

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA
Teoria de Grafos - Exames 2006 a 2018
11º ano – MACS

1. Admita que, no distrito de Castelo Branco, se pretende adotar uma nova tecnologia na iluminação de estradas. Na tabela seguinte, apresenta-se a extensão, em quilómetros, das estradas onde se poderá adotar esta tecnologia.

	Benquerença (B)	Louriçal do Campo (L)	Oleiros(O)	Torrozelo (T)
Alcafozes(A)	60	51	124	167
Benquerença (B)	—	39	68	173
Louriçal do Campo (L)	—	—	100	144
Oleiros (O)	—	—	—	112

Não sendo viável, por razões económicas, adotar esta tecnologia em todas as estradas, decidiu-se, numa fase inicial, proceder à sua adoção somente em algumas delas.

Para a seleção das estradas recorreu-se ao algoritmo seguinte.

- Constrói-se um grafo, cujos vértices representam as localidades, selecionando-se, sucessivamente, as menores extensões de estradas entre elas, tendo-se em conta que:
 - se a aresta a que corresponde a extensão selecionada levar à formação de um circuito, essa aresta não deve ser considerada;
 - caso contrário, essa aresta deve ser considerada.
- O algoritmo termina quando, no grafo, o número de arestas é igual ao número de vértices menos um.

Determine, nestas condições, o número de quilómetros de estrada que o projeto de iluminação deve contemplar na sua fase inicial. Na sua resposta, apresente o grafo que resulta da aplicação do algoritmo, indicando o peso de cada aresta.

2. Na preparação da sua digressão pelas ilhas do arquipélago dos Açores, a companhia de teatro optou por apresentar a peça somente nas ilhas com, pelo menos, 6000 habitantes.

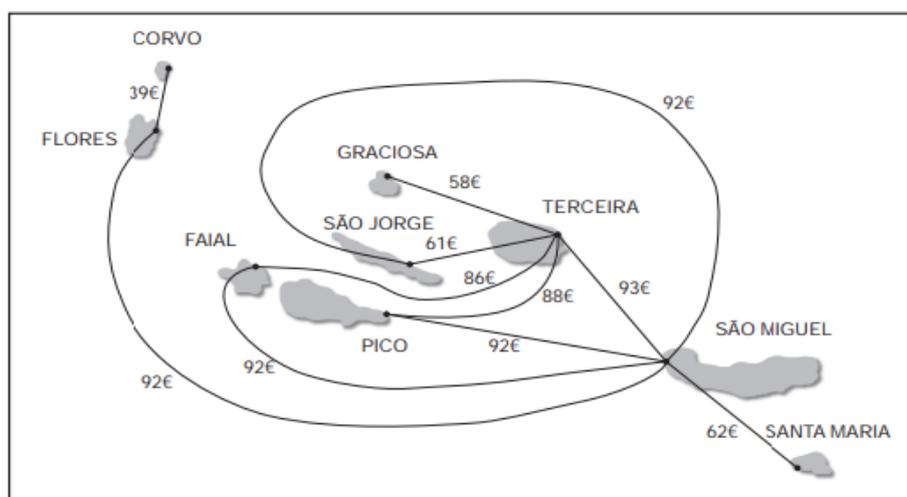
Na tabela seguinte, está registado o número de habitantes em cada uma das ilhas.

Ilha	N.º de habitantes
Santa Maria	5547
São Miguel	137 699
Terceira	56 062
Graciosa	4393
São Jorge	8998
Pico	14 144
Faial	15 038
Flores	3791
Corvo	430

Fonte: Censos 2011

De modo a minimizar o custo das deslocações aéreas, foram analisados os preços das ligações aéreas diretas, existentes entre as diferentes ilhas, a que a companhia de teatro poderá recorrer.

Na figura seguinte, estão indicadas essas ligações aéreas diretas entre as ilhas do arquipélago dos Açores e o respetivo custo, por pessoa.



A companhia de teatro optou por começar a digressão na ilha do Faial, pretendendo terminá-la noutra ilha.

De modo a minimizar o custo das viagens, aplicou o método que a seguir se descreve.

- Seleciona-se a ilha seguinte, tendo em conta que:
 - deverá corresponder à viagem de preço mais baixo;
 - se houver duas ilhas para as quais seja possível viajar pelo mesmo preço, a seleção é aleatória.
- Proceda-se como foi indicado no ponto anterior, não se repetindo nenhuma ilha e terminando depois de serem visitadas todas as ilhas incluídas na digressão.

Determine o custo mínimo em deslocações aéreas de cada elemento da companhia de teatro na sua digressão pelo arquipélago dos Açores, respeitando as condições definidas.

Na sua resposta, apresente:

- um grafo ponderado que resulte da aplicação do método descrito;
- a ordem pela qual a companhia de teatro visitará as ilhas.

3. Mariana decidiu viajar até Praga e, a partir daí, visitar outras capitais europeias, regressando a essa primeira cidade no final da visita.

As capitais que pretende visitar, além de Praga, são Berlim, Bratislava, Varsóvia e Viena.

Para planejar as suas férias, Mariana utilizou a tabela seguinte, que apresenta as distâncias, em quilómetros, entre as referidas capitais.

	Bratislava	Praga	Varsóvia	Viena
Berlim	677	349	572	640
Bratislava	—	328	673	80
Praga	—	—	681	305
Varsóvia	—	—	—	689

Com base na informação apresentada e num mapa da Europa semelhante ao que se apresenta na figura seguinte, Mariana construiu um grafo em que duas capitais são interligadas, desde que os países a que pertencem façam fronteira entre si.



O seu percurso será definido a partir do grafo construído e atendendo ao seguinte algoritmo:

- escolher a aresta do grafo com menor peso, qualquer que ela seja;
- escolher, sucessivamente, as arestas de menor peso, garantindo que três arestas do percurso que está a ser definido não se encontram num mesmo vértice e não permitindo que se fechem percursos sem que todos os vértices sejam incluídos.

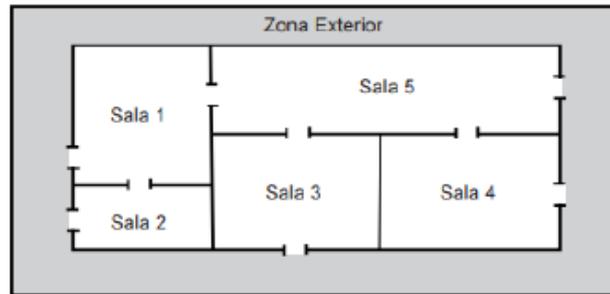
Apresente um percurso possível, definido por Mariana, com início e fim em Praga.

Na sua resposta, apresente:

- um grafo semelhante ao que Mariana construiu;
- a ordenação das arestas seleccionadas pelo algoritmo descrito;
- um percurso que Mariana poderá ter definido.

4. Na figura seguinte, está representada a planta do recinto de um dos cinemas onde decorre o CineJov.

O recinto é composto por cinco salas, numeradas de 1 a 5, e por uma Zona Exterior, num total de seis espaços. Todas as salas têm um único acesso à Zona Exterior e todas têm comunicação com, pelo menos, uma outra sala, como se observa na figura seguinte.



No final do dia, um funcionário faz uma inspeção completa ao recinto, respeitando as seguintes condições:

- passa por todas as portas;
- começa e termina na Sala 1.

Para realizar esta inspeção, o funcionário pode sair das diferentes áreas do recinto e nelas voltar a entrar as vezes que considerar necessárias. Com base na sua experiência, afirma que é impossível fazer a inspeção completa ao recinto, passando uma única vez por cada uma das portas.

Justifique que o funcionário tem razão e identifique a porta pela qual terá necessariamente de passar duas vezes.

Na sua resposta, apresente um grafo que modele a situação descrita.

Exame – 2017, Ép. especial

5. A associação de estudantes está a preparar um pedipaper que engloba seis postos de controlo, designados por C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 e C_6 .

Na tabela seguinte, estão indicadas as distâncias, em metros, entre diferentes postos de controlo.

	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
C_1	160	–	–	302	180
C_2	–	253	–	350	270
C_3	–	–	286	340	267
C_4	–	–	–	–	294

A associação de estudantes decidiu que o pedipaper se iniciaria no posto de controlo C_5 e terminaria num outro posto de controlo.

Além disso, para definir o percurso, a associação de estudantes optou por utilizar o método seguinte.

- Seleciona-se o posto de controlo seguinte, tendo em conta que:
 - deve ser o mais próximo possível;
 - se houver dois postos à mesma distância, a seleção é aleatória.
- Proceda-se como foi indicado no ponto anterior, não se repetindo nenhum posto de controlo, e terminando depois de serem visitados todos os postos de controlo.

Determine o comprimento do percurso, respeitando as condições definidas pela associação de estudantes.

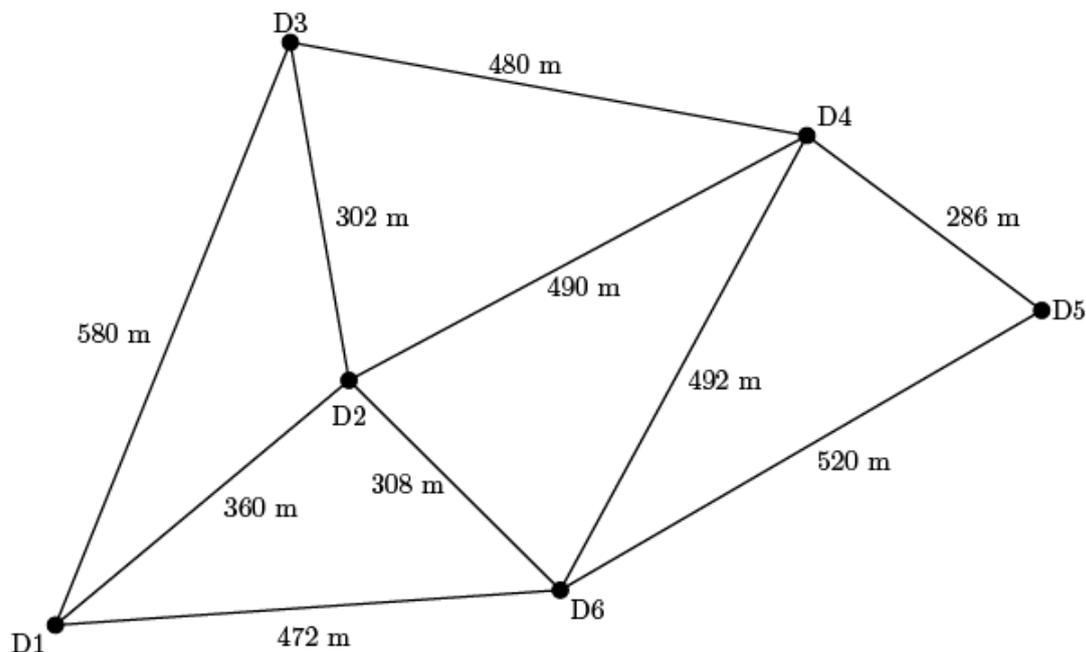
Na sua resposta, apresente:

- um grafo ponderado que modele a situação descrita na tabela anterior;
- a ordem de visita dos postos de controlo.

Exame – 2017, 2ª Fase

6. As seis diversões mais procuradas da zona *Studiospeed* estão representadas na figura seguinte pelas letras D1, D2, D3, D4, D5 e D6.

As linhas representam as ligações existentes entre essas diversões. O comprimento de cada ligação está indicado junto da linha que a representa.



Uma empresa de eletricidade pretende renovar a rede de cabos elétricos, aproveitando algumas destas ligações. De modo a minimizar a quantidade de cabo utilizado, aplica-se o método que a seguir se descreve.

- Escolhe-se, ao acaso, uma das seis diversões e, de entre as ligações a essa diversão, seleciona-se a ligação de menor comprimento.
- Seleciona-se a ligação de menor comprimento de entre as ligações a qualquer uma das duas diversões escolhidas para uma diversão ainda não selecionada.
- Seleciona-se a ligação de menor comprimento de entre as ligações a qualquer uma das diversões escolhidas para uma diversão ainda não selecionada.
- Repete-se o ponto anterior até todas as diversões terem sido selecionadas.

Determine a quantidade mínima, em metros, de cabo elétrico que é necessário instalar para que as seis diversões recebam energia elétrica.

Na sua resposta, apresente:

- um grafo que resulte da aplicação do método descrito e que permita identificar as ligações utilizadas;
- a quantidade mínima, em metros, de cabo elétrico que é necessário instalar.

7. As instalações do TPT estão distribuídas por cinco edifícios: E1, E2, E3, E4 e E5.

As distâncias mínimas, em metros, entre cada dois edifícios estão registadas na tabela seguinte.

	E2	E3	E4	E5
E1	166	206	125	287
E2	—	151	264	169
E3	—	—	207	109
E4	—	—	—	309

No final de cada dia, um estafeta recolhe o correio em cada um dos edifícios. De modo a tornar mais eficiente o seu trabalho, começou por ordenar, de forma crescente, as distâncias registadas na tabela anterior. De seguida, recorrendo a um grafo, construiu um percurso fechado que ligava os cinco edifícios. Para tal, adotou o seguinte método.

- Representou a primeira aresta do grafo correspondente à menor das distâncias entre os edifícios.
- Representou as restantes arestas, selecionando sucessivamente as menores distâncias, garantindo que três delas não se encontrassem num mesmo vértice e que não se fechassem percursos sem que todos os vértices estivessem incluídos.

Apresente um possível percurso final definido pelo estafeta, com início e fim no edifício principal (E3).

Na sua resposta, apresente:

- a ordenação, de forma crescente, das distâncias registadas na tabela anterior;
- um grafo semelhante ao que terá sido construído pelo estafeta.

Exame – 2016, Ép. especial

8. No Encontro Desportivo Internacional, existem atletas que estão inscritos em mais do que uma modalidade. Para que todos consigam realizar um treino de adaptação ao estádio onde se irão realizar as provas, vai ser criado um horário com blocos de utilização das instalações. De cada bloco deverão fazer parte as modalidades nas quais não haja atletas inscritos simultaneamente.

A constituição de cada bloco será definida considerando os dados da tabela seguinte, na qual o símbolo \times indica as modalidades que podem ser inseridas num mesmo bloco.

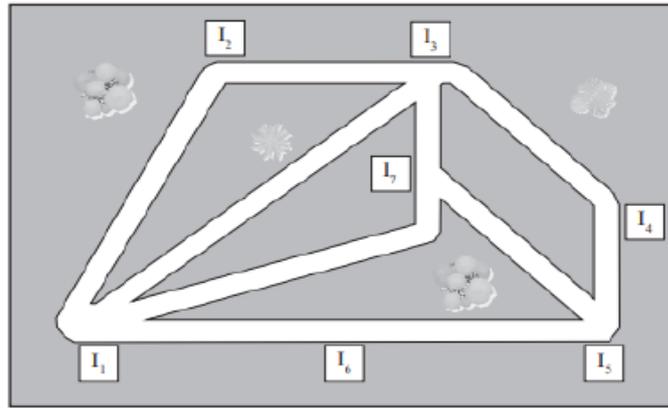
Modalidades	A	B	C	D	E	F	G	H
A			\times	\times		\times		
B							\times	
C	\times					\times		
D	\times							\times
E								
F	\times		\times					
G		\times						
H				\times				

Determine, tendo em conta as condições dadas, o número mínimo de blocos que será necessário constituir, de modo que todos os atletas possam realizar o treino de adaptação em todas as modalidades em que estão inscritos. Na sua resposta

- apresente um grafo que modele a situação;
- identifique as modalidades que constituem cada um dos blocos.

Exame – 2016, 2ª Fase

9. Na figura seguinte, apresenta-se um mapa do recinto do MaréFest no qual estão representadas as infraestruturas $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ e I_7 , ligadas entre si através de troços pedonais.



Considera-se troço pedonal a ligação entre duas infraestruturas adjacentes, isto é, o percurso que pode ser usado para ir de uma dessas infraestruturas à outra sem passar por mais nenhuma.

Um vigilante do recinto pretende vistoriar as condições de segurança de todos os troços pedonais, iniciando e terminando a sua vistoria junto da mesma infraestrutura. Observando o mapa, conclui que não será possível, nestas condições, percorrer todos os troços pedonais sem repetir nenhum.

Apresente uma sugestão de um único troço pedonal a repetir pelo vigilante, que lhe permita percorrer todos os troços, iniciando e terminando a vistoria junto da mesma infraestrutura, sendo o número de troços a percorrer o menor possível.

Na sua resposta, apresente:

- um grafo que modele o mapa do recinto com as infraestruturas, de I_1 a I_7 , e com os troços pedonais.
- uma justificação da veracidade da conclusão do vigilante.

Exame – 2016, 1ª Fase

10. A companhia de aviação ASA5 opera nos aeroportos nacionais.

O diretor de operações de terra da companhia de aviação ASA5 fez uma lista das tarefas efetuadas entre a aterragem de um certo avião e uma nova descolagem.

A tabela seguinte apresenta o tempo necessário para concretizar cada tarefa (Duração) e, quando existem, as tarefas que devem ser previamente concluídas (Tarefa(s) precedente(s)).

Tarefa	Duração (em minutos)	Tarefa(s) precedente(s)
Carregamento de bagagem (CB)	16	Descarga de bagagem (DB)
Descarga de bagagem (DB)	2	—
Desembarque de passageiros (DP)	14	—
Embarque de passageiros (EP)	20	Desembarque de passageiros (DP) e Descarga de bagagem (DB)
Limpeza da cabine (LC)	12	Desembarque de passageiros (DP)
Reabastecimento alimentar (RA)	4	Limpeza da cabine (LC)

Há tarefas que se podem realizar em simultâneo, por exemplo, enquanto decorre o Desembarque de passageiros (DP), pode estar a realizar-se a Descarga de bagagem (DB).

Determine o tempo mínimo, em minutos, necessário para realizar todas as tarefas que antecedem uma nova descolagem (D) desse avião da ASA5, nas condições previstas na tabela anterior.

Na sua resposta, apresente:

- um grafo que represente a situação, incluindo o significado dos elementos (arestas e vértices) que o constituem;
- as possíveis seqüências de concretização das tarefas e a respetiva duração.

Exame – 2015, Ép. especial

11. O Sr. Pereira é motorista da empresa PTM.

Num certo dia, o Sr. Pereira tem de passar nas cidades A, B, D e E, não necessariamente por esta ordem, partindo da sede da empresa, localizada na cidade C, e regressando ao local de partida. Nesse percurso, não pode passar pela mesma cidade mais do que uma vez.

Na tabela seguinte, estão assinaladas com o símbolo ✓ as ligações rodoviárias existentes entre as cidades. O símbolo X significa que não existe ligação rodoviária entre as cidades.

	A	B	C	D	E
A		✓	X	✓	✓
B			✓	X	✓
C				✓	X
D					✓
E					

O Sr. Pereira, ao organizar o percurso, considerou duas possibilidades:

alternativa 1: passar pela cidade A e só depois pela cidade E.

alternativa 2: passar pela cidade D antes de passar pela cidade B.

O Sr. Pereira afirma que a alternativa 1 permite definir mais percursos do que a alternativa 2.

O Sr. Pereira tem razão? Justifique, apresentando um grafo que modele a situação descrita, e identifique todos os percursos possíveis para cada uma das alternativas.

Exame – 2015, 2ª Fase

12. Uma agência de viagens, sediada no concelho de Avelares, organiza e vende, através da Internet, percursos de autocarro entre várias cidades europeias.

Para organizar um percurso que passe por Amesterdão, Berlim, Munique, Paris e Viena, um funcionário da agência começou por registar, na tabela seguinte, as distâncias mínimas, em quilómetros, entre cada duas cidades.

	Amesterdão	Berlim	Munique	Paris	Viena
Amesterdão		663	825	501	1148
Berlim			604	1055	674
Munique				828	435
Paris					1236
Viena					

De forma a minimizar os custos operacionais, o funcionário definiu, através de um grafo, um percurso fechado que liga as cinco cidades, tendo adotado o seguinte procedimento:

- escolher a aresta do grafo com menos peso, qualquer que ela seja;
- escolher, sucessivamente, as arestas de menos peso, garantindo que três arestas do percurso que está a ser definido não se encontram num mesmo vértice e não permitindo que se fechem percursos sem que todos os vértices sejam incluídos;
- apresentar um percurso pretendido conforme o vértice de partida escolhido.

Apresente um percurso possível, com início e fim em Amesterdão, de acordo com o procedimento utilizado pelo funcionário da agência.

Na sua resposta, apresente:

- o grafo usado, indicando os pesos de cada aresta;
- um percurso que o funcionário poderá ter definido.

Exame – 2015, 1ª Fase

13. O Francisco reside na vivenda A, em Penha Alta, e dá apoio domiciliário a residentes em quatro vivendas, B, C, D e E.

Na tabela seguinte, estão registadas as distâncias mínimas, em metros, entre as cinco vivendas: A, B, C, D e E.

	B	C	D	E
A	100	110	100	150
B	—	100	190	110
C	—	—	180	140
D	—	—	—	110

De modo a determinar a distância mínima a percorrer na visita aos residentes a quem dá apoio domiciliário, o Francisco aplica o algoritmo seguinte.

- Define-se A como ponto de partida.
- Seleciona-se a vivenda mais próxima e estabelece-se a ligação entre as duas tendo em conta que, se houver duas vivendas à mesma distância, a escolha é aleatória. Essa ligação é o caminho a percorrer entre as duas vivendas.
- Procede-se como foi indicado no ponto anterior, não se repetindo nenhuma vivenda e regressando-se ao ponto de partida depois de selecionar todas as vivendas.

Mostre, aplicando o algoritmo, que a escolha aleatória, quando existem duas vivendas à mesma distância, pode levar o Francisco a percorrer uma distância maior do que seria necessário para visitar os residentes a quem dá apoio domiciliário.

Exame – 2014, 2ª Fase

14. O conselho diretivo de uma faculdade pretende instalar cabo de fibra ótica a ligar sete pavilhões: A1, A2, A3, A4, A5, A6 e A7.

Na tabela seguinte, encontram-se registadas algumas distâncias mínimas, em metros, entre os pavilhões.

	A2	A3	A4	A5	A6	A7
A1	500	—	—	—	730	350
A2	—	190	—	200	340	—
A3	—	—	150	100	—	—
A4	—	—	—	220	240	—
A5	—	—	—	—	220	—
A6	—	—	—	—	—	650

A instalação de cabo de fibra ótica custa 3,40 euros por metro.

De modo a minimizar o custo da instalação do cabo de fibra ótica, a ligação entre os pavilhões foi feita recorrendo-se ao algoritmo seguinte.

- Ordenam-se as distâncias registadas na tabela anterior, pela ordem crescente da sua grandeza, indicando-se, para cada distância, o par de pavilhões que lhe corresponde.
- Constrói-se um grafo, cujos vértices representam os pavilhões, selecionando-se, sucessivamente, as distâncias menores e tendo-se em conta que, se a aresta a que corresponde a distância selecionada não levar à formação de um circuito, essa aresta deve ser considerada; caso contrário, essa aresta não deve ser considerada.
- O algoritmo termina quando, no grafo, o número de arestas é igual ao número de vértices menos um.

Determine, nestas condições, o custo mínimo da instalação do cabo de fibra ótica.

Na sua resposta, deve:

- aplicar o algoritmo;
- indicar o número mínimo de metros de cabo de fibra ótica necessários;
- calcular o custo mínimo da instalação do cabo de fibra ótica.

Exame – 2014, 1ª Fase

15. O Luís pretende visitar quatro cidades: Braga, Porto, Lamego e Viseu.

A viagem inicia-se e termina em Amarante, não importando a ordem pela qual as cidades são visitadas, pois a partir de cada uma delas é possível ir diretamente a qualquer uma das outras.

Na tabela seguinte, estão indicadas as distâncias, em quilómetros, entre as cidades referidas.

	Braga	Porto	Lamego	Viseu
Amarante	74	61	71	107
Braga	—	70	117	130
Porto	—	—	106	75
Lamego	—	—	—	62

O Luís pretende aplicar uma das opções seguintes para determinar um percurso com início e fim em Amarante e no qual nenhuma cidade seja repetida.

Opção 1
Passo 1: define-se a cidade de Amarante como ponto de partida.
Passo 2: seleciona-se a cidade mais próxima, tendo em conta que, se houver duas cidades à mesma distância, a seleção é aleatória.
Passo 3 e passos seguintes: procede-se como foi indicado no passo anterior, não se repetindo nenhuma cidade, e regressando-se ao ponto de partida depois de visitadas todas as cidades.

Opção 2
Passo 1: ordenam-se as distâncias entre cada par de cidades por ordem crescente, indicando-se, para cada valor, o par de cidades que lhe corresponde.
Passo 2: selecionam-se, sucessivamente, as distâncias menores, tendo em conta que: <ul style="list-style-type: none">• uma cidade nunca poderá aparecer três vezes;• nunca se fecha um circuito enquanto houver cidades por visitar.
Passo 3: ordena-se a solução de acordo com a cidade de partida (Amarante).

O Luís considera que a opção 1 dá um percurso cujo número total de quilómetros é inferior ao dado pela opção 2.

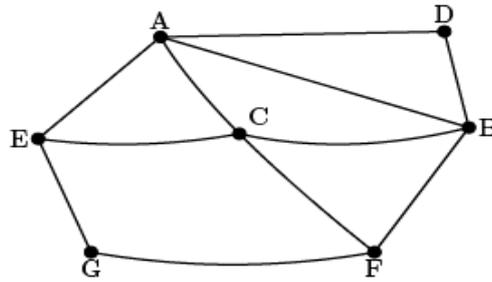
Verifique se o Luís tem, ou não, razão.

Na sua resposta, deve:

- apresentar um grafo ponderado que represente a situação;
- aplicar cada uma das opções;
- indicar o número total de quilómetros percorridos em cada uma das duas opções;
- apresentar uma conclusão.

16. Um grupo de professores de Educação Física do agrupamento de escolas de Pontes de Cima pretende promover hábitos de vida saudáveis. Para a concretização desse projeto, os professores decidiram organizar uma caminhada no jardim municipal.

Na figura seguinte, encontra-se um grafo que serve de modelo ao percurso dessa caminhada.



No grafo, os vértices A, B, C, D, E, F e G representam os postos de visita obrigatória. Cada aresta representa um trajeto direto que liga dois desses postos.

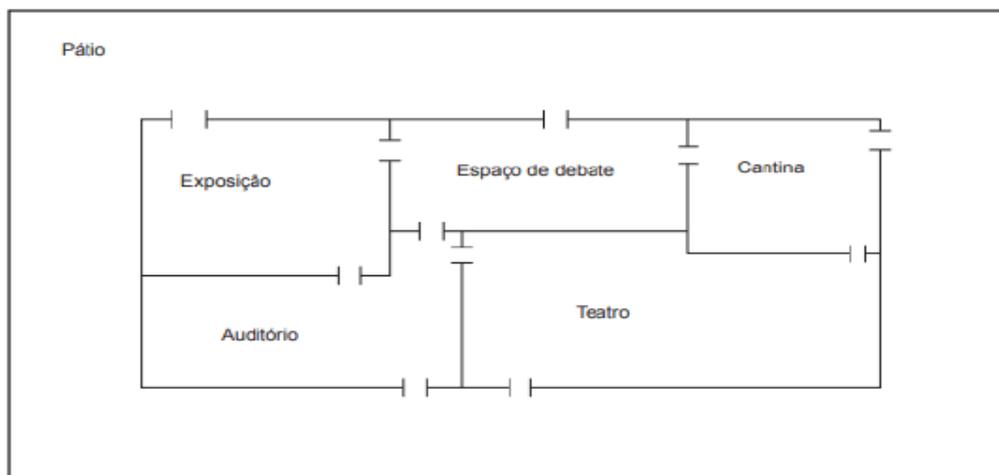
Mostre que não é possível organizar um percurso para essa caminhada que cumpra, em simultâneo, as seguintes condições:

- passar por todos os postos representados no grafo da figura anterior, começando e terminando no posto A;
- percorrer uma só vez cada trajeto direto representado;
- percorrer todos os trajetos diretos representados.

Exame – 2013, 2ª Fase

17. Um arquiteto organizou o recinto destinado à realização de uma conferência internacional de arte (figura seguinte). O recinto tem os seguintes espaços: auditório, cantina, espaço de debate, exposição, pátio e teatro.

Todos os espaços têm, pelo menos, uma porta.



Ao analisar o esquema desenhado pelo arquiteto (figura anterior), uma funcionária comentou que, caso se mantivesse o número de portas, não conseguiria efetuar uma ronda ao recinto começando e terminando essa ronda na cantina, percorrendo todas as portas e passando por cada porta uma única vez.

A funcionária pretendeu, então, encontrar uma solução que lhe permitisse efetuar essa ronda percorrendo todas as portas e passando o menor número de vezes possível por cada porta.

Determine, justificando, uma solução que permita satisfazer a pretensão da funcionária.

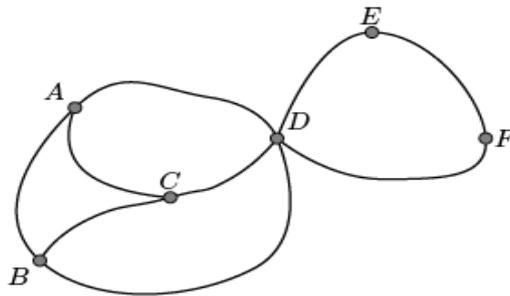
Na sua resposta, deve:

- apresentar um grafo que modele a situação descrita;
- apresentar o significado dos elementos, arestas e vértices, que constituem o grafo;
- apresentar, justificando, uma solução.

Exame – 2013, 1ª Fase

18. Na aldeia de Xisto, vai realizar-se uma minimaratona.

Na figura seguinte, encontra-se o grafo que serve de modelo ao percurso da minimaratona.



No grafo, o vértice B representa o ponto de partida e de chegada, e os vértices A , C , D , E e F representam postos de distribuição de água.

Cada aresta representa um trajeto direto que liga dois postos de distribuição de água ou um posto de distribuição de água ao ponto de partida.

Os organizadores da corrida decidiram que todos os participantes tinham de passar por todos os trajetos diretos, sem repetirem nenhum.

O Carlos, um dos organizadores da corrida, observou o grafo e afirmou:

«É impossível passar por todos os trajetos diretos sem repetir nenhum. Para garantir que os participantes passam por todos os trajetos diretos, é necessário admitir duplicações de trajetos diretos já existentes.»

Justifique a veracidade da afirmação, e apresente no grafo um par de duplicações de trajetos diretos que permita garantir que os participantes passam por todos os trajetos diretos.

Reproduza o grafo modificado na sua folha de respostas.

Exame – 2012, 2ª Fase

19. A junta de freguesia de Freixo promoveu atividades desportivas entre os habitantes da vila de Freixo (F) e das aldeias A, B, C e D.

Na tabela seguinte, estão indicadas as distâncias, em quilómetros, entre A, B, C, D e F.

	B	C	D	F
A	28	38	30	18
B	—	36	32	26
C	—	—	48	20
D	—	—	—	24

Para transportar os habitantes, o presidente da junta de freguesia pretende encontrar um percurso que ligue todos os locais referidos. De modo a encontrar esse percurso, o presidente da junta apoiou-se nos dados da tabela anterior e no algoritmo seguinte.

Algoritmo

Passo 1: define-se a vila de Freixo como ponto de partida.

Passo 2: seleciona-se a aldeia mais próxima, tendo em conta que, se houver duas aldeias à mesma distância, a seleção é aleatória.

Passo 3 e passos seguintes: procede-se como foi indicado no passo anterior, não se repetindo nenhuma aldeia, e regressando-se ao ponto de partida depois de visitadas todas as aldeias.

Uma semana antes do início do serviço de transporte, é feito o anúncio seguinte.

«Se a estrada que liga a aldeia A à aldeia B estiver intransitável, é necessário percorrer mais quilómetros para utilizar um percurso alternativo.»

Justifique a veracidade ou a falsidade da informação, aplicando o algoritmo acima descrito aos dois casos:

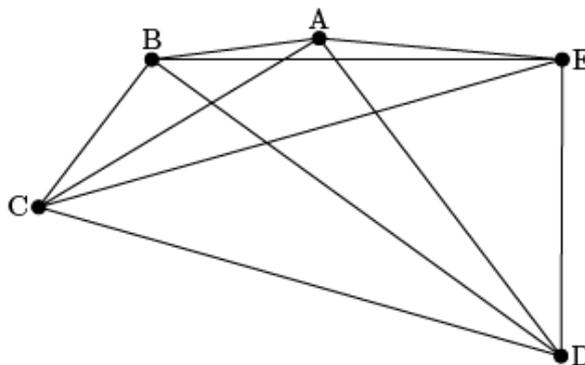
- a estrada que liga A a B está transitável;
- a estrada que liga A a B está intransitável.

Exame – 2012, 1ª Fase

20. O senhor Jerónimo e o senhor Manuel depositaram, cada um, a quantia de €25 000,00 em contas em duas instituições financeiras.

O senhor Manuel ofereceu o capital acumulado no final de 2008 ao seu filho Miguel. Esse dinheiro foi investido pelo Miguel na sua empresa de distribuição de congelados.

Na figura seguinte, encontra-se o grafo que serve de modelo à volta utilizada pelo camião da empresa do Miguel, para efetuar a distribuição de congelados pelos supermercados que fornece. No grafo, o vértice A representa a sede da empresa do Miguel, e os vértices B, C, D e E representam os supermercados. Cada aresta representa um trajeto direto que liga dois supermercados, ou que liga um supermercado à sede da empresa do Miguel.



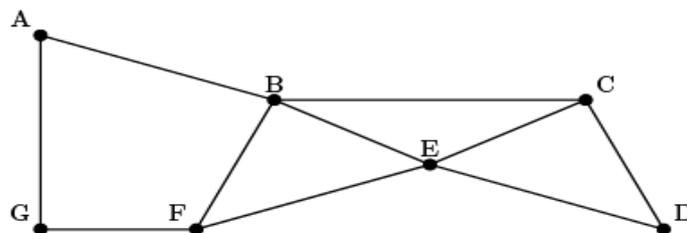
O Miguel elaborou uma lista com as voltas de distribuição, que começam e terminam na sede da sua empresa, visitando todos os supermercados, e não repetindo nenhum deles. Para o Miguel, o que importa é o número de quilómetros percorridos, por isso, é indiferente, por exemplo, percorrer ABCDEA ou percorrer AEDCBA.

- 20.1. Num determinado dia, o camião deve visitar, em primeiro lugar, o supermercado representado por D, visitando depois os restantes, e não repetindo nenhum deles, antes de regressar à sede da empresa.

Identifique todas as voltas possíveis para esse dia.

- 20.2. Mostre que o grafo da figura anterior admite, exatamente, doze voltas distintas, que podem fazer parte da lista do Miguel.

21. Na figura seguinte, encontra-se o grafo que serve de modelo aos percursos utilizados pela RecSol, uma empresa de recolha de resíduos sólidos. Cada vértice do grafo representa um local de recolha de resíduos sólidos, e cada aresta representa uma estrada que liga dois desses locais.



Na tabela seguinte, encontram-se registadas as distâncias mínimas, em metros, entre cada dois locais de recolha de resíduos sólidos, representados pelos vértices do grafo da figura anterior, quando se percorrem as estradas representadas pelas arestas do mesmo grafo.

	A	B	C	D	E	F	G
A	—	1253	—	—	—	—	1248
B	—	—	1421	—	712	938	—
C	—	—	—	911	941	—	—
D	—	—	—	—	1001	—	—
E	—	—	—	—	—	1198	—
F	—	—	—	—	—	—	832
G	—	—	—	—	—	—	—

- 21.1. O António, um motorista da empresa RecSol, quer verificar se existem resíduos abandonados ao longo das estradas. Pretende partir do local representado pela letra A, percorrer todas as estradas, sem as repetir, e regressar ao mesmo local.

Podem todas as pretensões do António ser satisfeitas, em simultâneo?

Justifique a sua resposta.

- 21.2. A RecSol vai ligar todos os locais de recolha de resíduos sólidos com um cabo de fibra ótica, utilizando algumas das estradas representadas no grafo da figura anterior.

De modo a usar a menor extensão de cabo de fibra ótica, a empresa contactou dois especialistas em instalação de fibra ótica, o João e o José.

O João afirma, sem recurso a nenhum método, que a ligação que requer menos cabo é $\{(A,B),(F,G),(B,F),(B,E),(C,E),(C,D)\}$

O José propõe uma ligação apoiando-se no uso do algoritmo seguinte.

Algoritmo

Passo 1: Escolhem-se as duas arestas com o menor valor de distância.

Passo 2: Escolhe-se a aresta seguinte com o menor valor de distância, desde que essa aresta não feche um circuito.

Passo 3: Repete-se o ponto anterior até que todos os vértices façam parte da árvore, tendo em conta as regras seguintes:

- se houver empate na escolha de arestas, seleciona-se a aresta aleatoriamente;
- se a aresta a escolher fechar um circuito, essa aresta não deve ser considerada.

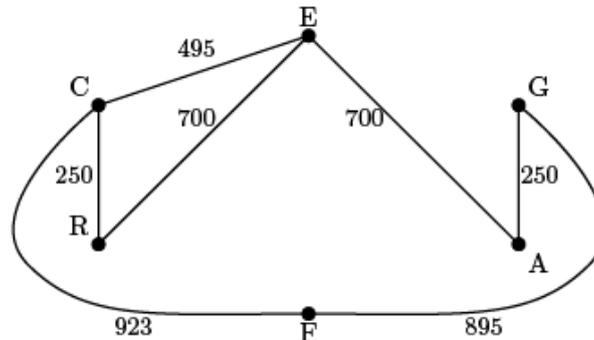
Indique qual das duas propostas deve escolher a empresa, de modo a usar a menor extensão de cabo de fibra ótica.

Na sua resposta, deve:

- determinar o número de metros da proposta do João;
- aplicar ao grafo da figura anterior o algoritmo proposto pelo José;
- determinar o número de metros da proposta do José;
- apresentar uma conclusão sobre a escolha da empresa.

22. O António é carteiro. Habitualmente, organiza o percurso antes de iniciar a distribuição das encomendas. Certo dia, o António decidiu fazer um grafo ponderado (figura seguinte), com as distâncias a cada um dos locais de entrega das encomendas desse mesmo dia.

No grafo da figura seguinte, os seis vértices representam a estação de correios (C), a escola (E), o ginásio (G), o restaurante (R), a fábrica (F) e a associação desportiva (A). Cada aresta do grafo representa um trajeto direto entre dois dos locais já referidos. A ponderação de cada aresta representa a distância, em metros, entre os locais considerados.



O António pretende partir da estação de correios, (C), passar por todos os outros locais representados, nos quais tem de entregar encomendas nesse dia, não mais do que uma vez por cada um deles, e regressar depois à estação de correios, percorrendo o número mínimo de metros.

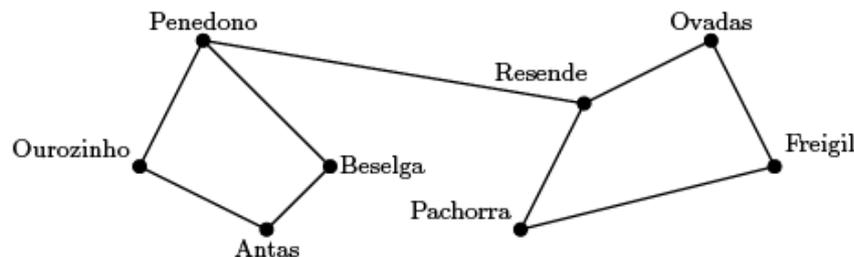
Defina um percurso que satisfaz o que o António pretende e indique o número de metros que ele tem de percorrer.

Exame – 2010, 2ª Fase

23. A empresa Silva-Filhos dedica-se à limpeza de estradas. A empresa está sediada no distrito de Viseu.

Na figura seguinte, encontra-se o grafo que serve de modelo ao circuito utilizado pela empresa ao efetuar a limpeza das estradas.

Cada vértice do grafo representa uma localidade, e cada aresta representa uma estrada que liga duas localidades.



Considere a afirmação:

«Não é possível limpar todas as estradas representadas no grafo da figura anterior, percorrendo cada estrada uma e uma só vez, se o camião de limpeza partir de Beselga e regressar a Beselga. Mas, é possível alterar esta situação.»

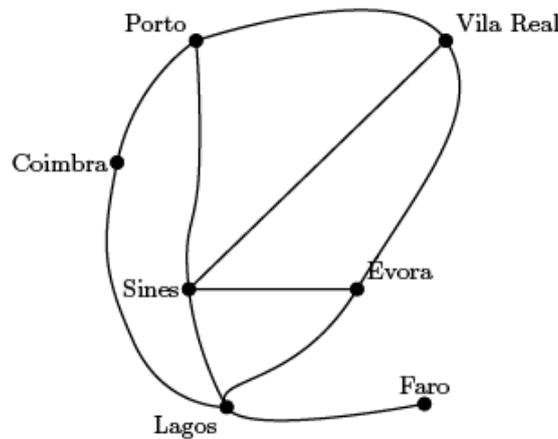
Justifique a veracidade da afirmação anterior.

Reproduza o grafo da figura anterior, na folha de respostas, e acrescente-lhe uma aresta de modo que o grafo obtido represente um modelo a partir do qual seja possível limpar todas as estradas, percorrer cada estrada uma e uma só vez, partindo de Beselga e regressando a Beselga.

Exame – 2010, 1ª Fase

24. A empresa GNC, de transporte de gás natural comprimido, está sediada em Sines. A sua frota de distribuição utiliza diferentes trajectos, que ligam as cidades de Coimbra, Évora, Faro, Lagos, Porto, Vila Real e Sines. A distribuição começa sempre em Sines e termina sempre em Sines.

Na figura seguinte, encontra-se o grafo que serve de modelo aos vários circuitos utilizados pela GNC. Cada vértice do grafo representa uma cidade, e cada aresta representa um trajecto que liga duas cidades.



- 24.1. Mostre que não é possível organizar um circuito que permita que um camionista da GNC cumpra, em simultâneo, as seguintes condições:

- entregar gás natural comprimido em todas as cidades representadas no grafo da figura anterior;
- percorrer, uma e uma só vez, cada trajecto representado;
- percorrer todos os trajectos representados.

- 24.2. Considere, agora, apenas os circuitos que incluem as cidades de Évora, Porto, Vila Real e Sines, percorridas não necessariamente por esta ordem.

Na tabela seguinte, encontram-se as distâncias entre cada duas dessas cidades quando se percorrem os trajectos indicados pelas arestas do grafo da figura anterior.

	Porto	Vila Real	Sines
Évora	406km	525km	172km
Porto	—	125km	442km
Vila Real	—	—	559km

O preço do transporte cobrado pela empresa GNC aos clientes é de € 2,00 por quilómetro.

A empresa GNC faz um desconto de 8% sobre o preço total de transporte quando o camião, partindo da refinaria de Sines, faz entregas de gás natural comprimido nas cidades de Évora, Porto e Vila Real (percorridas não necessariamente por esta ordem), passando apenas uma vez por cada cidade, e regressa à refinaria em Sines.

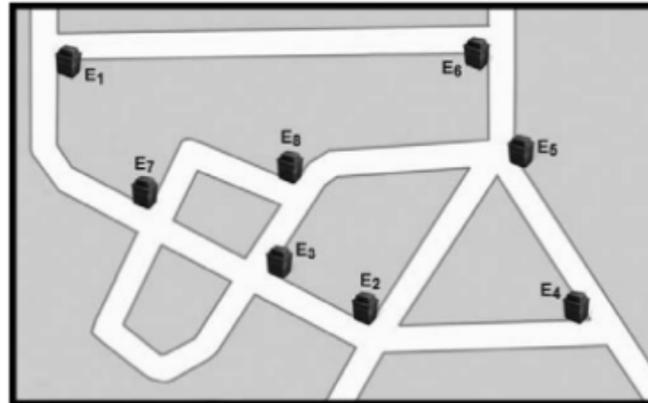
Determine o preço mínimo, em euros, que o comprador paga por cada transporte.

Na sua resposta deve:

- indicar o número de circuitos possíveis e as respetivas extensões, referindo apenas os que têm extensão distinta e obedecem aos critérios definidos;
- calcular o preço a pagar pelo menor circuito.

25. Uma Câmara Municipal elaborou um contrato com a empresa FUTUROLIMPO, empresa especializada na recolha selectiva de resíduos.

Na figura seguinte, apresenta-se um «mapa» de uma zona residencial desse município, que possui oito espaços de recolha selectiva de resíduos (ecopontos). Os oito ecopontos estão representados por E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , E_5 , E_6 , E_7 e E_8 .



Designa-se por «troço de rua» a ligação entre dois ecopontos adjacentes, isto é, o percurso que se efetua para ir de um desses ecopontos ao outro sem passar por mais nenhum.

- 25.1. Considere que o camião de recolha selectiva de resíduos que passa por essa zona residencial inicia o seu percurso no ecoponto E_4 e que o termina no ecoponto E_2 .

Admita que, em cada troço de rua, o camião pode estacionar junto de cada ecoponto, independentemente do sentido de circulação.

Indique um percurso, de E_4 a E_2 , para que o camião possa recolher os resíduos de todos os ecopontos, passando por cada um deles uma única vez.

Apresente o percurso na forma de uma sequência, utilizando as designações dos ecopontos.

- 25.2. Os moradores da mesma zona residencial reclamaram das condições de alguns troços de rua de acesso aos ecopontos. A Câmara Municipal decidiu enviar um funcionário especializado, para inspecionar as condições dos mesmos.

Admita que o funcionário decidiu iniciar e terminar as suas inspeções junto do mesmo ecoponto. No entanto, ao analisar o «mapa» da zona em causa, concluiu que, para concretizar essa decisão, não tinha possibilidade de inspecionar todos os troços de rua, passando por cada um deles uma única vez. Por isso, de forma a rendibilizar o tempo da inspeção, procurou encontrar um percurso cujo número de troços de rua a percorrer fosse o menor possível, garantindo o início e o fim da inspeção junto do mesmo ecoponto.

Num pequeno texto:

- indique, justificando, a razão que levou o funcionário a concluir da impossibilidade de inspecionar todos os troços de rua, passando por cada um deles uma única vez, tendo em conta que ele pretende iniciar e terminar a inspeção junto do mesmo ecoponto;
- indique, ainda, um percurso que se inicie e termine no ecoponto E_2 e que permita ao funcionário inspecionar todos os troços de rua, sendo o número de troços de rua a percorrer o menor possível. Apresente o percurso na forma de uma sequência, utilizando as designações dos ecopontos.

Comece, obrigatoriamente, por modelar, através de um grafo, o «mapa» da zona residencial apresentado, considerando que os vértices representam os ecopontos e que as arestas representam os troços de rua.

26. O António vive em Lisboa e é vendedor de uma empresa nacional. Todas as semanas, parte de sua casa e vai visitar duas cidades portuguesas, Faro e Coimbra, a fim de dar assistência aos seus clientes. A partir da próxima semana, vai começar a dar também assistência a clientes de duas cidades espanholas, Sevilha e Cáceres. Está neste momento a organizar um plano do percurso pelas quatro cidades: partindo de sua casa, passa uma única vez por cada uma das quatro cidades e volta de novo a casa. Pretende, também, percorrer o mínimo de quilómetros possível. Na tabela seguinte, estão referidas as distâncias, em quilómetros, entre aquelas cidades.



	Lisboa	Faro	Sevilha	Cáceres	Coimbra
Lisboa		282 km	459 km	313 km	206 km
Faro			197 km	442 km	447 km
Sevilha				260 km	625 km
Cáceres					346 km
Coimbra					

- 26.1. Desenhe um grafo ponderado que sirva de modelo às várias hipóteses de percurso possíveis. Como peso, atribua a cada aresta a distância, em quilómetros, a ela associada.
- 26.2. O António está convencido de que, se tiver de visitar, em primeiro lugar, o cliente de Coimbra, percorrendo depois as restantes cidades, antes do regresso a Lisboa, o percurso mais curto, nas condições a que está sujeito, consiste em seguir de Coimbra para Faro e só depois visitar as cidades espanholas, antes do regresso a Lisboa.

Numa composição, justifique se o António tem razão.

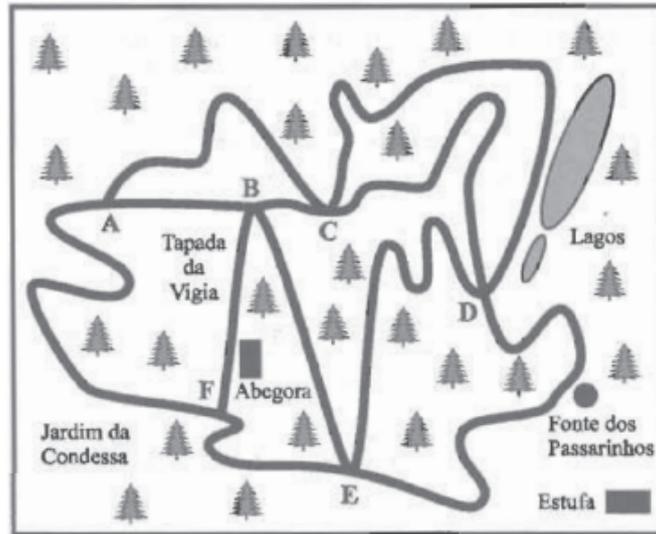
Deve incluir, obrigatoriamente, na sua composição:

- o número total de circuitos que obedecem aos critérios definidos;
- a identificação de todos os percursos possíveis, bem como a distância percorrida em cada um deles;
- a conclusão final, identificando o percurso de extensão mínima.

27. Alguns visitantes menos civilizados do Parque da Pena, em Sintra, têm por hábito deitar para o chão sacos de plástico, paus de gelado, latas de refrigerante, etc.

Um grupo de jovens amantes da natureza decide, durante uma tarde, ajudar a recolher todo o lixo existente nos caminhos duma zona do Parque.

Na figura seguinte, está um mapa dessa zona do Parque da Pena. Os cruzamentos dos caminhos estão assinalados por letras, de A a F.



Admita que o grupo de jovens parte do ponto A, assinalado no mapa, percorre todos os caminhos assinalados, recolhendo o lixo, e regressa ao ponto A.

27.1. O grupo de jovens tem de percorrer pelo menos um caminho, mais do que uma vez.

Justifique esta afirmação, começando por modelar, por meio de um grafo, o mapa da zona do Parque da Pena representado na figura.

27.2. Indique um percurso em que o número de caminhos percorridos mais do que uma vez seja o menor possível.

Dê a sua resposta na forma de uma sequência de letras, de acordo com a sequência de cruzamentos do percurso por si escolhido.

27.3. Na obra de Joseph Malkevitch, Modelos de Grafos, pode ler-se: “A ideia chave na modelação matemática consiste em tomar a situação original e simplificá-la de tal modo que fiquemos com uma nova visão sobre o problema original.”

Elabore uma composição onde desenvolva a ideia expressa, nesta frase, por Joseph Malkevitch. Baseie-se no modelo que considerou nas alíneas anteriores ou num exemplo à sua escolha, que integre a utilização de grafos.

Nessa composição deve referir:

- o porquê da necessidade de simplificar a realidade;
- o porquê da necessidade de distinguir o essencial do acessório;
- os aspetos que foram simplificados, relativamente a situação original.

Exame – 2006, 1ª Fase