AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA
Modelos Populacionais – Ficha 02
11º ano – MACS

1. Uma das freguesias do município de Fonte Melo foi criada no início de 2002.

   Admita que, t anos após a criação da freguesia, o número de eleitores inscritos é bem aproximado, com arredondamento às unidades, pelo modelo seguinte.

   $$E(t) = 7700 - 1471\ln(t+1), 0 \leq t < 16$$

   1.1. Durante os primeiros 5 anos de existência da freguesia, verificou-se uma redução do número de eleitores.

   Determine o valor dessa redução.

   1.2. Admita que o número de elementos da assembleia de freguesia (y) depende do número de eleitores inscritos (x) , no início do ano em que se realizam as eleições para a sua formação.

   Na tabela seguinte, apresenta-se o modo como se relacionam esses valores.

N.º de eleitores (x)	N.º de elementos da assembleia de freguesia (y)
$x \leq 1000$	7
$1000 < x \leq 5000$	9
$5000 < x \leq 20\,000$	13
...	...

   Suponha que, nos anos em que se realizam eleições, estas ocorrem no início do ano.

   Em que anos teria sido possível realizar eleições de modo a garantir que a assembleia desta freguesia fosse constituída por 13 elementos?

   Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:
   - o(s) gráfico(s) visualizado(s) que lhe permite(m) resolver o problema;
   - as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às décimas.

Exame – 2018, Ép. especial

2. Numa das cidades integradas na digressão da companhia de teatro existe um centro náutico.

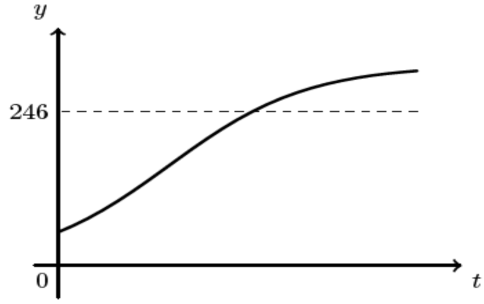
2.1. Admita que o número de sócios do centro náutico é bem aproximado pelo modelo seguinte

$$N(t) = \frac{246}{1 + ae^{-0,65t}} \qquad t \geq 0$$

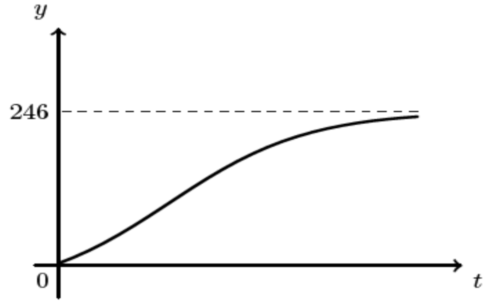
em que a variável t designa o tempo, em meses, que decorre desde a inauguração do centro náutico, e a é um número real positivo.

Qual das alternativas seguintes pode representar o gráfico de N?

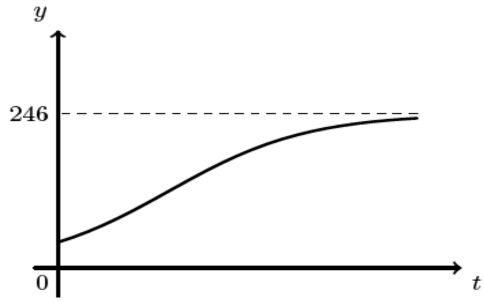
(A)



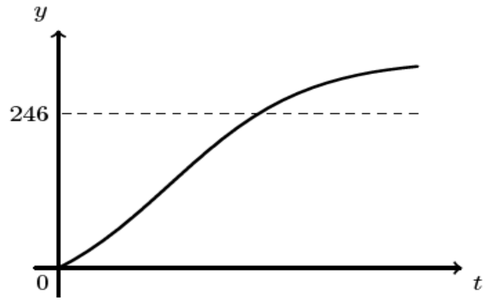
(B)



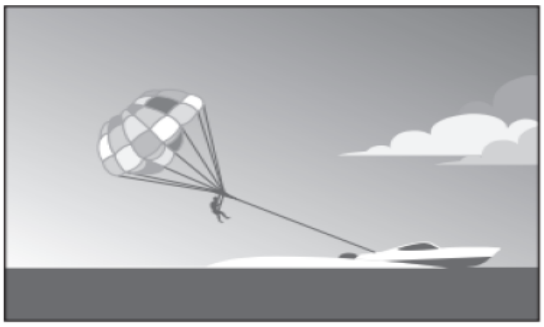
(C)



(D)



2.2. No centro náutico é possível praticar *parasailing*. Neste desporto, um para-quedas especial, denominado *parasail*, está preso a um barco através de um cabo. O praticante, equipado com o *parasail*, senta-se numa plataforma. Com a deslocação do barco, o *parasail* enche-se de ar e, à medida que a velocidade do barco aumenta, o *parasail* eleva-se nos ares.



Num momento de descanso, um dos atores da peça foi praticar *parasailing*.

Admita que, t minutos após se elevar nos ares, a altura do *parasail*, em metros, é bem aproximada pelo modelo seguinte.

$$A(t) = 1 + 35\ln(25{,}5t + 0{,}98) \qquad t \in [0{,}5]$$

2.2.1. Comparando a altura atingida pelo *parasail* ao fim de 30 segundos e ao fim de 1 minuto, após se elevar nos ares, quanto aumentou, em percentagem, essa altura?

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

2.2.2. O ator comentou que o *parasail* se tinha mantido a uma altura entre os 120 e os 150 metros durante, pelo menos, dois minutos.

Terá o ator razão?

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:
- o(s) gráfico(s) visualizado(s) que lhe permite(m) resolver o problema;
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às décimas.

3. As altitudes de dois pequenos aviões foram monitorizadas, pela torre de controlo do aeródromo da ilha de Dujal, pouco tempo depois de levantarem voo.

Admita que as altitudes, em milhares de metros, t minutos após o início da monitorização, do avião da companhia aérea *AirOnPlane* (A) e do avião da companhia aérea *BeOnAir* (B) são dadas, respetivamente, por

$$A(t) = \frac{9}{1+17e^{-0,7t}} \quad \text{e} \quad B(t) = \frac{8}{1+31e^{-t}},\ t \in [0{,}15]$$

3.1. Suponha que o modelo que dá, em cada momento, a altitude do avião da companhia *AirOnPlane* tem uma margem de erro de 10 metros.

Determine entre que valores pode variar a altitude efetiva deste avião, 90 segundos após o início da monitorização.

Apresente a resposta, em metros, com arredondamento às unidades.
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, três casas decimais.

3.2. Determine, de acordo com os modelos apresentados, quantos minutos o avião da companhia *AirOnPlane* voou a uma altitude inferior à do avião da companhia *BeOnAir*, durante os 15 minutos de voo monitorizado.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:
- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) com arredondamento às décimas.

3.3. O avião da companhia *AirOnPlane* não atingiu a altitude prevista no plano de voo inicialmente estabelecido. Nesse plano de voo, o avião deveria atingir a altitude máxima de 12 000 metros.

Selecione a opção que completa corretamente a frase.

Ao fim dos 15 minutos de voo monitorizado, a altitude atingida pelo avião da *AirOnPlane* foi, com aproximação às unidades, __________ da altitude máxima estabelecida no plano de voo.

(A) 22% **(B)** 44% **(C)** 67% **(D)** 75%

Exame – 2018, 1.ª Fase

4. O Rui, um frequentador habitual do CineJov, partilhou numa rede social, às oito horas de um certo dia, a lista de filmes que serão exibidos durante o ciclo de cinema. A partir desse momento, alguns dos seus amigos efetuaram novas partilhas dessa lista.

Admita que o número total de novas partilhas da lista de filmes, ao fim de t horas após o instante em que o Rui partilhou a lista de filmes, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$P(t) = 12e^{0,38t} - 2, \text{ com } t \in]0{,}12]$$

Por exemplo, ao fim de duas horas após o instante em que o Rui partilhou a lista de filmes, tinham sido realizadas um total de 24 novas partilhas, uma vez que $P(2) \approx 23{,}66$

4.1. Determine o número total de novas partilhas realizadas entre as treze e as catorze horas (inclusive).

4.2. Que horas eram quando o número total de novas partilhas foi pela primeira vez superior a 500?

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:
- o(s) gráfico(s) visualizado(s) que lhe permite(m) resolver o problema;
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às décimas;
- o resultado, em horas, arredondado às unidades.

Exame – 2017, Ép. especial

5. A Escola de Vilar de Sadeija foi inaugurada no ano 2000.

Admita que, t anos após a inauguração da escola, o número de alunos matriculados no início de cada ano letivo é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$A(t) = \frac{2350}{1+5e^{-0,43t}}\text{ , com } t = 0, 1, 2, ...$$

5.1. Com o passar do tempo, o número de alunos matriculados aproxima-se de um valor que não pode ser ultrapassado.

Identifique esse valor, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora. Na sua resposta:
– apresente o gráfico visualizado que lhe permite resolver o problema;
– assinale no gráfico o valor do qual, com o passar do tempo, se aproxima o número de alunos matriculados.

5.2. Na investigação para um artigo, um elemento do jornal da escola analisou a evolução do número de alunos matriculados no início de cada ano letivo, na escola.

Verificou que, no ano em que o jornal passou a ter instalações próprias, havia mais 950 alunos matriculados do que em 2002, ano em que o jornal foi fundado.

Determine o ano em que o jornal passou a ter instalações próprias.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, três casas decimais.

Exame – 2017, 2.ª Fase

6. O parque inaugurou uma bilheteira online às zero horas do dia 10 de junho de 2000.

Admita que o número total de bilhetes vendidos, ao fim de t dias após a abertura da bilheteira *online*, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$b(t) = 140 + 602\ln(0{,}5t + 2), \text{ com } 0 < t < 30$$

Por exemplo, ao fim de sete dias após a abertura da bilheteira *online*, tinham sido vendidos um total de 1166 bilhetes, uma vez que $b(7) \approx 1166{,}26$

6.1. Quantos bilhetes foram vendidos no dia 12 de junho de 2000?

Na sua resposta, apresente todos os cálculos que efetuar.

6.2. A empresa *ComPromo* disponibilizou uma bilheteira *online*, na qual também é possível comprar bilhetes para o parque de diversões. As duas bilheteiras entraram em funcionamento no mesmo instante.
Admita que o número total de bilhetes vendidos pela bilheteira disponibilizada pela *ComPromo*, ao fim de t dias após a sua abertura, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$c(t) = 35e^{0,14t}, \text{ com } 0 < t < 30$$

Ao fim de quantos dias, após a abertura das duas bilheteiras, o número total de bilhetes vendidos na bilheteira *online* do parque foi, pela primeira vez, inferior ao número total de bilhetes vendidos na bilheteira disponibilizada pela *ComPromo*?

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:
– o(s) gráfico(s) visualizado(s) que lhe permite(m) resolver o problema;
– as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às décimas.

Exame – 2017, 1.ª Fase

7. Desde a inauguração do TPT, a 1 de janeiro de 2000, o número diário de horas de transmissão tem vindo a aumentar.

No dia 1 de janeiro, n anos após a inauguração do canal, a percentagem de horas de emissão diárias é dada aproximadamente por

$$a(n) = \frac{83}{1 + be^{-0,25n}} \text{ , com } n \in \{0,1,2,3,...\}$$

Considere que $n = 0$ corresponde ao dia 1 de janeiro de 2000 e que b é um número real.

7.1. Supondo que, em 1 de janeiro de 2000, a emissão do TPT durou 21% desse dia, determine b.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

7.2. Considere agora que $b = 3,5$.

7.2.1. Indique em que anos, no dia 1 de Janeiro, a percentagem de horas de emissão se situou entre 65% e 74%.

Na resolução deste item, recorra à calculadora gráfica para construir uma tabela.
Apresente os valores, aproximados às unidades, das linhas da tabela relevantes para a resolução.

7.2.2. Uma parte da emissão do TPT é ocupada com publicidade. A tabela seguinte apresenta o custo da publicidade, por minuto, em função do horário em que é transmitida.

Horário	**0h-12h**	**12h-20h**
Preço por minuto	1000 €	1200 €

No dia 1 de janeiro de 2011, uma empresa comprou 1% das horas de emissão para publicitar um produto. O tempo adquirido para esta publicidade foi distribuído de igual forma pelos períodos da manhã e da tarde.

Qual foi o custo, em euros, desta publicidade?

Na sua resposta, apresente, arredondados à unidade, os minutos adquiridos para esta publicidade.
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, duas casas decimais.

Exame – 2016, Ép. especial

8. No mercado cambial, a compra e a venda de moeda estrangeira está sujeita ao câmbio no momento em que a transação se efetua.

Em Pracóvia, a moeda oficial é abreviadamente designada por PRC.

De acordo com informação recolhida no mercado, o modelo v, válido para o mês de janeiro de 2015, dá-nos o valor em euros de cada PRC, t dias após as zero horas do dia 1 de janeiro de 2015, e é definido por

$$v(t) = \frac{1,85}{1 + 12e^{-0,33t}} \text{ , com } t \in 0 \leq t < 31$$

8.1. Às 12 horas do dia 15 de janeiro de 2015, numa agência bancária de Pracóvia, o Francisco quis trocar euros por PRC, de modo a obter 1500 PRC.

Determine, de acordo com o modelo apresentado, a quantia em euros que o Francisco teve de trocar.

Apresente o resultado arredondado às unidades.
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

8.2. A Gabriela e o Henrique estiveram em Pracóvia no mês de janeiro de 2015, tendo estado juntos apenas em parte da sua estada. Posteriormente, encontraram-se e conversaram sobre os gastos efetuados. A Gabriela comentou que, durante a sua estada, o câmbio estivera sempre acima de 0,75 euros, e o Henrique lembrava-se de que, durante a sua estada, o câmbio estivera sempre abaixo de 1,5 euros.

Será possível que os dois amigos tenham estado em Pracóvia, simultaneamente, durante dez dias consecutivos?

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:
- o gráfico visualizado;
- as coordenadas de pontos relevantes arredondadas às centésimas.

Exame – 2016, 2.ª Fase

9. A rádio oficial do MaréFest transmite em direto a partir do recinto do festival. Uma das transmissões em direto iniciou-se às 20h00 e teve a duração de seis horas.

Das pessoas que ouviam rádio nessa noite, a percentagem de ouvintes da rádio oficial do MaréFest ao longo do programa, t horas após o início da transmissão, é dada por

$$r(t) = 14{,}8 + 0{,}7e^{0{,}6t}\text{ , com } t \in 0 \leq t \leq 6$$

9.1. Qual foi a percentagem de ouvintes da rádio oficial do MaréFest às 22h00?

Apresente a resposta arredondada às décimas.

9.2. No início da atuação da banda principal, a percentagem de ouvintes da rádio oficial era de, aproximadamente, 25,2%, tendo aumentado 13 pontos percentuais até ao final da atuação da banda.

Determine a hora de início e a hora de conclusão da atuação da banda principal.

Apresente o resultado em horas e minutos, arredondados às unidades.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:
- o gráfico visualizado;
- as coordenadas de pontos relevantes arredondadas às décimas.

Exame – 2016, 1.ª Fase

10. O número, P, de residentes num concelho, em função de t, em meses, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$P(t) = \frac{1239}{1 + 23 \times e^{-0{,}13t}} \ \ (t = 0, 1, 2, \ldots)$$

t é o número de meses que decorrem após o início de janeiro de 2010. Por exemplo, $P(1)$, com arredondamento às unidades, representa o número de residentes no início de fevereiro de 2010.

10.1. Entre o início de janeiro de 2010 e o início de janeiro de 2013, o número de residentes no concelho aumentou.

Determine o valor desse aumento.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

10.2. Um estudo concluiu que, dadas as dimensões geográficas do concelho, o número de residentes do concelho não pode exceder um determinado valor. Diz-se, por isso, que, com o decorrer do tempo, há um limite para o valor de P.

Identifique um valor aproximado para esse limite.

Justifique a sua resposta, recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora.

Exame – 2015, Ép. especial

11. Certo dia, vieram a público rumores da separação dos sócios e a cotação em bolsa das ações da PTM entrou em queda. A cotação C (em euros) de cada ação, no final de cada dia de negociação em bolsa, t dias após os rumores terem começado, é bem aproximada pelo modelo seguinte, com arredondamento às centésimas.

$$C(t) = 5{,}1 - 3\log_{10}(t + 0{,}1)\,, \quad \text{com } 1 \leq t \leq 20$$

No modelo, $t = 1$ corresponde ao fim do primeiro dia de negociação das ações em bolsa, após o início dos rumores. Assim, por exemplo, a cotação de cada ação, em euros, no final do terceiro dia de negociação em bolsa, após o início dos rumores, é 3,63 euros, pois $C(3) \approx 3{,}626$

11.1. Qual foi o valor da desvalorização de cada ação, desde o final do primeiro dia de negociação das ações até ao final do sétimo dia?

Apresente a resposta arredondada às centésimas.

11.2. Durante quantos dias de negociação das ações em bolsa, após o início dos rumores, a cotação de cada ação, no final do dia, foi superior a um terço do valor registado no final do segundo dia de negociação?

Exame – 2015, 2.ª Fase

12. O Gabinete de Avelares Prudente (GAP) tem por missão promover a segurança rodoviária no concelho. Neste âmbito, foi feito um levantamento estatístico de dados sobre os habitantes do concelho de Avelares que têm carta de condução.

Segundo o GAP, que acompanha o número de novos encartados, a percentagem M de novos encartados que são mulheres, t anos após 1980, é bem aproximada pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$M(t) = \frac{58}{1 + 1{,}7e^{-0{,}23t}}$$

Por exemplo, no ano de 1982, a percentagem de novos encartados que são mulheres, é igual a 28%, pois $M(2) \approx 27{,}98$

12.1. Em 1985, o número de novos encartados foi 4750. Quantas mulheres foram encartadas nesse ano?

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

12.2. Determine o primeiro ano em que, no mês de janeiro, a percentagem de novos encartados do sexo feminino foi superior a 50%.

Exame – 2015, 1.ª Fase

13. Em três cidades, Peso, Neiva e Runa, a população evolui segundo modelos de crescimento distintos.

Um modelo matemático que se ajusta bem à evolução do número P de habitantes de Peso, com arredondamento às unidades, em função do número t de anos que decorrem após o dia 1 de junho de 2000, é

$$P(t) = 1800 \times e^{0{,}05t} \qquad (t = 0{,}1{,}2{,}3{,}...)$$

Um modelo matemático que se ajusta bem à evolução do número N de habitantes de Neiva, com arredondamento às unidades, em função do número t de anos que decorrem após o dia 1 de junho de 2000, é

$$N(t) = 2000 + 1000\ln(2t + 5) \qquad (t = 0{,}1{,}2{,}3{,}...)$$

Um modelo matemático que se ajusta bem à evolução do número R de habitantes de Runa, com arredondamento às unidades, em função do número t de anos que decorrem após o dia 1 de junho de 2000, é

$$R(t) = at + b \qquad (t = 0{,}1{,}2{,}3{,}... \text{ e } a \text{ e } b \text{ duas constantes.})$$

Considere que $t = 0$ corresponde ao dia 1 de junho de 2000, para todos os modelos.

13.1. Determine ao fim de quantos anos, após o dia 1 de junho de 2000, se estima que o número de habitantes de Peso duplique.

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

13.2. Determine, recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora, o número mínimo de anos ao fim dos quais se estima que o número de habitantes de Peso seja superior ao número de habitantes de Neiva.

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

13.3. Na tabela seguinte, apresentam-se os números de habitantes de Runa contabilizados de 2000 a 2006, no dia 1 de junho.

t	0	1	2	3	4	5	6
R	632	894	1144	1407	1665	1920	2183

Estime o número de habitantes que se previa para Runa no dia 1 de junho de 2012, de acordo com a tabela anterior e admitindo que o número de habitantes em função do número de anos é melhor aproximado por um modelo do tipo $R(t) = at + b$

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

Exame – 2014, 2.ª Fase

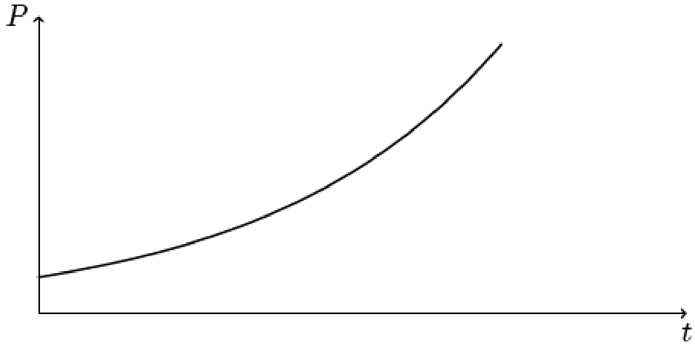
14. Em Semedo, construiu-se uma nova urbanização.

A câmara municipal contratou uma empresa para analisar a qualidade da água da urbanização. O estudo realizado revelou a existência de micro-organismos.

14.1. No início do estudo, às zero horas do dia 13 de setembro de 2013, o número de micro-organismos na água era 3 milhares de milhões por cm^3. Cinco dias após o início do estudo, o número de micro-organismos na água era 19,39 milhares de milhões por cm^3.

O número P de micro-organismos na água, em milhares de milhões por cm^3, t dias após o início do estudo, é bem aproximado por um modelo exponencial.

Na figura seguinte, apresenta-se parte da representação gráfica de $P(t)$ (com $t > 0$)



Determine um modelo exponencial, da forma $a \times e^{bt}$ ou da forma $a \times b^t$, que se ajuste à evolução de $P(t)$, recorrendo à calculadora.

Apresente o valor de b com arredondamento às milésimas.

14.2. Às zero horas do dia 18 de setembro de 2013, foi adicionada à água uma substância que elimina micro-organismos.
Considere, agora, que o número M de micro-organismos na água, em milhares de milhões por cm^3, t dias após a adição da substância, é bem aproximado pelo modelo seguinte.

$$M(t) = 19{,}39 \times e^{-0{,}08t} \quad (t = 0{,}1{,}2{,}...)$$

Determine, recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora, o número mínimo de dias necessários para que o número de micro-organismos presentes na água seja inferior a um oitavo do número de micro-organismos que tinham sido contabilizados na água no instante em que se adicionou a substância.

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2014, 1.ª Fase

15. Uma operadora de telemóveis apresenta aos seus clientes dois tarifários distintos, o Tarifário M e o Tarifário N.

Na tabela seguinte, apresentam-se duas simulações do custo total da chamada, em euros, em função da sua duração, t , em minutos, no Tarifário M e no Tarifário N, para os primeiros 10 minutos.

Duração (t) (em minutos)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Tarifário M (euros)	0,094	0,188	0,282	0,376	0,470	0,564	0,658	0,752	0,846	0,940
Tarifário N (euros)	0,196	0,338	0,473	0,561	0,606	0,626	0,633	0,637	0,638	0,639

15.1. Um modelo matemático que se ajusta bem à nuvem de pontos correspondente ao custo total y da chamada no Tarifário N, em função de t, é da forma $y(t) = \dfrac{c}{1 + a \times e^{-bt}}$

Determine as constantes a, b e c, recorrendo à calculadora.

Apresente os valores de a, b e c com arredondamento às milésimas.

15.2. Justifique que um modelo de crescimento linear seja apropriado para descrever os dados relativos ao Tarifário M.

Na sua resposta, deve:

- representar graficamente os dados relativos ao Tarifário M;
- apresentar o valor do coeficiente de correlação linear entre as variáveis duração e custo total da chamada;
- relacionar o diagrama de dispersão com o valor do coeficiente de correlação linear.

15.3. Compare os modelos matemáticos que interpretam bem a evolução do custo total de uma chamada, em função da sua duração no Tarifário M e no Tarifário N, descrevendo as suas representações gráficas.

Na sua resposta, deve:

- indicar um modelo que se ajuste à evolução do Tarifário M;
- reproduzir, na folha de respostas, os gráficos visualizados na calculadora, relativos aos modelos, identificando o Tarifário M e o Tarifário N;
- reproduzir, na folha de respostas, a janela de visualização utilizada;
- analisar os pontos relevantes para a comparação da evolução dos modelos;
- descrever a evolução dos dois tarifários.

Caso não tenha respondido ao primeiro item deste número, e somente nesse caso, considere o modelo logístico
$y(t) = \dfrac{0{,}700}{1 + 6 \times e^{-0{,}900t}}$ como uma boa aproximação para o Tarifário N.

Caso proceda a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2013, Ép. especial

16. Na tabela seguinte, apresenta-se o número de habitantes de Pontes de Cima entre 1980, ano do início da contagem, e 2010, ano do último registo conhecido.

Considere que $t = 0$ corresponde ao ano 1980, sendo t o número de anos que decorrem a partir do início da contagem.

Ano	t	**Número de habitantes (N)**
1980	0	650
1985	5	940
1990	10	1380
1995	15	1999
2000	20	2373
2005	25	2712
2010	30	5526

Um modelo matemático que se ajusta bem à nuvem de pontos correspondente ao número N de habitantes da localidade, em função de t, é

$$N(t) = 678{,}211 \times e^{0{,}065t} \quad (t = 0, 1, 2, ...)$$

16.1. Determine a previsão do número de habitantes para o ano 2018, caso se adote o modelo N por um período de tempo mais alargado.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

16.2. A Joana é aluna da escola secundária desta localidade. Ao estudar os dados apresentados na tabela anterior, constatou que, tendo em conta apenas os valores de N correspondentes a $t = 0{,}5{,}10{,}15$ e 20, um modelo matemático que se ajusta bem a esses pontos é $y = a \times t + b$ (sendo y o número de habitantes e t o número de anos que decorrem a partir do início da contagem, em 1980).

Determine o valor aproximado do crescimento anual do número de habitantes da localidade, de acordo com o modelo apresentado pela Joana.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

16.3. Admita, agora, que o modelo $N(t) = 678{,}211 \times e^{0{,}065t}$ permite obter com maior aproximação o número N de habitantes daquela localidade para além do período em que ocorreu a recolha de dados.

Segundo o presidente da junta de freguesia de Pontes de Cima, quando o número de habitantes atingir 7000, será construída uma nova escola.

Determine o ano em que isso ocorre, recorrendo à representação gráfica.

Na sua resposta, deve:

- indicar, na folha de respostas, uma janela de visualização adequada à resolução do problema;
- apresentar a representação gráfica da função ou das funções utilizadas;
- assinalar o(s) ponto(s) relevante(s);
- concluir.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

17. Com o objetivo de rentabilizar as suas poupanças, a Carla pesquisou na Internet instituições financeiras da localidade de Bicas.

17.1. A instituição financeira POUPA oferece aos seus clientes uma solução de rentabilidade que permite fazer depósitos por um período alargado de tempo.

A tabela seguinte apresenta o capital no final de cada mês em duas contas, X e Y, dessa instituição, ao longo de 6 meses, com depósitos iniciais de 1500 euros em cada uma das contas, efetuados no mesmo dia.

	Final do 1.º mês	**Final do 2.º mês**	**Final do 3.º mês**	**Final do 4.º mês**	**Final do 5.º mês**	**Final do 6.º mês**
Conta X	1520	1540	1560	1580	1600	1620
Conta Y	1515	1530,15	1545,45	1560,91	1576,52	1592,28

A Carla afirma que:

«Se efetuar, no mesmo dia, depósitos iniciais de 1500 euros em cada uma das contas, X e Y, o capital na conta Y ultrapassa o capital na conta X entre o 56.º mês e o 57.º mês após os depósitos iniciais.»

Mostre que a Carla tem razão, considerando que as condições apresentadas pela tabela anterior se mantêm por um período alargado de tempo.

Na sua resposta, deve:

- indicar um modelo que se ajuste à evolução da conta X;
- indicar um modelo que se ajuste à evolução da conta Y;
- mostrar que o capital oferecido pela conta Y passa a ser superior ao capital oferecido pela conta X a partir de um certo mês, recorrendo à representação gráfica, numa janela de visualização adequada;
- concluir que a Carla tem razão.

17.2. A instituição financeira PAGABEM vende aplicações no fundo GANHAR+ com um grau de incerteza na obtenção de rendimento.

Admita que, em cada dia, o número N de aplicações feitas no fundo GANHAR+, em função do período de capitalização x, em meses, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$N(x) = \frac{30}{1 + 16 \times e^{-1,15x}} \qquad (x = 1,2,...)$$

Determine o número de aplicações feitas no fundo GANHAR+, num certo dia, por um período de capitalização igual a 10 meses, de acordo com o modelo apresentado.

Apresente o resultado arredondado às unidades.
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2013, 1.ª Fase

18. A associação Ajuda ao Próximo, da aldeia de Xisto, está a organizar uma recolha de sangue.

Na recolha, serão distribuídos folhetos informativos nos quais se lê:

«A recolha de sangue tem aumentado, sem quebras, desde 2006, mas ainda não é suficiente para as necessidades do país, pois, para que essas necessidades sejam asseguradas, é preciso recolher 250 000 unidades de sangue por ano.»

Em cada ano, o número de milhares de unidades de sangue recolhidas, A, em função do número de anos, t, que decorrem após o final de 2006, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$A(t) = 100 \ln(4 + 0,49t) \qquad (t = 0, 1, 2, ...)$$

18.1. Determine o número aproximado de milhares de unidades de sangue que serão recolhidas em 2018.

18.2. Determine o primeiro ano em que a recolha de sangue assegurará as necessidades do país.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2012, 2.ª Fase

19. Uma empresa de marketing analisa dados relativos às vendas mensais de dois produtos, telemóveis e computadores, de uma determinada marca, no mesmo período de tempo.

O número N de telemóveis vendidos dessa marca, em milhares, t meses após o início das vendas, é bem aproximado por $N(t) = 4{,}8 \times 3^{0{,}15t} \quad (t = 1, 2, 3, ...)$

Na tabela seguinte, apresenta-se o número V de computadores vendidos dessa marca, em milhares, t meses após o início das vendas.

t (em meses)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
V (em milhares)	0,541	2,532	13,163	14,204	15,105	16,236	16,257	16,288	16,290

19.1. Entre o quinto e o sexto mês após o início das vendas, o número N de telemóveis vendidos aumentou.

Determine o valor desse aumento. Apresente o resultado em milhares, com arredondamento às centésimas.
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

19.2. Um modelo que se ajusta bem à nuvem de pontos correspondente ao número V de computadores vendidos, em função de t, é da forma $V(t) = \dfrac{c}{1 + a \times e^{-bt}}$

Determine as constantes a, b e c, recorrendo à calculadora.

Apresente os valores de a, b e c, com arredondamento às centésimas.

19.3. Considere, agora, que o número V de computadores vendidos dessa marca, em milhares, t meses após o início das vendas, é bem aproximado por $V(t) = \dfrac{16}{1 + 2307 \times e^{-3t}} \quad (t = 1, 2, 3, ...)$

Justifique a veracidade ou a falsidade da afirmação seguinte, a partir da análise de representações gráficas dos modelos para o número N de telemóveis vendidos e para o número V de computadores vendidos, considerando o período de um ano após o início das vendas.

«Até ao final do segundo mês após o início das vendas, o número N de telemóveis vendidos é maior, porque, para esse período de tempo, a curva que o representa está acima da curva que representa o número V de computadores vendidos. Mas, no final do terceiro mês e a partir daí, o número V de computadores vendidos é maior, uma vez que as curvas se intersectam e a curva que representa o número V de computadores vendidos fica sempre acima da curva que representa o número N de telemóveis vendidos.»

Na sua resposta, deve:

- reproduzir, na folha de respostas, a representação gráfica visualizada na calculadora relativa ao modelo N;
- reproduzir, na folha de respostas, a representação gráfica visualizada na calculadora relativa ao modelo V;
- reproduzir, na folha de respostas, a janela de visualização utilizada;
- indicar se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando.

Exame – 2012, 1.ª Fase

20. O senhor Jerónimo e o senhor Manuel depositaram, cada um, a quantia de €25 000,00 em contas em duas instituições financeiras diferentes, A e B, respetivamente. Os depósitos evoluíram como se apresenta nas tabelas seguintes.

Evolução do depósito do senhor Jerónimo (instituição A)	A_n
A_0: Capital depositado no final de 2004	€25 000,00
A_1: Capital acumulado no final de 2005	€25 625,00
A_2: Capital acumulado no final de 2006	€26 265,63
A_3: Capital acumulado no final de 2007	€26 922,27
A_4: Capital acumulado no final de 2008	€27 595,32

Evolução do depósito do senhor Jerónimo (instituição B)	B_n
B_0: Capital depositado no final de 2004	€25 000,00
B_1: Capital acumulado no final de 2005	€25 700,00
B_2: Capital acumulado no final de 2006	€26 400,00
B_3: Capital acumulado no final de 2007	€27 100,00
B_4: Capital acumulado no final de 2008	€27 800,00

Em conversa com o senhor Manuel, o senhor Jerónimo afirmou que:

«Comparando as duas instituições financeiras, nas mesmas condições de evolução dos depósitos apresentadas nas tabelas anteriores, se nos primeiros anos a instituição B é a melhor escolha para obter o máximo de capital acumulado, a partir de certa altura, a instituição A torna-se mais vantajosa.»

Justifique a veracidade da afirmação anterior para um novo depósito de €25 000,00, numa nova conta, no final de 2010, a partir da representação gráfica dos modelos de evolução dos depósitos nas duas instituições financeiras, A e B.

Na sua resposta, deve:

- escrever a expressão que modela o depósito na instituição A;
- escrever a expressão que modela o depósito na instituição B;
- reproduzir, na folha de respostas, os gráficos visualizados na calculadora;
- reproduzir, na folha de respostas, a janela de visualização utilizada;
- indicar o ano a partir do qual a instituição A se torna mais vantajosa.

Exame – 2011, 2.ª Fase

21. Um economista estudou, durante 24 meses, o número de desempregados inscritos numa delegação do Instituto do Emprego e Formação Profissional (IEFP). Concluiu que o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, no início do estudo e no final de cada mês, t, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$P(t) = \frac{5000}{2 + 23e^{-0,8t}} \quad t = 0, 1, ..., 24$$

Considera-se $t = 0$ como o início do estudo. Assim, por exemplo, o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, no início do estudo, é 200, e o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, no final do quarto mês após o início do estudo, é 1702, pois $P(4) \approx 1702{,}1099$.

21.1. Determine, a partir do modelo P, ao fim de quantos meses após o início do estudo o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP é 2453.

21.2. Ao longo dos 24 meses em que decorreu o estudo, o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP não foi constante.

Num pequeno texto, analise a evolução do número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, com base na representação gráfica do modelo P.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir, na folha de respostas, o gráfico visualizado na calculadora;
- reproduzir, na folha de respostas, a janela de visualização utilizada;
- indicar o número máximo de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, nos 24 meses em que decorreu o estudo;
- apresentar a diferença entre os números de desempregados inscritos no início e no final do estudo;
- descrever a forma como evoluiu o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, nos 24 meses em que decorreu o estudo.

Exame – 2011, 1.ª Fase

22. Num Serviço de Atendimento à Gripe (SAG), o número aproximado de casos confirmados de infeção pelo vírus H1N1, no dia t do mês de Agosto de 2009, é dado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$A(t) = \frac{62{,}10}{1 + 25e^{-0{,}797t}}$$

No mesmo SAG, o número aproximado de casos confirmados de infeção pelo vírus H1N1, no dia t do mês de Setembro de 2009, é dado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$S(t) = 62{,}11 + \ln(1{,}5 + t)$$

Assim, por exemplo, o número aproximado, arredondado às unidades, de casos confirmados de infeção pelo vírus H1N1, no dia 3 de Agosto de 2009, é 19, pois $A(3) \approx 18{,}88426$, e, no dia 4 de Setembro de 2009, é 64, pois $S(4) \approx 63{,}81475$.

Nos três itens seguintes, pode recorrer à calculadora. Sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.). Sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto.

22.1. Determine o número aproximado, arredondado às unidades, de casos confirmados de infeção pelo vírus H1N1, no dia 18 de Setembro, utilizando o modelo S.

22.2. A partir do modelo A, é possível afirmar que, num determinado dia do mês de Agosto, o número aproximado, com arredondamento às unidades, de casos confirmados de infeção pelo vírus H1N1 é 51.

Determine esse dia.

22.3. No mês de Agosto e no mês de Setembro, o número aproximado de casos confirmados de infeção pelo vírus H1N1, arredondado às unidades, apresenta-se seguindo modelos matemáticos diferentes.

Num pequeno texto, analise as representações gráficas dos modelos A e S.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir os gráficos e descrever a forma como evoluiu o número aproximado de casos confirmados de infeção pelo vírus H1N1, em cada um dos meses referidos;
- apresentar as diferenças entre o número aproximado, arredondado às unidades, de casos confirmados de infeção pelo vírus H1N1 no início e no final de Agosto, e no início e no final de Setembro;
- comparar os resultados obtidos.

Exame – 2010, 1.ª Fase

23. A partir dos dados, fornecidos pelo Instituto Nacional de Estatística (INE), relativos aos anos de 2000 a 2007, a empresa MSO obteve um modelo matemático que permite descrever, em milhares e em função de t, o número de residentes em Portugal:

$$P(t) = \frac{10728{,}45}{1 + 0{,}05 \times e^{-0{,}12t}} \ , \ \ t \geq 0$$

Considere que t é medido em anos e que $t = 0$ corresponde ao final do ano 2000.

Calcule em quantos milhares de indivíduos aumentou o número de residentes em Portugal, entre o final do ano 2000 e o final do ano 2007, segundo o modelo apresentado.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

Exame – 2009, 2.ª Fase

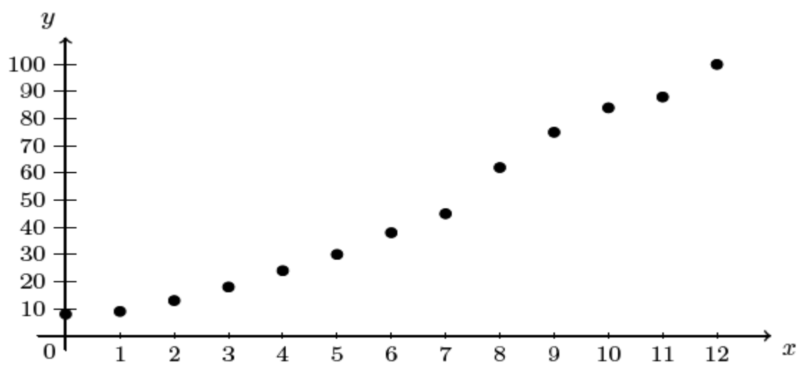
24. Na atualidade, há uma crescente preocupação com a preservação da natureza, nomeadamente, quanto à necessidade de proteger espécies que se encontram em vias de extinção.

Considere que uma certa espécie animal se encontrava em vias de extinção. Para a proteger, tomaram-se medidas protecionistas, designadamente, a criação de uma área protegida, no seu habitat natural.

Admita que, no início, apenas existiam 8 animais da espécie nessa área. A tabela seguinte traduz a contagem anual do número de animais nela existentes.

Anos decorridos desde a criação da área protegida (x)	**Número de animais existentes na área protegida** (y)
0	8
1	9
2	13
3	18
4	24
5	30
6	38
7	45
8	62
9	75
10	84
11	88
12	100

O gráfico seguinte representa os dados da tabela, através de uma nuvem de pontos.



24.1. Um modelo alternativo ao modelo de regressão linear, que podemos ajustar à nuvem de pontos apresentada, é o modelo logístico. No caso concreto, o recurso à calculadora permite obter o modelo logístico de equação

$$y = \frac{125{,}445}{1 + 16{,}351 \times e^{-0{,}355x}}$$

De acordo com este modelo, estime o número de animais existentes, na área protegida, 20 anos após a criação da mesma.

Apresente o resultado arredondado às unidades. Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, utilize três casas decimais.

24.2. As grandes áreas territoriais ocupadas pela espécie e os recursos alimentares disponíveis são alguns dos fatores que condicionam o número de animais na área protegida.

Suponha que se previa que esta área viria a atingir a sua capacidade máxima, quanto à população de animais desta espécie, aproximadamente 25 anos após a sua criação.

Num pequeno texto, indique, justificando, de entre o modelo de regressão linear $y = 8{,}2x - 3{,}5$ e o modelo logístico (apresentado no item anterior), qual é o que interpreta a situação descrita para o primeiro meio século de existência da área protegida.

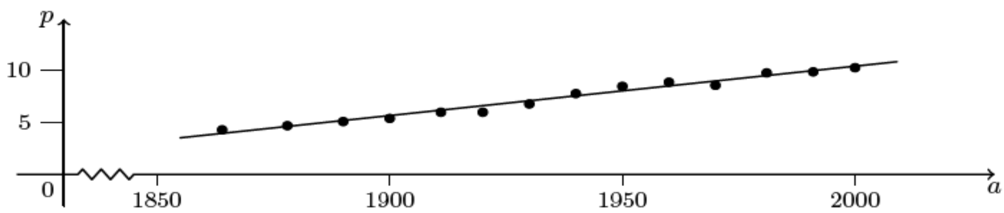
No seu texto deve, obrigatoriamente, referir duas razões distintas: uma que fundamente a sua opção quanto à eliminação de um dos modelos e outra que apoie a sua escolha do outro modelo.

25. Na tabela seguinte, estão alguns dados sobre a população residente em Portugal, desde 1864 até ao final do século XX.

Ano (a)	**População, em milhões** (p)
1864	4,3
1878	4,7
1890	5,1
1900	5,4
1911	6,0
1920	6,0
1930	6,8
1940	7,8
1950	8,5
1960	8,9
1970	8,6
1981	9,8
1991	9,9
2000	10,3

Na figura abaixo está representado o diagrama de dispersão relativo aos dados apresentados na tabela, assim como a respetiva reta de regressão, cuja equação é

$$p = 0{,}0477a - 84{,}95$$



Num documento publicado pelo INE (Instituto Nacional de Estatística), em 12 de Junho de 2003, intitulado «Projecções de população Residente em Portugal 2000 2050», escreve-se:

> *«As projeções de População Residente em Portugal, no horizonte 2000-2050, revelam um envelhecimento continuado da população, consequência do previsível aumento de esperança de vida, bem como da manutenção dos níveis de fecundidade abaixo do limiar de substituição de gerações. A possibilidade de se verificarem saldos migratórios positivos poderá atenuar esta tendência, mas não a evitará.»*

Mais à frente, é afirmado que, no cenário mais plausível,

> *«(...) Portugal poderá esperar ainda um crescimento dos seus efetivos populacionais para cerca de 10 626 milhares em 2010, ano a partir do qual se verifica a inversão desta tendência, decrescendo até aos 9302 milhares de indivíduos, em 2050 (...)»*

Numa pequena composição, exponha alguns argumentos que permitam justificar a inadequação do modelo linear apresentado (reta de regressão) para fazer projeções sobre a evolução da população residente em Portugal, relativamente as próximas décadas, admitindo a fiabilidade das projeções do INE.

Na sua composição, deve:

- indicar, de acordo com o modelo linear apresentado, os efetivos populacionais previstos para os anos de 2010 e de 2050 e compará-los com as projeções do INE para esses anos;
- comparar o crescimento do modelo linear apresentado com a evolução prevista para a população portuguesa, nas projeções do INE, para a primeira metade do século XXI (crescimento até 2010 e decrescimento a partir desse ano);
- apresentar razões de ordem social que desaconselham a utilização do modelo linear para fazer projeções, para as próximas décadas, sobre a evolução da população residente em Portugal.

jose.santos@aemrt.pt

joseladeira@gmail.com