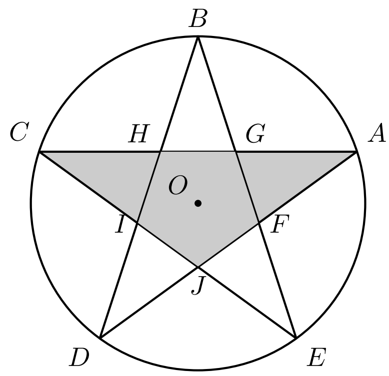
Ângulos e arcos na circunferência (9.º ano)

Propostas de resolução

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios

1. Temos que:
   - Como os arcos AB, BC, CD, DE e EA são iguais, cada um deles tem $\frac{360}{5} = 72°$ de amplitude;
   - como o ângulo ECA é o ângulo inscrito relativo ao arco EA, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja, $E\hat{C}A = \frac{\overset{\frown}{EA}}{2} = \frac{72}{2} = 36°$
   - e como o ângulo CAD é o ângulo inscrito relativo ao arco CD, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja, $C\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{72}{2} = 36°$

   Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, vem que:

$$A\hat{J}C + E\hat{C}A + C\hat{A}D = 180 \Leftrightarrow A\hat{J}C + 36 + 36 = 180 \Leftrightarrow A\hat{J}C = 180 - 36 - 36 \Leftrightarrow A\hat{J}C = 108°$$

Prova de Matemática, 9.º ano – 2021

2. Temos que:
   - Como $[CA]$ é um diâmetro da circunferência, então $\overset{\frown}{CA} = 180°$
   - como o ângulo ABD é o ângulo ao centro relativo ao arco AD, temos que $\overset{\frown}{AD} = 130°$
   - $\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{CA} \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD} + 130 = 180 \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD} = 180 - 130 \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD} = 50°$

   Desta forma, como o ângulo DEC é o ângulo inscrito relativo ao arco CD, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$D\hat{E}C = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{50}{2} = 25°$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2019, Época especial

3. Como o ângulo ACB é o ângulo inscrito relativo ao arco AB, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do arco, ou seja:

$$\overset{\frown}{AB} = 2 \times A\hat{C}B = 2 \times 30 = 60°$$

Assim, considerando que o arco AB tem 5 centímetros de comprimento e estabelecendo a relação de proporcionalidade direta entre os comprimentos dos arcos e as respetivas amplitudes, calculamos o perímetro do círculo ($P_\circ$), em centímetros, correspondente a um arco com 360° de amplitude:

$$\frac{P_\circ}{360} = \frac{5}{\overset{\frown}{AB}} \Leftrightarrow \frac{P_\circ}{360} = \frac{5}{60} \Leftrightarrow P_\circ = \frac{5 \times 360}{60} \Leftrightarrow P_\circ = 5 \times \frac{36}{6} \Leftrightarrow P_\circ = 5 \times 6 \Leftrightarrow P_\circ = 30 \text{ cm}$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2019, 2.ª chamada

4. Como $[ABCD]$ é um papagaio e $\overline{AB} = \overline{BC}$, então $\overline{CD} = \overline{AD}$ e também $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AD}$. Assim, calculando a amplitude do arco CDA, temos:

$$\overset{\frown}{CDA} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AD} = 110 + 100 = 220°$$

E desta forma a amplitude do arco AC é:

$$\overset{\frown}{AC} = 360 - \overset{\frown}{CDA} = 360 - 220 = 140°$$

Desta forma, como o ângulo ADC é o ângulo inscrito relativo ao arco AC, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$A\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{140}{2} = 70°$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2019, 1.ª chamada

5. Como o ângulo CBA é o ângulo inscrito relativo ao arco CA, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do arco, ou seja:

$$\overset{\frown}{CA} = 2 \times C\hat{B}A = 2 \times 85 = 170°$$

Temos ainda que:

$$\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{AB} = 360 \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} + 170 + 110 = 360 \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} = 360 - 170 - 110 \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} = 80°$$

Desta forma, como o ângulo BAC é o ângulo inscrito relativo ao arco BC, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{80}{2} = 40°$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2018, Época especial

6. Temos que:
   - Como $[CD]$ é um diâmetro da circunferência, então $\overset{\frown}{CD} = 180°$
   - $\overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow 110 + \overset{\frown}{AD} = 180 \Leftrightarrow \overset{\frown}{AD} = 180 - 110 \Leftrightarrow \overset{\frown}{AD} = 70°$

   Como o ângulo ACD é o ângulo inscrito relativo ao arco AD, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

   $$A\hat{C}B = A\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{70}{2} = 35°$$

   Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, e $A\hat{C}B = A\hat{C}D$ vem que:

   $$A\hat{B}C + A\hat{C}B + B\hat{A}C = 180 \Leftrightarrow A\hat{B}C + 35 + 25 = 180 \Leftrightarrow A\hat{B}C = 180 - 35 - 25 \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow A\hat{B}C = 180 - 60 \Leftrightarrow A\hat{B}C = 120°$$

   Prova Final 3.º Ciclo – 2018, 2.ª chamada

7. Como o ângulo ABD é o ângulo inscrito relativo ao arco AD, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

   $$A\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{56}{2} = 28°$$

   Como os ângulos OEB e BEC são Ângulos suplementares e $B\hat{E}C = 72°$, temos que:

   $$O\hat{E}B + B\hat{E}C = 180 \Leftrightarrow O\hat{E}B + 72 = 180 \Leftrightarrow O\hat{E}B = 180 - 72 \Leftrightarrow O\hat{E}B = 108°$$

   Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, e $A\hat{B}D = O\hat{B}E$ vem que:

   $$O\hat{B}E + O\hat{E}B + B\hat{O}E = 180 \Leftrightarrow 28 + 108 + B\hat{O}E = 180 \Leftrightarrow B\hat{O}E = 180 - 108 - 28 \Leftrightarrow B\hat{O}E = 44°$$

   Prova Final 3.º Ciclo – 2018, 1.ª chamada

8. Como o trapézio é isósceles, então $\overline{BC} = \overline{AD}$, pelo que também $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD}$, e como $[CD]$ é um diâmetro, vem que:

   $$\overset{\frown}{CD} = 180 \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD} = 180 \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} + 80 + \overset{\frown}{BC} = 180 \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow 2 \times \overset{\frown}{BC} = 180 - 80 \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} = \frac{100}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} = 50°$$

   E assim, vem que:

   $$\overset{\frown}{BCD} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} = 50 + 180 = 230°$$

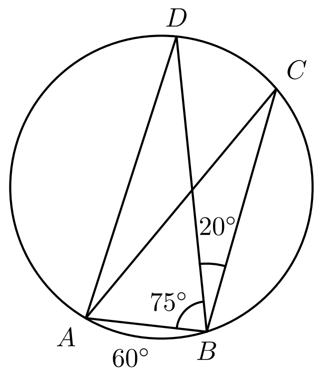
   Como o ângulo DAB é o ângulo inscrito relativo ao arco BCD, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

   $$D\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2} = \frac{230}{2} = 115°$$

   Prova Final 3.º Ciclo – 2017, Época especial

9. Como o ângulo BDA é o ângulo inscrito relativo ao arco AB, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$B\hat{D}A = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$



Como, num triângulo a lados iguais se opõem ângulos com a mesma amplitude e $\overline{AD} = \overline{BD}$ então $D\hat{B}A = B\hat{A}D$, e como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, vem que:

$$D\hat{B}A + B\hat{A}D + B\hat{D}A = 180 \Leftrightarrow D\hat{B}A + D\hat{B}A + 30 = 180 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,D\hat{B}A = 180 - 30 \Leftrightarrow D\hat{B}A = \frac{150}{2} \Leftrightarrow D\hat{B}A = 75^\circ$$

Desta forma, como $C\hat{B}D = 20^\circ$, vem que:

$$A\hat{B}C = D\hat{B}A + C\hat{B}D = 75 + 20 = 95^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2017, 2.ª chamada

10. Como o ângulo ACB é o ângulo inscrito relativo ao arco AB, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{120}{2} = 60^\circ$$

Assim, podemos determinar a amplitude do ângulo ABC (porque a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°:

$$B\hat{A}C + A\hat{C}B + A\hat{B}C = 180 \Leftrightarrow 40 + 60 + A\hat{B}C = 180 - 40 - 60 \Leftrightarrow A\hat{B}C = 180 - 100 \Leftrightarrow A\hat{B}C = 80^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2017, 1.ª chamada

11. Como o ângulo BDA é reto (porque está inscrito numa semicircunferência), então temos que:

$$B\hat{D}A = E\hat{D}A = 90^\circ$$

Assim, podemos determinar a amplitude do ângulo DAC (porque a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°:

$$D\hat{A}C + A\hat{E}D + E\hat{D}A = 180 \Leftrightarrow D\hat{A}C + 70 + 90 = 180 \Leftrightarrow D\hat{A}C = 180 - 90 - 70 \Leftrightarrow D\hat{A}C = 20^\circ$$

Assim, como o ângulo DAC é o ângulo inscrito relativo ao arco DC, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo. ou seja:

$$\overset{\frown}{DC} = 2 \times D\hat{A}C \Leftrightarrow \overset{\frown}{DC} = 2 \times 20 \Leftrightarrow \overset{\frown}{DC} = 40^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2016, Época especial

12. Como $[PC]$ é um diâmetro da circunferência a amplitude do arco respetivo é $180°$

Assim podemos determinar a amplitude do arco CD como a diferença de amplitudes dos arcos PC e PD:

$$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{PC} - \overset{\frown}{PD} = 180 - 110 = 70°$$

Como o ângulo CPD é o ângulo inscrito relativo ao arco CD, a amplitude do ângulo é igual a metade da amplitude do arco:

$$A\hat{P}B = C\hat{P}D = \frac{70}{2} = 35°$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2016, 2.ª fase

13. Como a reta MN é tangente à circunferência no ponto P, o raio $[OP]$ é perpendicular à reta MN

Desta forma, o triângulo $[OPM]$ é retângulo em P, ou seja $O\hat{P}M = 90°$, e assim, como $O\hat{M}N = O\hat{M}P = 15°$, temos que:

$$M\hat{O}P + O\hat{M}P + O\hat{P}M = 180 \Leftrightarrow M\hat{O}P + 15 + 90 = 180 - 90 - 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M\hat{O}P = 180 - 90 - 15 \Leftrightarrow M\hat{O}P = 75°$$

Como o ângulo MOP é o ângulo ao centro relativo ao arco QP, a amplitude do arco é igual à amplitude do ângulo:

$$\overset{\frown}{QP} = 75°$$

Resposta: **Opção B**

Prova Final 3.º Ciclo – 2016, 1.ª fase

14. Sabendo que $C\hat{A}D = B\hat{A}O = 25°$, e como o ângulo CAD é o ângulo inscrito relativo ao arco CB, temos que

$$\overset{\frown}{CD} = 2 \times C\hat{A}D \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD} = 2 \times 25 \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD} = 50°$$

Como AD é o arco de uma semicircunferência, $\overset{\frown}{AD} = 180°$, e assim, vem que

$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow 180 = \overset{\frown}{AC} + 50 \Leftrightarrow 180 - 50 = \overset{\frown}{AC} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AC} = 130°$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2015, 2.ª fase

15. Como o triângulo $[ABC]$ é isósceles, $\overline{AB} = \overline{BC}$.
Como, num triângulo a lados iguais se opõem ângulos iguais, temos que $B\hat{C}A = A\hat{C}B$, e como estes são ângulos inscritos, os respetivos arcos também são iguais, ou seja $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{BA}$

Como $\overset{\frown}{AC} = 100°$ e $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{BA} = 360°$, temos que

$$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{BA} = 360 \Leftrightarrow 100 + 2 \times \overset{\frown}{CB} = 360 \Leftrightarrow 2 \times \overset{\frown}{CB} = 360 - 100 \Leftrightarrow \overset{\frown}{CB} = \frac{260}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{CB} = 130$$

Como o ângulo CAB é o ângulo inscrito relativo ao arco CB, temos que $2 \times C\hat{A}B = \overset{\frown}{CB}$, pelo que

$$C\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{CB}}{2} \Leftrightarrow C\hat{A}B = \frac{130}{2} \Leftrightarrow C\hat{A}B = 65°$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2015, 1.ª fase

16. Como $[CDA]$ é um triângulo, e a reta CD é tangente à circunferência no ponto C e por isso perpendicular ao diâmetro $[CA]$, então a amplitude, em graus, do ângulo DAC, pode ser calculada como

$$D\hat{A}C + A\hat{C}D + C\hat{D}A = 180 \Leftrightarrow D\hat{A}C + 90 + 50 = 180 \Leftrightarrow D\hat{A}C = 180 - 140 \Leftrightarrow D\hat{A}C = 40^\circ$$

Como o ângulo DAC é o ângulo inscrito relativo ao arco CB, temos que:

$$\overset{\frown}{CB} = 2 \times D\hat{A}C \Leftrightarrow \overset{\frown}{CB} = 2 \times 40 \Leftrightarrow \overset{\frown}{CB} = 80^\circ$$

Resposta: **Opção C**

Prova Final 3.º Ciclo – 2014, 2.ª chamada

17. Como o ângulo BOC é o ângulo ao centro que, para o mesmo arco, corresponde ao ângulo inscrito BAC temos que $B\hat{O}C = 2 \times B\hat{A}C$

Assim, vem que $B\hat{O}C = 2 \times 65 = 130^\circ$

Resposta: **Opção C**

Prova Final 3.º Ciclo – 2014, 1.ª chamada

18. Como o ângulo EAF é um ângulo inscrito, o arco correspondente tem o dobro da amplitude, ou seja, $\overset{\frown}{EF} = 60 \times 2 = 120^\circ$

Como $[BD]$ é um diâmetro, $\overset{\frown}{BD} = 180^\circ$, e temos que

$$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{FD} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{EF} - \overset{\frown}{FD}$$

Assim, substituindo os valores conhecidos na igualdade anterior, temos:

$$\overset{\frown}{BE} = 180 - 120 - 20 \Leftrightarrow \overset{\frown}{BE} = 40^\circ$$

Teste Intermédio 9.º ano – 21.03.2014

19. Como o ângulo AOC é um ângulo ao centro, o arco correspondente tem a mesma amplitude, logo:

$$\overset{\frown}{AC} = A\hat{O}C = 72^\circ$$

Como o ângulo ABC é um ângulo inscrito, tem metade da amplitude do arco correspondente, ou seja,

$$A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{72}{2} = 36^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2013, 2.ª chamada

20. Como o ângulo ACB é um ângulo inscrito, o arco correspondente tem o dobro da amplitude, ou seja,

$$\overset{\frown}{AB} = 2 \times A\hat{C}B = 2 \times 36 = 72^\circ$$

Resposta: **Opção D**

Prova Final 3.º Ciclo – 2013, 1.ª chamada

21. Como os vértices dos dois pentágonos são vértices de um decágono regular, a região de interseção dos pentágonos também é um decágono regular, e assim o ângulo α é um ângulo interno de um decágono regular.
Como a soma dos ângulos internos de um polígono regular de n lados é $S_I = 180 \times (n-2)$, temos que a soma dos ângulos internos do decágono regular é

$$S_I = 180 \times (10-2) = 180 \times 8 = 1440°$$

Como os ângulos internos de um polígono regular têm a mesma amplitude, cada um dos 10 ângulos tem de amplitude

$$\alpha = \frac{1440}{10} = 144°$$

Teste Intermédio 9.º ano – 12.04.2013

22. Como o arco HFI tem 128° de amplitude, o arco HI (assinalado a tracejado) tem $360 - 128 = 232°$ de amplitude.
Como o ângulo HFI é o ângulo inscrito relativo ao arco HI tem metade da amplitude do arco, ou seja

$$H\hat{F}I = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{232}{2} = 116°$$

Como o trapézio é isósceles, o triângulo $[AFD]$ também é isósceles, pelo que $D\hat{A}F = A\hat{D}F$, e também $H\hat{F}I = A\hat{F}D$
Logo, a amplitude, em graus, do ângulo ADF pode ser calculada como

$$A\hat{D}F + D\hat{A}F + A\hat{F}D = 180 \Leftrightarrow A\hat{D}F + A\hat{D}F + 116 = 180 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \times A\hat{D}F = 180 - 116 \Leftrightarrow A\hat{D}F = \frac{64}{2} \Leftrightarrow A\hat{D}F = 32°$$

Teste Intermédio 9.º ano – 12.04.2013

23.

23.1. Como o ângulo AOC é um ângulo ao centro, e o ângulo ABC é um ângulo inscrito com o mesmo arco correspondente, temos que:

$$A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2} = \frac{140}{2} = 70°$$

Resposta: **Opção B**

23.2. Como as retas AD e CD são tangentes à circunferência nos pontos A e C, respetivamente temos que os ângulos OAD e OCD são retos.
Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, considerando o quadrilátero $[OADC]$ temos que

$$A\hat{D}C + O\hat{C}D + A\hat{O}C + O\hat{A}D = 360 \Leftrightarrow A\hat{D}C + 90 + 140 + 90 = 360 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\hat{D}C + 320 = 360 \Leftrightarrow A\hat{D}C = 360 - 320 \Leftrightarrow A\hat{D}C = 40°$$

Como os ângulos ADE e ADC são suplementares, vem que

$$A\hat{D}E + A\hat{D}C = 180 \Leftrightarrow A\hat{D}E + 40 = 180 \Leftrightarrow A\hat{D}E = 180 - 40 \Leftrightarrow A\hat{D}E = 140°$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2012, 2.ª chamada

24. Como $C\hat{A}B = D\hat{A}E = 37°$ e $A\hat{B}C = 90°$, temos que

$$A\hat{C}B + C\hat{A}B + A\hat{B}C = 180 \Leftrightarrow A\hat{C}B + 37 + 90 = 180 \Leftrightarrow A\hat{C}B = 180 - 90 - 37 \Leftrightarrow A\hat{C}B = 53°$$

Como o ângulo ACB é o ângulo inscrito na circunferência relativo ao arco PQ, temos que

$$\overset{\frown}{PQ} = 2 \times 53 = 106°$$

Como a soma das amplitudes dos arcos PQ e PCQ é 360° podemos calcular a amplitude, em graus, do arco PCQ :

$$\overset{\frown}{PCQ} + \overset{\frown}{PQ} = 360 \Leftrightarrow \overset{\frown}{PCQ} + 106 = 360 \Leftrightarrow \overset{\frown}{PCQ} = 360 - 106 \Leftrightarrow \overset{\frown}{PCQ} = 254°$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2012, 1.ª chamada

25.

25.1. Designando por r o raio da circunferência, como $[AD]$ é um diâmetro, vem que $\overline{BC} = \overline{AD} = 2r$, e $\overline{AB} = \overline{CD} = r$
Assim, temos que o perímetro do retângulo $[ABCD]$ é

$$P_{[ABCD]} = 2 \times \overline{AD} + 2 \times \overline{AB} = 2 \times 2r + 2 \times r = 4r + 2r = 6r$$

Como sabemos que o perímetro é igual a 30 cm, podemos determinar o valor do raio, em centímetros:

$$P_{[ABCD]} = 30 \Leftrightarrow 6r = 30 \Leftrightarrow r = \frac{30}{6} \Leftrightarrow r = 5$$

Pelo que calculando o comprimento da circunferência (ou o perímetro), em centímetros, arredondado às décimas, vem

$$P_{\circ} = 2\pi r = 2\pi \times 5 = 10\pi \approx 31{,}4 \text{ cm}$$

25.2. Como o ângulo DEF é o ângulo inscrito na circunferência correspondente ao arco DE e $D\hat{E}F = 30°$, temos que

$$\overset{\frown}{DF} = 2 \times D\hat{E}F = 2 \times 10 = 20°$$

Como $[AD]$ é um diâmetro, temos que $\overset{\frown}{AD} = 180°$, pelo que podemos calcular a amplitude, em graus, do arco FA :

$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DF} + \overset{\frown}{FA} \Leftrightarrow 180 = 20 + \overset{\frown}{FA} \Leftrightarrow 180 - 20 = \overset{\frown}{FA} \Leftrightarrow 160 = \overset{\frown}{FA}$$

Assim a amplitude de uma rotação de centro em O que transforme o ponto F no ponto A é a amplitude do ângulo ao centro FOA, cujo arco correspondente é o arco FA, pelo que

$$F\hat{O}A = \overset{\frown}{FA} = 160°$$

Teste Intermédio 9.º ano – 10.05.2012

26. Como o ângulo CAD é o ângulo inscrito na circunferência relativo ao arco CD, e $C\hat{A}D = 36°$ temos que

$$\overset{\frown}{CD} = 2 \times 36 = 72°$$

Resposta: **Opção C**

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2011, Ép. especial

27. Como o ângulo BDC é o ângulo inscrito relativo ao arco BC, temos que $B\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{80}{2} = 40°$
Como o ângulo BDC e o ângulo PDC são o mesmo ângulo e como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, podemos calcular a amplitude do ângulo DCP:

$$D\hat{C}P + D\hat{P}C + P\hat{D}C = 180 \Leftrightarrow D\hat{C}P + 85 + 40 = 180 \Leftrightarrow D\hat{C}P = 180 - 85 - 40 \Leftrightarrow D\hat{C}P = 55°$$

Como o ângulo DCP e o ângulo DCA são o mesmo ângulo e como os ângulos DCA e DBA são ambos ângulos inscritos relativos ao arco DA, então

$$D\hat{B}A = D\hat{C}A = D\hat{C}P = 55°$$

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2011, 2.ª chamada

28. Como o ângulo CAD é o ângulo inscrito relativo ao arco AC, temos que $\overset{\frown}{CD} = 2 \times C\hat{A}D = 2 \times 40 = 80°$

Como $\overset{\frown}{AD} = 180°$, porque $[AD]$ é um diâmetro da circunferência, e $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AD}$, vem que

$$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AD} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AC} + 80 = 180 \Leftrightarrow \overset{\frown}{AC} = 180 - 80 \Leftrightarrow \overset{\frown}{AC} = 100°$$

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2011, 1.ª chamada

29. Designado por D o ponto simétrico ao ponto B relativamente ao centro da circunferência, temos que como o ângulo ABD é o ângulo inscrito relativo ao arco AD, vem que $\overset{\frown}{AD} = 2 \times A\hat{B}D = 2 \times 36 = 72°$

Como $\overset{\frown}{BD} = 180°$, porque $[BD]$ é um diâmetro da circunferência, e $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$, vem que

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} + 72 = 180 \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = 180 - 72 \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = 108°$$

Teste Intermédio 9.º ano – 17.05.2011

30.

30.1. Como $[ACEG]$ é um quadrado, temos que $B\hat{A}H = 90°$, e a amplitude do ângulo ao centro BAH, cujo arco correspondente é o arco BH, pelo que

$$\overset{\frown}{BH} = 90°$$

E como o ângulo BIH é o ângulo inscrito relativo ao arco BH, a sua amplitude é metade da amplitude do arco:

$$B\hat{I}H = \frac{\overset{\frown}{BH}}{2} = \frac{90}{2} = 45°$$

30.2. Como $[ACEG]$ é um quadrado de lado 4, a sua área é

$$A_{[ACEG]} = 4^2 = 16$$

Como as circunferências têm raio lado 2, a área de cada uma é

$$A_{\circ} = \pi \times 2^2 = \pi \times 4 = 4\pi$$

Como os centros das circunferências são os vértices do quadrado, a área de cada uma das circunferências que está no interior do quadrado é $\frac{1}{4}$ do total. Como são 4 quartos de circunferência que estão no interior do quadrado, a área do quadrado que não está sombreada corresponde a área de uma circunferência, e assim, a área sombreada, A_S, pode ser calculada como a diferença das áreas do quadrado e de uma circunferência:

$$A_S = A_{[ACEG]} - 4 \times \frac{1}{4} \times 4\pi = A_{[ACEG]} - 4\pi = 16 - 4\pi \approx 3{,}4$$

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2010, 2.ª chamada

31. Como o ângulo BDA é o ângulo inscrito relativo ao arco AB, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo:

$$\overset{\frown}{AB} = 2 \times B\hat{D}A = 2 \times 70 = 140^\circ$$

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2010, 1.ª chamada

32.

32.1. Como qualquer hexágono regular pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros, o triângulo $[DOC]$ é equilátero, pelo que os seus ângulos são todos iguais.
Assim, temos que

$$3 \times D\hat{O}C = 180 \Leftrightarrow D\hat{O}C = \frac{180}{3} \Leftrightarrow D\hat{O}C = 60^\circ$$

32.2. Como a circunferência tem raio 4, temos que a área do círculo correspondente, é

$$A_{\circ} = \pi \times 4^2 = 16\pi$$

Como o hexágono pode ser dividido em 6 triângulos congruentes com o triângulo $[DOC]$, temos que área do hexágono $[ABCDEF]$ é

$$A_{[ABCDEF]} = 6 \times A_{[DOC]} = 6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

E assim, calculando a área da região sombreada, A_S, como a diferença das áreas do círculo e do hexágono, e arredondando o resultado às unidades temos

$$A_{\circ} - A_{[ABCDEF]} = 16\pi - 24\sqrt{3} \approx 9$$

Teste Intermédio 9.º ano – 11.05.2010

33. Como o diâmetro $[BD]$ é perpendicular ao diâmetro $[AC]$, o ângulo AOB é reto, e como é um ângulo ao centro, o arco correspondente tem a mesma amplitude, ou seja,

$$\overset{\frown}{AB} = A\hat{O}B = 90^\circ$$

Como o ângulo ACB é o ângulo inscrito relativo ao arco AB, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco:

$$A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{90}{2} = 45^\circ$$

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2009, 2.ª chamada

34. Como o ângulo ABC é o ângulo inscrito relativo ao arco AC, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo:

$$\overset{\frown}{AC} = 2 \times A\hat{B}C = 2 \times 28 = 56^\circ$$

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2009, 1.ª chamada

35. Como $[AC]$ é um diâmetro da circunferência, o arco AC tem amplitude 180°

Como o ângulo ABC é o ângulo inscrito relativo ao arco AC, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco:

$$A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{180}{2} = 90^\circ$$

Pelo que o ângulo ABC é reto, e assim, o triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo em B

Teste Intermédio 9.º ano – 11.05.2009

36. Como os ângulos AOC e β são suplementares, e $\beta = 60^\circ$, então temos que:

$$A\hat{O}C + \beta = 180 \Leftrightarrow A\hat{O}C = 180 - \beta \Leftrightarrow A\hat{O}C = 180 - 60 \Leftrightarrow A\hat{O}C = 120^\circ$$

Como o triângulo $[AOC]$ é isósceles, porque ambos os lados $[AO]$ e $[OC]$ são raios da circunferência, então $\overline{AO} = \overline{OC}$; e num triângulo a lados com a mesma medida opõem-se ângulos com a mesma amplitude, pelo que $O\hat{A}C = \alpha$
Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, então, calculando a amplitude em graus do ângulo α, vem que:

$$O\hat{A}C + \alpha + A\hat{O}C = 180 \Leftrightarrow \alpha + \alpha + 120 = 180 \Leftrightarrow 2\alpha = 180 - 120 \Leftrightarrow 2\alpha = 60 \Leftrightarrow \alpha = \frac{60}{2} \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ$$

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2008, 2.ª chamada

37.

37.1. Como a área do círculo é dada por $A = \pi r^2$, temos que:

$$A = \pi r^2 \Leftrightarrow \frac{A}{r^2} = \pi$$

E como $P = 2\pi r$ e $2\pi = d$, vem que:

$$P = 2\pi r \Leftrightarrow \frac{P}{2r} = \pi \Leftrightarrow \frac{P}{d} = \pi$$

Pelo que, de entre as igualdades apresentadas, $\frac{A}{2r} = \pi$ é a única que não é verdadeira.

Resposta: **Opção B**

Exame Nacional 3.º Ciclo - 2008, 2.ª chamada

38.

38.1. Como $[PQRST]$ é um pentágono regular, os vértices dividem a circunferência em 5 arcos com a mesma amplitude, pelo que a amplitude do arco TQ pode ser calculada como:

$$\overset{\frown}{TQ} = 3 \times \frac{360}{5} = 216°$$

Como o ângulo TPQ é o ângulo inscrito relativo ao arco TP, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco:

$$T\hat{P}Q = \frac{\overset{\frown}{TQ}}{2} = \frac{216}{2} = 108°$$

38.2. Como a circunferência tem raio 5, a área do círculo pode ser calculada por:

$$A_\circ = \pi r^2 = \pi 5^2 = 25\pi$$

Como o triângulo $[SOR]$ tem área 12, a área do pentágono é

$$A_{[PQRST]} = 5 \times A_{[SOR]} = 5 \times 12 = 60$$

Assim, calculando a área sombreada, A_S, como a diferença da área do círculo e do pentágono e arredondando o resultado às décimas, temos que:

$$A_S = A_\circ - A_{[PQRST]} = 25\pi - 60 \approx 18{,}5$$

Teste Intermédio 9.º ano – 07.05.2008

39. Como o arco AB tem 180° de amplitude, então o lado $[AB]$ do triângulo é um diâmetro da circunferência, pelo que, independentemente da posição do vértice C, o triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo.
Assim como o triângulo $[ABC]$ tem um ângulo reto não é um triângulo equilátero, pois para o ser, todos os ângulos internos teriam amplitude de 60°

Exame Nacional 3.º Ciclo - 2007, 2.ª chamada

40.

40.1. Como o ângulo CAD é o ângulo inscrito relativo ao arco CD, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo:

$$\overset{\frown}{CD} = 2 \times C\hat{A}D = 2 \times 30 = 60°$$

40.2. Como o triângulo $[ADE]$ é retângulo em E, o ângulo ADE é reto, e assim o ângulo CDE também é reto (porque ADE e CDE são ângulos suplementares).
Como o segmento de reta $[BD]$ é um diâmetro, é um eixo de simetria da circunferência, e assim a reflexão do ponto A, relativamente à reta BD é o ponto C (porque as retas AC e BD são perpendiculares), e assim vem que o ponto E é o ponto médio da corda $[AC]$, pelo que $\overline{AE} = \overline{EC}$

Como o lado $[DE]$ é comum aos dois triângulos, temos que os dois triângulos têm dois pares de lados com o mesmo comprimento e o ângulo por eles formado tem a mesma amplitude, pelo que os triângulos são geometricamente iguais (critério LAL).

Exame Nacional 3.º Ciclo - 2007, 1.ª chamada

41. Como o ângulo DOC é o ângulo ao centro relativo ao arco DC, a amplitude do arco é igual à amplitude do ângulo:

$$\overset{\frown}{DC} = 60°$$

Como o ângulo DAB é o ângulo inscrito relativo ao arco DB, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo:

$$\overset{\frown}{DB} = 2 \times D\hat{A}C = 2 \times 50 = 100°$$

E a amplitude do arco CB é a diferença das amplitudes dos arcos DB e DC:

$$\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{DB} - \overset{\frown}{DC} = 100 - 60 = 40°$$

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2006, 2.ª chamada

42.

42.1. Como o segmento de reta $[AC]$ é um diâmetro, então:

$$\overset{\frown}{AC} = 180°$$

Como o ângulo CAB é o ângulo inscrito relativo ao arco CB, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo:

$$\overset{\frown}{CB} = 2 \times C\hat{A}B = 2 \times O\hat{A}B = 2 \times 30 = 60°$$

E a amplitude do arco AB é a diferença das amplitudes dos arcos AC e BC:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BC} = 180 - 60 = 120°$$

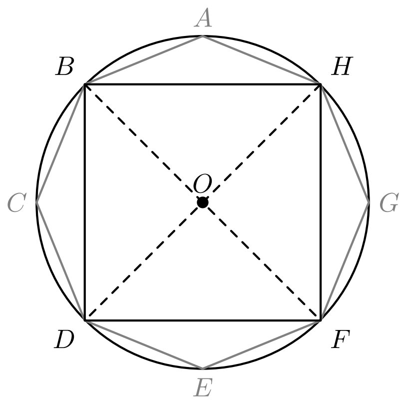
42.2. Como a reta é tangente à circunferência no ponto A, é perpendicular ao diâmetro $[AD]$, ou seja, o ângulo CAD é reto.
Assim, como os ângulos CAB e BAD são complementares, ou seja $C\hat{A}B + B\hat{A}D = C\hat{A}D$, temos que:

$$30 + B\hat{A}D = 90 \Leftrightarrow B\hat{A}D = 90 - 30 \Leftrightarrow B\hat{A}D = 60°$$

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2005, 2.ª chamada

43. Como os segmentos $[BF]$ e $[DH]$ são ambos diâmetros da circunferência, temos que:

$$\overline{BF} = \overline{DH}$$



Como o octógono é regular, os arcos definidos por dois vértices consecutivos têm a mesma amplitude. Calculando a amplitude do arco BC (por exemplo), temos que:

$$\overset{\frown}{BC} = \frac{360}{8} = 45°$$

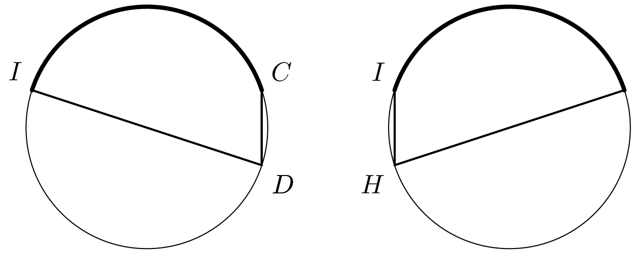
E assim, os arcos definidos por vértices consecutivos do quadriláteros, também têm a mesma amplitude. Calculando a amplitude do arco BD (por exemplo), temos que:

$$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} = 2 \times \overset{\frown}{BC} = 2 \times 45 = 90°$$

Desta forma temos que o ângulo BOD, que é o ângulo ao centro relativo ao arco BD (e por isso tem a mesma amplitude), é uma ângulo reto.
Assim, os segmentos $[BF]$ e $[DH]$, que são as diagonais do quadrilátero $[BDFH]$ são perpendiculares e têm o mesmo comprimento, pelo que o quadrilátero é um quadrado.

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2005, 2.ª chamada

44. Como os ângulos CDI e CHI são ângulos inscritos, relativos ao mesmo arco de circunferência (arco CI), então têm a mesma amplitude.



Exame Nacional 3.º Ciclo – 2005, 1.ª chamada

45. Como o perímetro de um círculo de raio r é $P_\circ = 2\pi r$. Como neste caso o diâmetro é de 10 cm, temos que raio é $r = \frac{10}{2} = 5$ cm. E assim o perímetro do círculo, em centímetros, é dado por:

$$P_\circ = 2\pi \times 5 = 10\pi \approx 31{,}416 \text{ cm}$$

Desta forma, observando todas as aproximações apresentadas podemos verificar que a melhor aproximação é 31,42, ou seja a aproximação do João.

Resposta: **Opção C**

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2005, 1.ª chamada

46.

46.1. Como o perímetro de um círculo de raio r é $P_\circ = 2\pi r$. Como neste caso o diâmetro é de 10 m, temos que raio é $r = \frac{10}{2} = 5$ m. E assim o perímetro do círculo, em metros, é dado por:

$$P_\circ = 2\pi \times 5 = 10\pi \text{ m}$$

Como o comprimento total corresponde a 6 voltas completas, o comprimento total do percurso, em metros, arredondado às unidades, é:

$$C_T = 6 \times 10\pi = 60\pi \approx 188 \text{ m}$$

46.2. Como existem 12 cadeiras igualmente espaçadas sobre a circunferência, os 12 ângulos ao centro têm a mesma amplitude.
Assim, temos que a amplitude de cada um destes ângulos, e o ângulo DOF em particular, é:

$$D\hat{O}F = \frac{360}{12} = 30^\circ$$

Prova de Aferição – 2004