{,}184$.

Seja Z a variável aleatória tal que $Z = \frac{X-\mu}{12}$ e $Z \sim N(0, 1)$.

Assim:

$$P(X > 175) = 0{,}184 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{175-\mu}{12}\right) = 0{,}184 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - P\left(Z < \frac{175-\mu}{12}\right) = 0{,}184 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z < \frac{175-\mu}{12}\right) = 0{,}816$$

Consultando a tabela da distribuição normal *standard* vem que $P(Z < 0{,}9) \approx 0{,}816$.

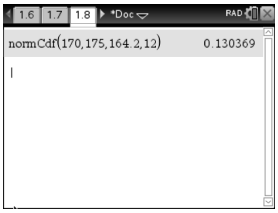
Assim, $\frac{175-\mu}{12} = 0{,}9 \Leftrightarrow \mu = 175 - 0{,}9 \times 12 \Leftrightarrow \mu = 164{,}2$.

Os habitantes de Beiraliz têm em média 164,2 cm de altura.

63.2. Sabendo que $X \sim N(164{,}2;\ 12)$ e recorrendo à calculadora gráfica obtém-se:

$P(X < 170) = 0{,}5 + P(164{,}2 < X < 170) \approx 0{,}5 + 0{,}1856 =$

$= 0{,}6856$



$0{,}6856 \times 60 \approx 41$

Aproximadamente, 41 habitantes.

Pág. 192

1. Definam-se os acontecimentos seguintes.

C: Ser competente.

T: Passar no teste.

1.1. $P(C|T)=\dfrac{P(C\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0,70\times 0,90}{0,70\times 0,90+0,30\times 0,20}\approx 0,91$

Aproximadamente, 91%.

1.2. $P(C|\overline{T})=\dfrac{P(C\cap \overline{T})}{P(\overline{T})}=\dfrac{0,70\times 0,10}{0,70\times 0,10+0,30\times 0,80}\approx 0,23$

Aproximadamente, 23%.

2.1. A variável aleatória X pode tomar os valores 1, 2, 3, 4 ou 5.

$P(X=1)=\dfrac{1}{5}$

$P(X=2)=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{5}$

(Não acerta na 1.ª tentativa mas acerta à segunda.)

$P(X=3)=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}$

(Não acerta na 1.ª tentativa, não acerta na 2.ª tentativa mas acerta à 3.ª tentativa.)

$P(X=4)=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5}$

(Não acerta na 1.ª tentativa, não acerta na 2.ª tentativa, não acerta na 3.ª tentativa mas acerta na 4.ª tentativa.)

$P(X=5)=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{5}$

(Apenas acerta na última tentativa.)

A distribuição de probabilidade pedida é:

x_i	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

2.2. O valor médio é 3 (repare que a distribuição é simétrica relativamente ao valor 3).

Confirma-se usando a definição:

$\mu=1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{1}{5}+3\times\dfrac{1}{5}+4\times\dfrac{1}{5}+5\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{15}{5}=3$

Dizer que o valor médio é 3 é o mesmo que dizer que o valor esperado de tentativas que se têm de fazer até abrir o cofre é 3, ou seja, repetindo muitas vezes a experiência o valor médio do número de tentativas necessárias para abrir o cofre seria 3.

3.1. X pode tomar os valores 1, 2 ou 3.

$P(X=1)=\dfrac{4}{10}=0,4$

$P(X=2)=\dfrac{5}{10}=0,5$

$P(X=3)=\dfrac{1}{10}=0,1$

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,4	0,5	0,1

3.2. <u>Hipóteses</u>

- Sair duas bolas 1: $P=\dfrac{4}{10}\times\dfrac{3}{9}=\dfrac{12}{90}=\dfrac{2}{15}$
- Sair duas bolas 2: $P=\dfrac{5}{10}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{20}{90}=\dfrac{2}{9}$
- Sair duas bolas 3: $P=0$

$P=\dfrac{2}{15}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{16}{45}$

3.3. $P(B\,|\,A)$ representa a probabilidade de tirar uma bola com o número 1 na 2.ª extração sabendo que na 1.ª extração saiu também uma bola com o número 1. Ora, como se sabe previamente que na 1.ª extração saiu uma bola com o número 1, então essa bola foi colocada no saco juntamente com mais 10 bolas com o número 1. Assim, ao realizar a 2.ª extração existem no saco $4+10=14$ bolas com o número 1 (num total de 20 bolas).

Assim, $P(B\,|\,A)=\dfrac{14}{20}=\dfrac{7}{10}$.

Pág. 193

4. Como A e B são acontecimentos independentes então:

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}=P(A)\times\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow P(A)=\dfrac{3}{4}$

Assim, $P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{12}$.

5.1. **a)** $P(X<12)=5\%+7\%=12\%$

b) $P(12\leq X\leq 15)=11\%+17\%+19\%=47\%$

c) $P(X\geq 16)=100\%-P(X<16)=$

$=100\%-(5\%+7\%+11\%+17\%+19\%+15\%)=$

$=26\%$

5.2. $X\sim N(14,2)$

a₁) $P(X>15,5)=0,5-P(14<X<15,5)\approx$

$\approx 0,5-0,2734=0,2266$

Aproximadamente, 23%.

a₂) 12 min e 33 s = 12,55 min (pois $\dfrac{33}{60}=0,55$)

15 min e 20 s = 15,33 min (pois $\dfrac{20}{60}\approx 0,33$)

$P(12,55<X<15,33)\approx 0,51$

Aproximadamente, 51%.

b) $P(X>16)=0,5-P(14<X<16)\approx 0,5-0,3413=$

$=0,1587$

$0,1587\times 120\approx 19$

Aproximadamente, 19 faltas.

6. Seja X a variável aleatória que representa a procura semanal, em litros, de óleo para o motor.

Sabe-se que $X\sim N(110,15)$.

6.1. $P(X>120)=0,5-P(110<X<120)\approx 0,5-0,2475=$

$=0,2525$

Aproximadamente, 25%.

6.2. $4\times 110=440$ litros

6.3. Pretende saber-se qual o valor a tal que $P(X>a)=0,02$.

Assim:

$P(X>a)=0,02\Leftrightarrow 1-P(X<a)=0,02\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(X<a)=0,98$

Recorrendo à calculadora gráfica (InvNorm) obtém-se $a\approx 141$.

Deve ter em *stock* cerca de 141 litros de óleo.

Exercícios tipo exame

Pág. 194

1.

Soma	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

1.1. Seja X a variável aleatória que representa a soma referida no enunciado.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

1.2. Analisando a tabela da soma verifica-se que existem 12 somas pares e 12 somas ímpares.

P("O Diogo ganhar") = P("Sair soma par") =

$= P(X = 3) + P(X = 5) + P(X = 7) + P(X = 9) =$

$= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

P("A Clara ganhar") = P("Sair soma ímpar") =

$= P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 8) + P(X = 10) =$

$= \frac{1}{24} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{1}{2}$

O Diogo não tem razão pois as probabilidades são iguais.

2. Sejam X e Y as variáveis aleatórias que representam o número de defeitos nos artigos produzidos pelas máquinas A e B, respetivamente.

2.1. **Máquina *A***

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,250	0,125	0,375	0,250

Máquina *B*

y_i	0	1	2	3
$P(Y = y_i)$	0,125	0,125	0,250	0,500

2.2. $\mu_X = 0{,}25 \times 0 + 0{,}125 \times 1 + 0{,}375 \times 2 + 0{,}250 \times 3 =$

$= 1{,}625$

$\mu_Y = 0{,}125 \times 0 + 0{,}125 \times 1 + 0{,}250 \times 2 + 0{,}500 \times 3 =$

$= 2{,}125$

A máquina B produz, em média, mais defeitos do que a máquina A.

2.3. $P = \frac{500}{750} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$ (3 c. d.)

Pág. 195

2.4. $P = \frac{1000}{2000} = \frac{1}{2} = 0{,}50$

2.5. Ao ter-se a informação a priori de que o artigo tinha 3 defeitos, aumentou a probabilidade de ele ter sido produzido pela máquina B, já que esta máquina produz mais vezes do que a máquina A, artigos com 3 defeitos.

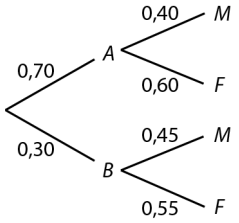
3.1. Definam-se os acontecimentos que se seguem.

A: Fazer exame de MACS.

B: Fazer exame de Matemática B.

M: Ser do sexo masculino.

F: Ser do sexo feminino.



3.2. $P(F) = 0{,}70 \times 0{,}60 + 0{,}30 \times 0{,}55 = 0{,}585 = 58{,}5\%$

A probabilidade pedida é 58,5%.

3.3. $P(B \mid F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}30 \times 0{,}55}{0{,}585} \approx 0{,}28$

Aproximadamente, 0,28.

4.1. Definam-se os acontecimentos que se seguem.

M: Ser rapaz.

F: Ser rapariga.

Modalidade 1:

$P(F) = \frac{33}{68} \approx 0{,}485$

Modalidade 2:

$P(F) = \frac{1}{3} \times \frac{13}{27} + \frac{1}{3} \times \frac{10}{26} + \frac{1}{3} \times \frac{10}{15} = \frac{538}{1053} \approx 0{,}511$

Sim, é mais provável optando pela modalidade 2.

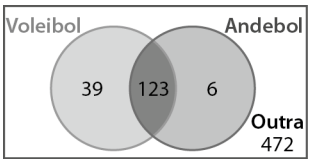
Pág. 196

4.2. **a)** $P(\text{"Ser da turma } C\text{"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

b) $P(\text{"Ser da turma } C\text{"} \mid F) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{10}{15}}{\frac{538}{1053}} \approx 0{,}43$

Aproximadamente, 43%.

5.1.



123 alunos escolheram Voleibol e Andebol, tendo os restantes 640 − 13 = 517 alunos colocado apenas um **X**.

5.2. Número de casos possíveis: 640

Número de casos favoráveis: 38 + 123 + 6 = 168

$P = \frac{168}{640} = \frac{21}{80}$

A probabilidade pedida é $\frac{21}{80}$.

5.3. Definam-se os acontecimentos que se seguem.

A: Preferir Andebol.

V: Preferir Voleibol.

O: Preferir outra modalidade.

Uma vez que existem $640 - 472 = 168$ respostas correspondentes a $\overline{O}$, tem-se:

$$P\left(A \mid \overline{O}\right) = \frac{123+6}{168} = \frac{129}{168} = \frac{43}{56} \approx 76,79\%$$

Aproximadamente, 76,79%.

Pág. 197

6. Seja X a variável aleatória que representa o nível de concentração diária do poluente (em p.p.m.).

Sabe-se que $X \sim N(8, 2)$ e que

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$.

Assim:

$$P\left(X > 10\right) = \frac{1 - P\left(6 < X < 10\right)}{2} \approx \frac{1 - 0,6827}{2} = 0,158\ 65$$

A probabilidade pedida é, aproximadamente, 16%.

7.1. Constrói-se uma tabela de dupla entrada:

×	**− 1**	**− 1**	**0**	**1**	**1**	**1**
− 1	1	1	0	− 1	− 1	− 1
− 1	1	1	0	− 1	− 1	− 1
0	0	0	0	0	0	0
1	− 1	− 1	0	1	1	1
1	− 1	− 1	0	1	1	1
1	− 1	− 1	0	1	1	1

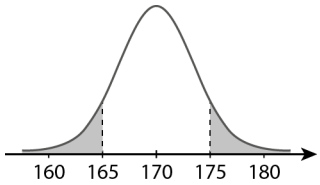
Há 36 casos possíveis no lançamento dos dois dados e a distribuição de probabilidades é:

y_i	− 1	0	1
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{13}{36}$

7.2. **Afirmação I:**

Como os números 160 e 180 estão distribuídos simetricamente em relação à média 170 (ver o gráfico seguinte, onde as áreas a cinzento são iguais), segue-se da simetria da distribuição normal que as duas probabilidades referidas são iguais.

A afirmação I é falsa.



Afirmação II:

A probabilidade referida é $P(160 \leq X \leq 170) + P(X > 180)$.

Como $P(X > 180) = P(X < 160)$ (pela simetria da distribuição normal), então:

$P(160 \leq X \leq 170) + P(X > 180) =$

$= P(160 \leq X \leq 170) + P(X < 160) = P(X \leq 170) =$

$= 0,5$

A afirmação II é falsa.

Afirmação III:

Como uma distribuição normal fica bem caracterizada pelo seu valor médio e pelo desvio-padrão, basta ver que se X segue uma distribuição normal com valor médio 170 e desvio-padrão 7, então é imediato que:

$$P(X > 184) = 0,022\ 75$$

Repare que $184 = 170 + 2 \times 7$ e

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$.

Logo, $P\left(X > 184\right) = \frac{1 - 0,9545}{2} = 0,022\ 75 = 2,275\%$.

A afirmação III é verdadeira.

Está assim justificada a correção da classificação feita pelo Diogo.