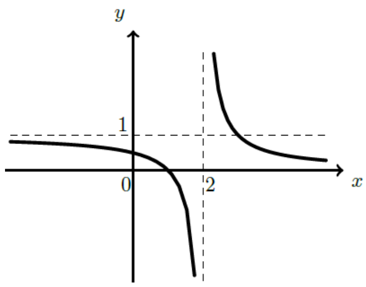
Revisão de FUNÇÕES do 11º ano – Matemática A

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, apenas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida. Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações julgadas necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato. Esta prova incluiu em anexo um formulário.

1) Na figura ao lado está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. As retas de equações $x=2$, $y=1$ e $y=0$ são assíntotas ao gráfico de g.

Seja (u_n) uma sucessão tal que $\lim(g(u_n))=+\infty$.

Qual das expressões pode ser o termo geral da sucessão (u_n)?

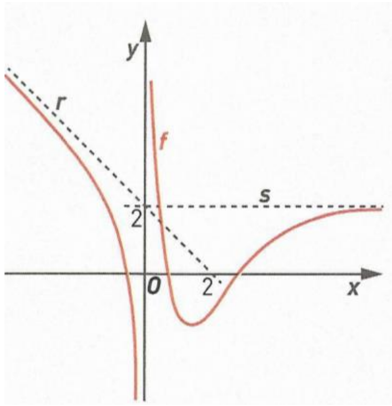


(A) $2+n$ (B) $2+\frac{1}{n}$ (C) $2-\frac{1}{n}$ (D) $2-n$

2) Seja (u_n) uma progressão geométrica de primeiro termo 10 e razão $\frac{1}{2}$ e f a função real de variável real definida por $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$. Qual o valor de $\lim(f(u_n))$?

(A) 0 (B) 5 (C) $-\infty$ (D) $+\infty$

3) Na figura junta estão representados o gráfico de uma função f e as retas r e s assíntotas ao gráfico de f. Sabe-se que a reta de equação $x=0$ é assíntota vertical, a reta s é assíntota horizontal quando $x\to+\infty$ e a reta r é assíntota oblíqua quando $x\to-\infty$.



3.1 A partir da informação dada e da representação gráfica, indique:

a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ **e)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x+2\right)$ **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3.2 Considere a função g definida por $g(x)=f(x+1)-5$.

Indique as equações das assíntotas ao gráfico de g.

4) Considere a f. r. v. r definida por $f(x)=\frac{x-5}{(5-x)^3}$. O valor de $\lim\limits_{x\to5^+} f(x)$ é:

$(A)4$ $B)0$ $(C)+\infty$ $(D)-\infty$

5) Sejam f e g duas f. r. v. r. contínuas em IR. Sabe-se que $f(4)=0$ e $\lim\limits_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=8$.

Então o valor de $g(4)$ é necessariamente:

$(A)16$ $(B)2$ $(C)0$ $(D)+\infty$

6) Considere a função *f*, de domínio *IR*, definda por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-2x^3+2x}{x^3+x^2+x+1}, & x>-1 \\ 2 \quad , & x=-1 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}-2}, & x<-1 \end{cases}$

a) Estude a função *f* quanto à continuidade.

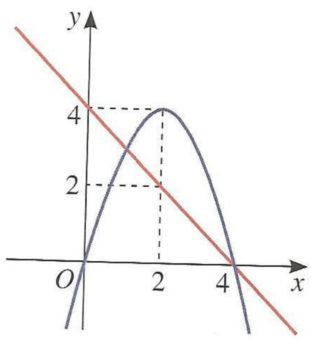
b) Determine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. O que conluiu sobre a existência de assíntotas ao gráfico de *f*?

7) Calcule cada um dos seguintes limites, identificando, caso exista, o tipo de indeterminação.

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{4x^3-x}{x+1}}}{x}$ $\qquad c)\ \lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}\right)$

Sugestão: Na alínea c) pode proceder a uma mudança de variável, se entender útil.

8) Na figura ao lado estão representadas partes dos gráficos de duas funções *f* e *g*, polinomiais de grau 1 e 2, respetivamente.



De acordo com os dados da figura, o valor de $\lim\limits_{x\to 2}\left(f\circ g\right)(x)$ é:

$(A)\,0$ $\qquad (B)\,2$ $\qquad (C)\,4$ $\qquad (D)\,-1$

9) Considere a função *h*, real de variável real, definida pela expressão analítica $h(x)=\dfrac{\left|x^3-1\right|}{x^2-x}$.

Indique o domínio da função *h* e obtenha as equações das assíntotas (verticais e não verticais) ao seu gráfico. Se achar conveniente, comece por definir a função por ramos.

10) Seja *f* uma função contínua de domínio IR^+. Sabe-se que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2f(x)+6x\right]=-8$.

Obtenha as equações das assíntotas (vertical e não vertical) ao gráfico da função *g*, de domínio IR^+, definida por $g(x)=\dfrac{\left[f(x)\right]^2}{x}+3f(x)$.

11) Seja $f: IR\to IR$ uma função contínua, estritamente monótona e tal que $f(x)=1+f(x+1), \forall x\in IR$.
Calcule, justificando devidamente, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

----

12) A Beatriz espremeu várias laranjas e obteve 4 litros de sumo de laranja, para um lanche que vai oferecer aos amigos. Como as laranjas não eram muito doces, decidiu juntar Sunquick aos 4 litros de sumo de laranja obtidos. Admita que o sumo de laranja "puro", ou seja, acabado de espremer, já contém 92% de água e que o Sunquick contém 30% de água.

a) Designando por ***x*** a quantidade de *Sunquick* que vai ser acrescentado aos quatro litros de sumo de laranja "puro", **mostre** que a **percentagem** *C* de água existente na bebida que a Beatriz vai oferecer aos amigos é dada por $C(x)=\dfrac{30x+368}{x+4}$. Comece por preencher a tabela.

	Água	"Sumo"	Total
Sumo de laranja "puro" (4 litros)	_______	_______	4
Sunquick	_______	_______	x
Total	_______	_______	_______

b) Calcule *C*(8) e interprete o valor obtido no contexto do problema.

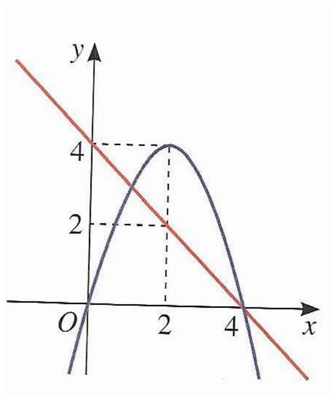
13) Um projétil é lançado de uma plataforma. A sua altura, em metros, *t* segundos após o lançamento, é aproximada por $h(t)=-t^2+8t+4$.

a) Calcule a **velocidade média** do projétil no intervalo de tempo de 1 a 3 segundos.

b) A **velocidade** do projétil, em m/s, ao fim de 5 segundos é:

$(A)\ -2$ $\quad(B)\ 2$ $\quad(C)\ 4$ $\quad(D)\ -4$

14) Na figura ao lado estão representadas partes dos gráficos de duas funções *f* e *g*, polinomiais de grau 1 e 2, respetivamente.

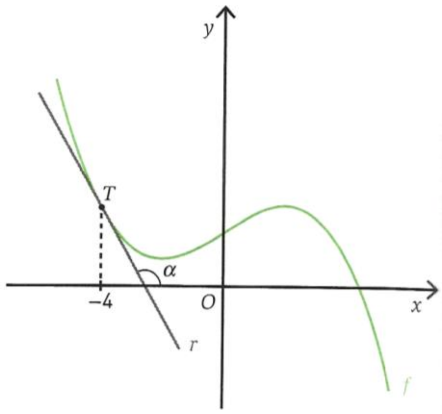


a) Sabendo que a função *g* é definida por $g(x)=-x^2+4x$, calcule, **utilizando a definição de derivada**, o valor de $g'(3)$.

b) De acordo com os dados da figura, o valor de $\left(f\times g\right)'(2)$ é:

$(A)\ -1$ $\quad(B)\ 4$ $\quad(C)\ -4$ $\quad(D)\ 0$

15) Considere a função *f*, real de variável real, definida por $f(x)=-\dfrac{x^3}{3}+4x+8$ e os pontos A e B do seu gráfico, de abcissas – 3 e 3, respetivamente.

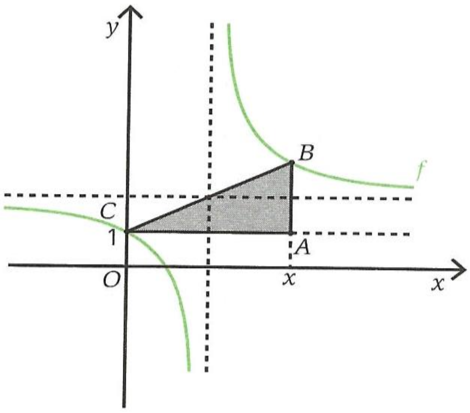


a) Obtenha a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa – 4 e um valor aproximado às décimas de grau da sua inclinação (α).

b) Calcule o declive da reta AB e justifique que existe pelo menos um ponto P do gráfico de *f*, com abcissa pertencente ao intervalo $]-3,3[$, em que a reta tangente ao gráfico é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares e determine a(s) abcissa(s) desse(s) ponto(s).

c) Estude a função quanto à monotonia e existência de extremos (elabore uma tabela de variação).

16) Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função racional definida por $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-3},\ \forall x\in IR\setminus\{3\}$.



O triângulo [ABC] é retângulo em A. Sabe-se que C(0;1).
O ponto B, de abcissa superior a 3, desloca-se sobre o gráfico de *f* e o ponto A, de ordenada 1, acompanha o movimento de B, de modo que A e B têm sempre a mesma abcissa.
Considere, ainda, a função *g* definida por $g(x)=5x^2$.

a) O gráfico de *f* tem assíntotas de equações:
$(A)\ x=3$ e $y=2$ $(B)\ x=1$ e $y=1$ $(C)\ x=-3$ e $y=2$ $(D)\ x=2$ e $y=3$

b) Resolva a inequação $f(x)\geq x-3$ e apresente o conjunto solução na forma de intervalo(s).

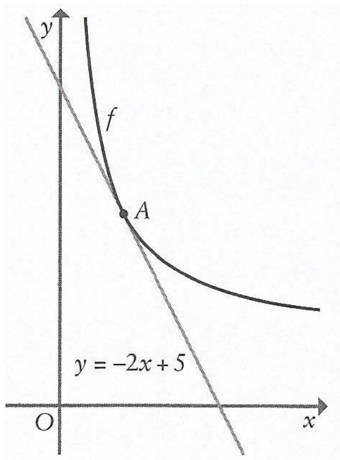
c) Mostre que a função que dá a área do triângulo [ABC], em função da abcissa *x* de B, é definida por $A(x)=\dfrac{x^2}{2x-6}$ e determine a abcissa do ponto B de modo que essa área seja **mínima**.

d) Escreva $A(x)$ na forma $A(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-d}$ e indique as equações das assíntotas do seu gráfico.

e) Obtenha, **por dois processos distintos**, a expressão analítica de $\left(f\circ g\right)'(x)$.

17) Sejam *f* e *g* duas funções de domínio IR^+. A função *f* está representada graficamente ao lado, bem como a reta de equação $y=-2x+5$ que é tangente ao gráfico de *f* no ponto A, de abcissa 1.
Acerca da função *g* sabe-se que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x^2-1}=-\dfrac{1}{2}$ e que o seu gráfico interseta o gráfico da função *f* no ponto A.
Qual é o valor de $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(1)$?

$(A)\ \dfrac{1}{3}$ $(B)\ -\dfrac{1}{3}$ $(C)\ \dfrac{2}{3}$ $(D)\ -\dfrac{2}{3}$



18) Considere a f.r.v.r. definida por $g(x)=3x^2\times\sqrt[3]{4x}$. Utilizando as regras de derivação, mostre que $g'(x)=7x\times\sqrt[3]{4x}$ e justifique que a função *g* não tem extremos.

19) Acerca de uma f.r.v.r. de domínio *IR* sabe-se que:

- *f* é ímpar;
- $f(-2)=2$ e $f(0)=0$;
- $f'(-2)=0$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^+$;
- $f'(x)>0$ se $x\in\left]-\infty,-2\right[$ e $f'(x)<0$ se $x\in\left]-2,0\right[$.

Justifique que *f* é contínua em *IR* e esboce um possível gráfico da função *f*.

20) Considere a função, diferenciável em $IR\setminus\{0\}$, definida por $g(x)=\dfrac{k}{x^2}$, com $k\in IR\setminus\{0\}$.

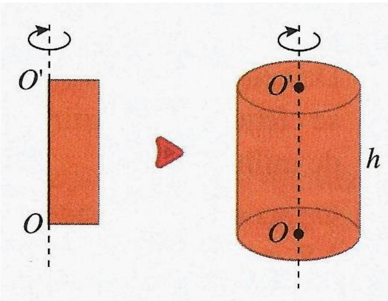
Utilizando a **definição de derivada**, prove que $g'(a)=-\dfrac{2k}{a^3}$, $\forall a\in IR\setminus\{0\}$

---

21) Considere-se um ponto P a mover-se numa semirrreta, sendo que, em cada instante t, em segundos, a distância à origem, em metros, é dada pela expressão $d(t)=\dfrac{2t^2}{t+3}$, $t\geq 0$.
Recorrendo a **métodos exclusivamente analíticos**, determine a velocidade instantânea no momento em que o ponto P atinge 25 metros de distância em relação à origem.

22) Considere um fio com 80cm de comprimento. Formando com esse fio um retângulo e girando-o em torno de um dos seus lados, gera-se um cilindro, como ilustra a figura ao lado.
Recorrendo a **métodos exclusivamente analíticos**, determine as dimensões do cilindro de modo a que o seu volume seja máximo.

NOTA: Comece por provar que o volume do cilindro é dado, em função da medida do raio x, por $V(x)=-\pi x^3+40\pi x^2$.



23) Sejam f e g duas funções diferenciáveis em IR_0^+ tais que:

- $f(0)=2$
- $g(x)=x\times f(x)$, $\forall x\in IR_0^+$;
- o gráfico de g tem assíntota não vertical de equação $y=2x-3$.

a) Obtenha a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de **g** no ponto de abcissa 0.

b) Estude a função ***f*** quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

---

24) Um estudo sobre audiências televisivas concluiu que, durante 90 minutos da transmissão do jogo Portugal-França do Campeonato da Europa, a variação do número de telespetadores portugueses foi modelado, aproximadamente, pela função $N(t)=-0,04t+7-\dfrac{49}{t+10}$, onde $N(t)$ representa o número de telespetadores, em **milhões**, e t o tempo de jogo em minutos, $0\leq t\leq 90$.

a) Calcule, **analiticamente**, $N'(30)$ e interprete o valor no contexto da situação descrita.

b) Obtenha, **analiticamente**, o momento do jogo em que a audiência foi máxima e qual foi esse valor máximo.

c) Recorrendo **às *capacidades gráficas da calculadora***, determine durante quanto tempo, em minutos arredondados às unidades, o número de telespetadores foi superior a 4 milhões.
Apresente todos os elementos recolhidos na calculadora, nomeadamente o(s) gráfico(s), indicando as coordenadas dos pontos relevantes na forma de dízima arredondadas às centésimas.

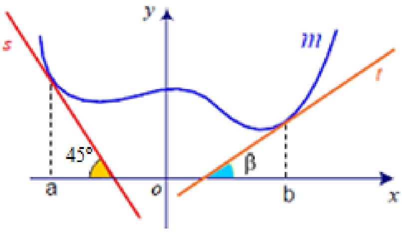
25) Devido à seca, a empresa responsável pela da Barragem do Alqueva procedeu a medições diárias do nível da água na albufeira e chegou à conclusão que a altura da água, relativamente a um ponto de referência, pôde ser modelado pela função $A(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{75}{2}t^2+900t+10000$, onde $A(t)$ está em **milímetros** e t em dias, correspondendo t=0 a 01 de Janeiro de 2012 e $0\leq t\leq 75$.

Determine, **analiticamente**, o dia em que foi mais elevado e o dia em que foi mais baixo o nível da água na albufeira no período referido.

26) Seja f a função de domínio IR definida por $f(x)=x^2$. Sejam A e B os pontos do gráfico de f de abcissa a e b, respetivamente ($a\neq b$). Considere ainda as retas r e s que são tangentes ao gráfico de f no ponto A e B, respetivamente.

Mostre que o ponto de interseção das retas r e s tem abcissa $\frac{a+b}{2}$.

27) As retas s e t são tangentes ao gráfico de uma função m nos pontos a e b, respetivamente e $m'(b)=0,75$. Pode-se concluir que:



$(A)\ m'(a)=-\sqrt{3}\ e\ \beta=36,9^o$ $(B)\ m'(a)=-\sqrt{3}\ e\ \beta=45^o$

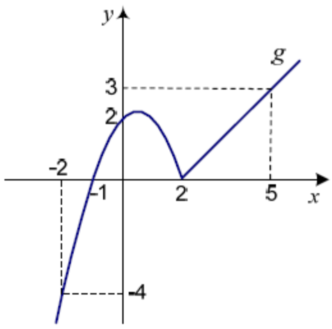
$(C)\ m'(a)=-1\ e\ \beta=38,7^o$ $(D)\ m'(a)=-1\ e\ \beta=36,9^o$

28) O gráfico de uma função f é uma reta de declive 3. Então o gráfico da função $h(x)=\frac{1}{f(x)}$ é:

(A) Uma reta de declive – 3. (B) Uma reta de declive $-\frac{1}{3}$.

(C) Uma hipérbole. (D) Uma parábola voltada para cima.

29) Considere a função definida por $f(x)=\frac{4x}{x+1}$ e a função g representada na figura. Qual das afirmações é **falsa**?

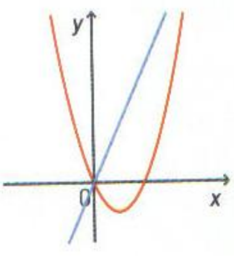


$(A)\, g^{-1}(-4)=-2$ $(B)\,(gof)(1)=2$

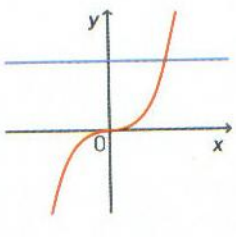
$(C)\,(f\times g)(2)=0$ $(D)\,(f-g)(0)=-2$

30) Em qual dos referenciais seguintes pode estar o gráfico de uma função e o da sua derivada?

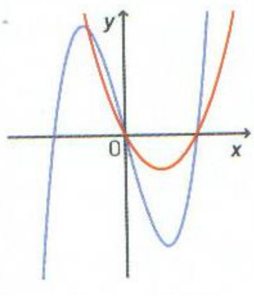
(A)



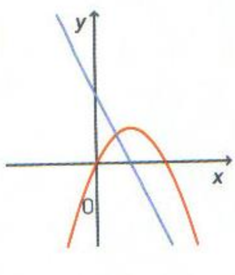
(B)



(C)



(D)



FIM

Síntese

Limite de uma função num ponto (segundo Heine)

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se e somente se $f(x_n) \longrightarrow b$ para qualquer sucessão (x_n), em que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D$ e $x_n \longrightarrow a$ (a e b podem ser infinitos).

Limites laterais

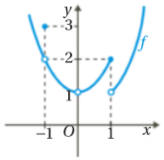
Sejam $A = D_f \cap]-\infty, a[$ e $B = D_f \cap]a, +\infty[$.

- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f|_A(x)$
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f|_B(x)$

pp. 10 a 16

Seja f a função representada graficamente.

- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2 \neq f(-1)$
  Não existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, logo $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, logo não existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.



Operações com limites de funções

- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
  (Exceto no caso em que os limites são infinitos e de sinais contrários.)
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \times \lim\limits_{x \to a} g(x)$
  (Exceto no caso em que um dos limites é 0 e o outro é ∞.)
- $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ $\left(g(x) \neq 0 \text{ e } \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0\right)$
  (Exceto no caso em que os limites são simultaneamente nulos ou infinitos.)
- $\lim\limits_{x \to a} [kf(x)] = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^r = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^r$ sempre que os dois membros da igualdade estejam definidos em $\mathbb{R}$ e podendo $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ser $+\infty$ ou $-\infty$.

Limite da função composta

Se a é um ponto aderente a $D_{g \circ f}$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$, então $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$.

pp. 17 a 25

- Se $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 3$:
  - $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) + g(x)] = 2 + 3 = 5$
  - $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) \times g(x)] = 2 \times 3 = 6$
  - $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2}{3}$
  - $\lim\limits_{x \to 1} [5f(x)] = 5 \times 2 = 10$
  - $\lim\limits_{x \to 1} [f(x)]^4 = 2^4 = 16$
- Se $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 3$, então:
  $\lim\limits_{x \to 1} (g \circ f)(x) = 3$

Funções contínuas

- f é uma **função contínua** num ponto $a \in D_f$ quando $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.
- f é uma função contínua em $A \subset D_f$ quando f é contínua em todos os pontos de A.

Operações com funções contínuas

Se f e g são funções contínuas em a, então as funções $f + g$, $f - g$, $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$ (se $g(a) \neq 0$) e f^r ($r \in \mathbb{Q}$) são contínuas em a.

Continuidade da função composta

Seja $a \in D_{g \circ f}$, se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então a função $g \circ f$ é contínua em a.

Outras funções contínuas

Toda a função racional é contínua no seu domínio.
As funções seno, cosseno e tangente são contínuas no seu domínio.

pp. 26 a 31

Se f e g são funções definidas em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \sin x \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - x$$

- f é uma função contínua (função seno);
- g é uma função contínua (função polinomial);
- $h(x) = (x^2 - x) + \sin x$ é uma função contínua (soma de funções contínuas);
- $i(x) = (x^2 - x) \times \sin x$ é uma função contínua (produto de funções contínuas);
- $j(x) = \dfrac{\sin x}{x^2 - x}$ é uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (quociente de funções contínuas);
- $j(x) = \sin(x^2 - x)$ é uma função contínua (composta de funções contínuas).

Síntese

Assíntotas ao gráfico de uma função

Assíntotas verticais

A reta de equação $x = a$ $(a \in \mathbb{R})$ é uma assíntota vertical ao gráfico de uma função f quando pelo menos um dos limites laterais de f, no ponto a, for infinito.

Assíntotas não verticais

- A reta de equação $y = mx + b$ $(m, b \in \mathbb{R})$ é uma assíntota não vertical ao gráfico de f em $+\infty$ (ou $-\infty$) se:
  $$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$
  $$\left(\text{ou } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0\right)$$
  Se $m = 0$, a assíntota é horizontal.
- A reta de equação $y = mx + b$ $(m, b \in \mathbb{R})$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ ou em $-\infty$ se e só se:
  $$\begin{cases} m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - mx] \end{cases}$$

pp. 39 a 43

Assíntotas ao gráfico de f

Seja a função $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 2}$, tal que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

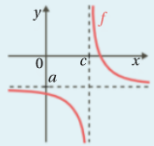
- Assíntotas verticais
  $$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 + 1}{x + 2} = \frac{4 + 1}{0^-} = -\infty$$
  A reta de equação $x = -2$ é uma assíntota vertical.
- Assíntotas não verticais $(y = mx + b)$
  $$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$
  $$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - 1 \times x] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 2} - x\right) =$$
  $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 - 2x}{x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{x} = -2$$
  A reta de equação $y = x - 2$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ (de igual modo se prova que também é assíntota em $-\infty$).

Funções racionais

Seja f a função definida por $f(x) = a + \dfrac{b}{x - c}$.

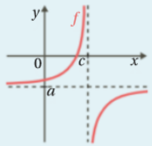
- Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{c\}$; assíntota vertical: $x = c$
- Contradomínio: $\mathbb{R} \setminus \{a\}$; assíntota horizontal: $y = a$
- Esboço do gráfico e variação:

Se $b > 0$:



f é estritamente decrescente em $]-\infty, c[$ e em $]c, +\infty[$

Se $b < 0$:



f é estritamente crescente em $]-\infty, c[$ e em $]c, +\infty[$

Zeros de uma função racional (equação fracionária)

$$f(x) = 0 \iff \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \iff P(x) = 0 \wedge Q(x) \neq 0$$

Sinal de uma função racional (inequação fracionária)

Para resolver uma inequação fracionária recorre-se, normalmente, a uma tabela de sinal.

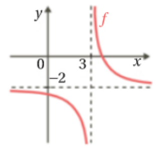
pp. 48 a 53

Estudo de uma função

Seja a função $f(x) = \dfrac{7 - 2x}{x - 3} = -2 + \dfrac{1}{x - 3}$.

$$\begin{array}{r|l} -2x+7 & x-3 \\ \hline 2x-6 & -2 \\ 1 & \end{array}$$

- Domínio: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
- Assíntota vertical: $x = 3$
- Assíntota horizontal: $y = -2$
- Contradomínio: $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
- f é estritamente decrescente em $]-\infty, 3[$ e em $]3, +\infty[$.



Equação e inequação fracionária

Seja a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$, tal que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- $f(x) = 0 \iff \dfrac{x^2 - 4}{x - 1} = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \wedge x - 1 \neq 0 \iff$
  $\iff (x = 2 \vee x = -2) \wedge x \neq 1 \iff x = 2 \vee x = -2$
- $f(x) \leqslant x \iff \dfrac{x^2 - 4}{x - 1} \leqslant x \iff \dfrac{x^2 - 4}{x - 1} - x \leqslant 0 \iff$
  $\iff \dfrac{x^2 - 4 - x^2 + x}{x - 1} \leqslant 0 \iff$
  $\iff \dfrac{x - 4}{x - 1} \leqslant 0 \iff$
  $\iff x \in]1, 4]$

$x - 4 = 0 \iff x = 4$; $x - 1 = 0 \iff x = 1$

x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
$x-4$	–	–	–	0	+
$x-1$	–	0	+	+	+
$\dfrac{x-4}{x-1}$	+	n.d.	–	0	+

Síntese

Taxa média de variação de uma função

Dada uma função real de variável real f e dois pontos a e b do seu domínio, chama-se **taxa média de variação de f entre a e b** a:

$$\text{t.m.v.}_{[f,\ a,\ b]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

A $\text{t.m.v.}_{[f,\ a,\ b]}$ é igual ao declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos $A(a\ ,\ f(a))$ e $B(b\ ,\ f(b))$.

pp. 67 e 68

Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com $f(x)=x^2+1$.

$$\text{t.m.v.}_{[f,\ 1,\ 3]} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{3^2+1-(1^2+1)}{3-1} = \frac{10-2}{2} = 4$$

Derivada de uma função num ponto

Seja f uma função real de variável real e x_0 um ponto do seu domínio. Chama-se **derivada de f no ponto x_0** e representa-se por $f'(x_0)$ ao limite, se existir e for finito:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Se f admite derivada no ponto x_0 diz-se que f é **diferenciável** em x_0 ou **derivável** em x_0.

A derivada de f no ponto x_0 é a **taxa instantânea de variação de f em x_0**.

O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0 é igual a $f'(x_0)$.

Função derivada

Seja f uma função real de variável real. A **função derivada de f** é uma nova função f' tal que:

- $D_{f'} = \{x \in D_f\colon f \text{ é diferenciável em } x\}$
- a cada $x \in D_{f'}$ faz corresponder $f'(x)$

pp. 69 a 76

Seja $f\colon \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ com $f(x)=\sqrt{x}+1$.

- $f'(4) = \lim\limits_{x \to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}+1-3}{x-4} =$

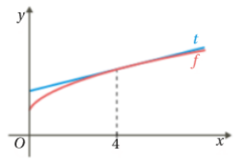
$$= \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

- Reta t tangente ao gráfico de f no ponto $A(4\ ,\ 3)$:

Como $m=f'(4)=\frac{1}{4}$, então:

$t\colon\ y-3=\frac{1}{4}(x-4) \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+2$



Regras de derivação

- $(mx+b)'=m$
- $(kf)'=kf'$
- $(f+g)'=f'+g'$
- $(fg)'=f'g+fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$
- $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$
- $(\sqrt[n]{x})'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- $(g\circ f)'(a)=f'(a)\times g'(f(a))$
- $(f^\alpha)'=\alpha f^{\alpha-1}f'$
- $(\sqrt[n]{f})'=\frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$

pp. 79 a 89

Sejam f e g as funções definidas por:

$$f(x)=\sqrt{x}(2x+1) \quad \text{e} \quad g(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$$

- $f'(x)=(\sqrt{x})'(2x+1)+\sqrt{x}(2x+1)'=$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+1)+\sqrt{x}\times 2=\frac{2x+1}{2\sqrt{x}}+2\sqrt{x}=$$

$$=\frac{2x+1+2\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{2x+1+4x}{2\sqrt{x}}=\frac{6x+1}{2\sqrt{x}}$$

- $g'(x)=\left[\frac{x}{(x+1)^2}\right]'=\frac{x'(x+1)^2-x[(x+1)^2]'}{[(x+1)^2]^2}=$

$$=\frac{(x+1)^2-x\times 2(x+1)(x+1)'}{(x+1)^4}=\frac{1-x}{(x+1)^3}$$

Síntese

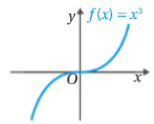
Zeros da derivada e extremos locais

Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $I=]a\ ,\ b[$ $(a<b)$ um intervalo contido em D. Se f é diferenciável em $x_0 \in I$ e atinge um extremo local em x_0, então $f'(x_0)=0$.

p. 101

A afirmação recíproca não é verdadeira.

A derivada da função $f(x)=x^3$ tem um zero (para $x=0$) e f não tem extremos.



Teorema de Lagrange

Dados uma função $f\colon D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e um intervalo $[a\ ,\ b] \subset D_f$ $(a<b)$ tais que:

- f é contínua em $[a\ ,\ b]$;
- f é diferenciável em $]a\ ,\ b[$;

então existe pelo menos um ponto $c \in\ ]a\ ,\ b[$ tal que:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

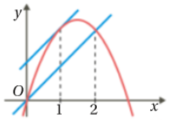
p. 103

Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=3x-x^2$.

A função f é contínua em $[0\ ,\ 2]$ e diferenciável em $]0\ ,\ 2[$. Logo, existe pelo menos um ponto $c \in\ ]0\ ,\ 2[$ tal que:

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$$

$$\Leftrightarrow 3-2c=\frac{2-0}{2} \Leftrightarrow c=1$$



Sinal da derivada e monotonia

Dados uma função $f\colon D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e um intervalo $[a\ ,\ b] \subset D_f$ $(a<b)$ tais que f é contínua em $[a\ ,\ b]$ e diferenciável em $]a\ ,\ b[$, tem-se:

- se $\forall x \in\ ]a\ ,\ b[\ ,\ f'(x)>0$, então f é estritamente crescente em $[a\ ,\ b]$;
- se $\forall x \in\ ]a\ ,\ b[\ ,\ f'(x)<0$, então f é estritamente decrescente em $[a\ ,\ b]$;
- se $\forall x \in\ ]a\ ,\ b[\ ,\ f'(x)=0$, então f é constante em $[a\ ,\ b]$.

p. 105

Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=9x-\frac{x^3}{3}$.

$f'(x)=9-\frac{3}{3}x^2=9-x^2$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 9-x^2=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=3$

x	$-\infty$	-3		3	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘		↗		↘

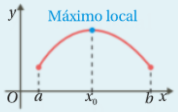
A função f é decrescente em $]-\infty\ ,\ -3]$ e em $[3\ ,\ +\infty[$ e crescente em $[-3\ ,\ 3]$.

Sinal da derivada e extremos locais

Seja f uma função contínua num intervalo $[a\ ,\ b]$ e $x_0 \in\ ]a\ ,\ b[$.

- Se f é crescente em $[a\ ,\ x_0]$ e decrescente em $[x_0\ ,\ b]$, então f tem um máximo relativo no ponto x_0.

x	a	x_0	b
f'	$+$		$-$
f	↗	Máx.	↘



- Se f é decrescente em $[a\ ,\ x_0]$ e crescente em $[x_0\ ,\ b]$, então f tem um mínimo relativo no ponto x_0.

x	a	x_0	b
f'	$-$		$+$
f	↘	Mín.	↗

pp. 107 e 108

Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=x^3-\frac{x^4}{4}$.

$f'(x)=3x^2-x^3$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-x^3=0 \Leftrightarrow x^2(3-x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=3$

Variação de f:

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
f'	$+$	0	$+$	0	$-$
f	↗	0	↗	$\frac{27}{4}$	↘

A função f é crescente em $]-\infty\ ,\ 3]$ e decrescente em $[3\ ,\ +\infty[$.

A função f tem um máximo relativo (e absoluto) para $x=3$.