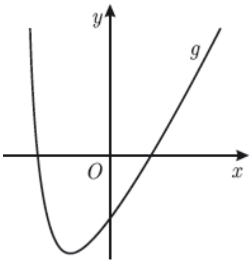
140. Na figura está representada num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de uma função g , de domínio $]-3,+\infty[$. A reta de equação $y=2x-4$ é assíntota do gráfico de *g*. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?



$(A)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-2x-4\right)=0$ $\qquad$ $(B)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{g(x)}=2$

$(C)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-2x+4\right)=0$ $\qquad$ $(D)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-2x\right)=0$

(2011)

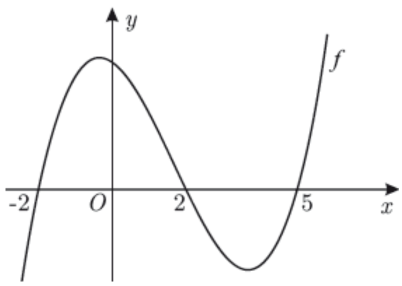
141. Seja *f* uma função de domínio $[0,+\infty[$ definida por $f(x)=\begin{cases}2^x-9 & \text{se } 0\le x\langle 5\\ \dfrac{1-e^x}{x} & \text{se } x\ge 5\end{cases}$

Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função *f* ?

$(A)\,]0,1[$ $\qquad$ $(B)\,]1,4[$ $\qquad$ $(C)\,]4,6[$ $\qquad$ $(D)\,]6,7[$ $\qquad$ *(2011)*

142. Na figura está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função polinomial *f* de grau 3, de domínio *IR*. Sabe-se que:

- -2, 2 e 5 são zeros de *f*;
- *f '* representa a função derivada de *f*.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

$(A)\ f'(0)\times f'(6)=0$ $\qquad$ $(B)\ f'(-3)\times f'(6)\langle 0$

$(C)\ f'(-3)\times f'(0)\rangle 0$ $\qquad$ $(D)\ f'(0)\times f'(6)\langle 0$

(2011)

143. Num museu, a temperatura ambiente em graus centígrados, t horas após as zero horas do dia 1 de Abril de 2010, é dada, aproximadamente, por $T(t)=15+0{,}1t^2\,e^{-0{,}15t}$ com $t\in[0,20]$.

Determine o instante em que a temperatura atingiu o valor máximo recorrendo a métodos exclusivamente analíticos. Apresente o resultado em horas e minutos, apresentando os minutos arredondados às unidades. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais. *(2011)*

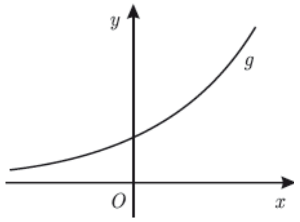
144. Considere a função *f*, de domínio *IR*, definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x-1} & \text{se } x\langle 1\\ \dfrac{2+\ln x}{x} & \text{se } x\ge 1\end{cases}$

a) O gráfico de *f* admite uma assimptota horizontal.
Seja P o ponto de intersecção dessa assíntota com a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa *e*.
Determine as coordenadas do ponto P recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

b) Existem dois pontos no gráfico de *f* cujas ordenadas são o cubo das abcissas.
Determine as coordenadas desses pontos recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

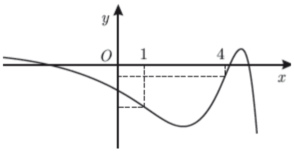
- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar esses pontos;
- indicar as coordenadas desses pontos com arredondamento às centésimas. *(2011)*

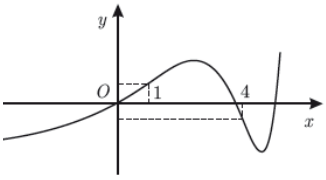
145. Na figura está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico da função g. Sabe-se que:

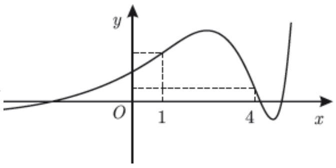


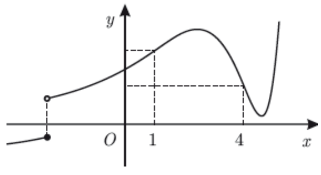
- g é uma função contínua em *IR*; g não tem zeros;
- a segunda derivada, $f\,''$, de uma certa função f tem domínio *IR* e é definida por $f\,''(x) = g(x)\times\left(x^2-5x+4\right)$; $f(1)\times f(4)\rangle 0$;

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função *f*.

(I) 

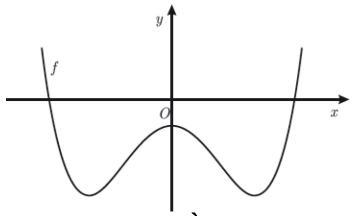
(II) 

(III) 

(IV) 

Elabore uma composição na qual*:* indique a opção que pode representar *f*; apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções. Apresente três razões, uma por cada gráfico rejeitado. *(2011)*

146. Na Figura está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função polinomial *f*, de grau 4. Qual das expressões seguintes pode definir a função $f\,''$, segunda derivada de *f* ?



$(A)\,(x-3)^2$ $\quad (B)(x+3)^2$ $\quad (C)\,9-x^2$ $\quad (D)\,x^2-9$ *(2011)*

147. Na estufa de um certo jardim botânico, existem dois lagos aquecidos, o lago A e o lago B. Às zero horas do dia 1 de Março de 2010, cada lago recebeu uma espécie diferente de nenúfares, a saber, *Victoria amazonica* e *Victoria cruziana*.

$N_A(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago A, t dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria amazonica* e desenvolvem-se segundo o modelo

$$N_A(t)=\frac{120}{1+7\times e^{-0,2t}} \text{ com } t\geq 0 \ .$$

$N_B(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago B, t dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria cruziana* e desenvolvem-se segundo o modelo

$$N_B(t)=\frac{150}{1+50\times e^{-0,4t}} \text{ com } t\geq 0 \ .$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Como foi referido, às zero horas do dia 1 de Março de 2010, o lago A recebeu um certo número de nenúfares da espécie *Victoria amazonica*. Decorridos 7 dias, esse número aumentou. Determine de quanto foi esse aumento. Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

b) Determine quantos dias foram necessários, após as zero horas do dia 1 de Março de 2010, para que o número de nenúfares existentes no lago A fosse igual ao número de nenúfares existentes no lago B. Apresente o resultado com arredondamento às unidades. *(2011)*

148. Considere a função *f*, de domínio $[0,+\infty[$, definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2-x}-1}{x-2} & \text{se } 0\leq x\langle 2\\[2mm] \dfrac{x+1}{\ln(x+1)} & \text{se } x\geq 2\end{cases}$

Resolva os três itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Estude *f* quanto à existência de assimptotas verticais do seu gráfico.

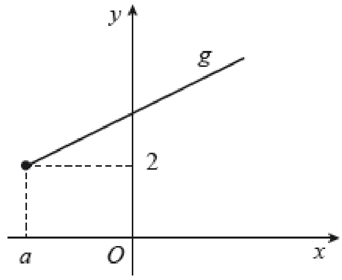
b) Mostre, sem resolver a equação, que $f(x)=-3$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

c) Estude *f* quanto à monotonia em $]2,+\infty[$. *(2011)*

149. Seja *f* uma função de domínio *IR*, definida por $f(x)=e^x-3$. Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite afirmar que a equação $f(x)=-x-\dfrac{3}{2}$ tem, pelo menos, uma solução?

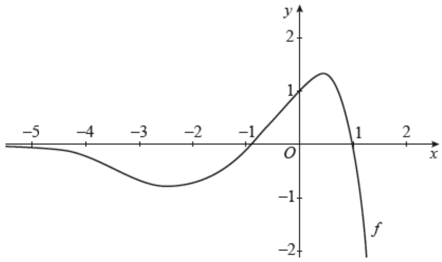
$(A)\ \left]0,\frac{1}{5}\right[$ $(B)\ \left]\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right[$ $(C)\ \left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right[$ $(D)\ \left]\frac{1}{3},1\right[$ *(2012)*

150. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função *g*, de domínio $[a,+\infty[$, com $a<-\frac{1}{3}$. Para esse valor de *a*, a função *f* , contínua em *IR*, é definida por $f(x)=\begin{cases}\log_3(-x-\frac{1}{3}) & \text{se } x<a\\ g(x) & \text{se } x\geq a\end{cases}$.



Qual é o valor de *a*? $(A)-\frac{28}{3}$ $(B)-\frac{25}{3}$ $(C)-\frac{19}{3}$ $(D)-\frac{8}{3}$ *(2012)*

151. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função *f*, de domínio *IR*. Sejam f' e f'', de domínio *IR*, a primeira derivada e a segunda derivada de *f*, respetivamente.
Qual dos valores seguintes pode ser positivo?
$(A)\ f'(1)$ $(B)\ f'(-3)$ $(C)\ f''(-3)$ $(D)\ f''(1)$ *(2012)*



152. Considere a função *f*, de domínio *IR*, e a função *g*, de domínio $]0,+\infty[$, definidas por $f(x)=e^{x-2}-\frac{4e^{-x}+4}{e^2}$ e $g(x)=-\ln(x)+4$.

a) Mostre que $\ln(2+2\sqrt{2})$ é o único zero da função *f*, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

b) Considere, num referencial o. n. xOy , os gráficos das funções *f* e *g* e o triângulo [OAB]. Sabe-se que:
- O é a origem do referencial; A e B são pontos do gráfico de *f*;
- a abcissa do ponto A é o zero da função *f*;
- o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o gráfico da função g

Determine a área do triângulo [OAB], recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
- reproduzir os gráficos das funções f e g , devidamente identificados, incluindo o referencial;
- assinalar os pontos A e B;
- indicar a abcissa do ponto A e as coordenadas do ponto B com arredondamento às centésimas;
- apresentar o valor da área pedida com arredondamento às décimas. *(2012)*

153. Considere a função *f*, de domínio *IR*, definida por $f(x)=\begin{cases}x\ln(x+1)-x\ln(x)+3x & se\, x>0\\ xe^{1-x} & se\, x\leq 0\end{cases}$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Estude a função *f* quanto à existência de assíntotas não verticais do seu gráfico.

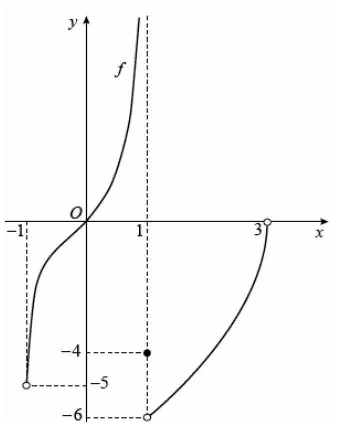
b) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa $x=-1$.

(2012)

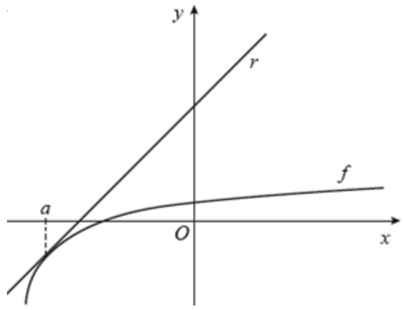
154. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função *f*, de domínio $]-1,3[$. Sabe-se que:
- $f(1)=-4$;
- a reta de equação $x=1$ é assíntota do gráfico de *f*;
- (x_n) é uma sucessão com termos em $]-1,1[$;
- $\lim(x_n)=1$

Qual é o valor de $\lim\left(f(x_n)\right)$?

$(A)+\infty$ $(B)-4$ $(C)-5$ $(D)-6$ *(2012)*



155. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função *f*, de domínio $]-6,+\infty[$, definida por $f(x)=\ln\left(\frac{x}{3}+2\right)$. Sabe-se que:



- a reta *r* é tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa *a*;
- a inclinação da reta r é, em radianos, $\frac{\pi}{4}$.

Qual é o valor de *a*?

$(A)-4$ $\quad (B)-\frac{9}{2}$ $\quad (C)-\frac{11}{2}$ $\quad (D)-5$

156. Seja *f* uma função de domínio *IR*. Sabe-se que: *(2012)*

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=1$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$; $\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to1^-} f(x)=2$

Em qual das opções seguintes as duas equações definem assíntotas do gráfico da função *f*?

$(A)\ x=1$ e $y=-2x+1$ $\quad (B)\ x=1$ e $y=2x+1$ $\quad (C)\ y=3$ e $y=-2x+1$ $\quad (D)\ y=2$ e $y=2x+1$

(2012)

157. Considere a função *f*, de domínio *IR*, definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{1-\sqrt{1-x^3}} & \text{se } x\langle 0\\ 1-e^{k+1} & \text{se } x=0\\ \dfrac{1-e^{4x}}{x} & \text{se } x\rangle 0\end{cases}$ com $k\in IR$.

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine *k* de modo que $\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)$.

b) Estude a função *f* quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

c) Seja *g* uma função, de domínio IR^+, cuja derivada, g´, de domínio IR^+, é dada por $g'(x)=f(x)-\frac{1}{x}$.

Estude a função *g* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão. *(2012)*

158. Considere a função *f*, de domínio $[-7,0[$, definida por $f(x)=e^x+\ln(x^2)+3$.

Sejam A e B os pontos de intersecção do gráfico de *f* com a bissetriz dos quadrantes pares, e seja *d* a distância entre os pontos A e B. Determine *d*, recorrendo à calculadora gráfica.
Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar os pontos A e B;
- indicar as coordenadas dos pontos A e B com arredondamento às centésimas;
- apresentar o valor de *d* com arredondamento às centésimas. *(2012)*

159. Seja f uma função de domínio IR+. Sabe-se que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+f(x)}{3x}=1$.

Qual das equações seguintes pode definir uma assíntota do gráfico da função f ?

$(A)\ y=\frac{1}{3}x$ $\quad (B)\ y=\frac{2}{3}x$ $\quad (C)\ y=x$ $\quad (D)\ y=3x$ *(2013)*

160. Considere, para um certo número real *a* superior a 1, as funções *f* e *g*, de domínio *IR*, definidas por $f(x)=a^x$ e $g(x)=a^{-x}$. Considere as afirmações seguintes.

I) Os gráficos das funções f e g não se intersectam.

II) As funções f e g são monótonas crescentes.

III) $f'(-1)-g'(1)=\frac{2\ln a}{a}$.

Qual das opções seguintes é a correta?

(A) II e III são verdadeiras. (B) I é falsa e III é verdadeira.

C) I é verdadeira e III é falsa. (D) II e III são falsas. *(2013)*

161. Considere a função *f*, de domínio IR\{0}, definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{e^{4x}-1} & se\ x<0 \\ x\ln(x) & se\ x>0 \end{cases}$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

b) Seja g a função, de domínio IR$^+$, definida por $g(x)=f(x)-x+\ln^2 x$. Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos em $]0,e]$.

Resolva a alínea c) recorrendo à calculadora gráfica.

c) Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, de domínio IR$^+$, definida por $g(x)=f(x)-x+\ln^2 x$. Sabe-se que: A é o ponto de coordenadas (2, 0); B é o ponto de coordenadas (5, 0) e P é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função *g*.
Para cada posição do ponto P, considere o triângulo [ABP]. Determine as abcissas dos pontos P para os quais a área do triângulo [ABP] é 1. Na sua resposta, deve:
• equacionar o problema;
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• indicar as abcissas dos pontos P com arredondamento às centésimas. *(2013)*

162. Sejam *a* e *b* dois números reais tais que $1<a<b$ e $\log_a b=3$.

Qual é, para esses valores de *a* e de *b*, o valor de $\log_a\left(a^5\times\sqrt[3]{b}\right)+a^{\log_a b}$?

(A) 6+*b* (B) 8+*b* (C) 6+*ab* (D) 8+*ab* *(2013)*

163. Seja *f* uma função de domínio $[-e,1]$. Sabe-se que *f* é contínua no seu domínio, $f(-e)=1$ e $f(1)=e$.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

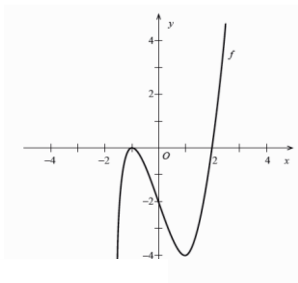
(A) A equação f(x)-1=0 tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$.

(B) A equação f(x)=e tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$.

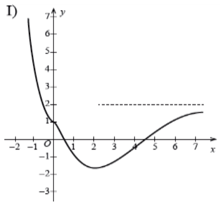
(C) A equação f(x)=0 tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$.

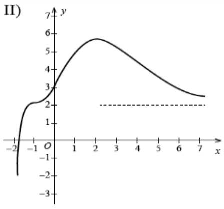
(D) A equação $f(x)=\dfrac{e}{2}$ tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$ *(2013)*

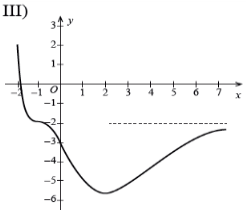
164. Na figura ao lado, está representada, num referencial ortogonal *x*O*y*, parte do gráfico de uma função polinomial *f*, de grau 3. Sabe-se que:
• -1 e 2 são os únicos zeros da função *f*;
• *g´*, a primeira derivada de uma certa função *g*, tem domínio *IR* e é definida por $g´(x)=f(x)\times e^{-x}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-2\right]=0$.

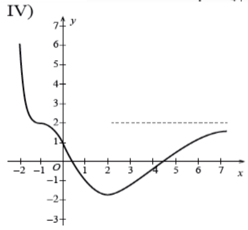


Apenas uma das opções seguintes pode representar a função g.









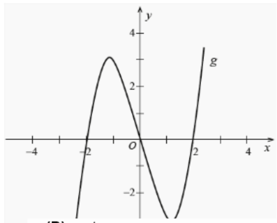
Nota – Em cada uma das opções estão representadas parte do gráfico de uma função e, a tracejado, uma assíntota desse gráfico. Elabore uma composição na qual:
• identifique a opção que pode representar a função g
• apresente as razões para rejeitar as restantes opções.
Apresente três razões diferentes, uma por cada gráfico rejeitado. *(2013)*

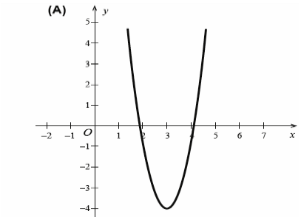
165. Considere, para um certo número real a positivo, uma função f, contínua, de domínio $[-a, a]$. Sabe-se que $f(-a) = f(a)$ e $f(a) > f(0)$. Mostre que a condição $f(x) = f(x+a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a, 0[$. *(2013)*

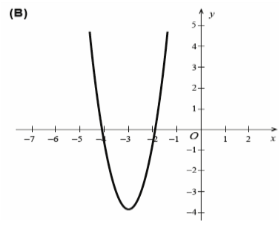
166. Sejam f e f'', de domínio IR, a primeira derivada e a segunda derivada de uma função f, respetivamente. Sabe-se que: a é um número real; P é o ponto do gráfico de f de abcissa a; $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$; $f''(a) = -2$. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

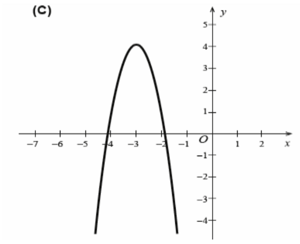
(A) a é um zero da função f.
(B) f(a) é um máximo relativo da função f.
(C) $f(a)$ é um mínimo relativo da função f.
(D) P é ponto de inflexão do gráfico da função f. *(2013)*

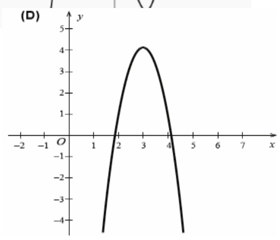
167. Na figura ao lado, está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico de uma função polinomial g, de grau 3. Seja f uma função, de domínio IR, que verifica a condição f(x)=g(x-3). Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ´, primeira derivada da função f? (2013)











168. Considere a função f, de domínio $]-\infty, 1]$, definida por $f(x) = xe^{3+x} + 2x$. Mostre que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua quando x tende para $-\infty$. *(2013)*

169. Seja g uma função, de domínio IR$^+$, cuja derivada, g´, de domínio IR^+, é dada por $g'(x) = \ln\left(e^x + 6e^{-x} + 4x\right)$.

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. *(2013)*

170. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio $[-1, 2]$, definida por $f(x) = -x - 3^{1+\ln(x^2+1)}$, o ponto A de coordenadas (2, 0) e um ponto P que se desloca ao longo do gráfico da função f. Existe uma posição do ponto P para a qual a área do triângulo [AOP] é mínima.
Determine a área desse triângulo, recorrendo à calculadora gráfica.
Na resposta, deve:
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• indicar o valor da área do triângulo [AOP] com arredondamento às centésimas. *(2013)*

171. Seja f a função, de domínio IR$^+$, definida por $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3$. Considere a sucessão de números reais (x_n) tal $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Qual é o valor de $\lim \frac{2}{f(x_n)}$?

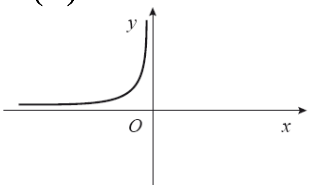
$(A) -\infty$ $\quad$ $(B) -e$ $\quad$ $(C) 0$ $\quad$ $(D) +\infty$ *(2014)*

172. Considere, para um certo número real k, a função f, de domínio IR, definida por $f(x) = ke^x + x$.
O teorema de Bolzano garante que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo]0,1[. A qual dos intervalos seguintes pode pertencer k ?

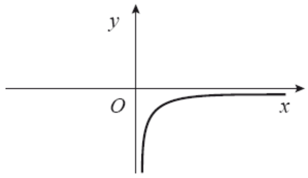
$(A)\ \left]-e, -\frac{1}{e}\right[$ $\quad$ $(B)\ \left]-\frac{1}{e}, 0\right[$ $\quad$ $(C)\ \left]0, \frac{1}{e}\right[$ $\quad$ $(D)\ \left]\frac{1}{e}, 1\right[$ *(2014)*

173. Considere, para um certo número real *a* positivo, a função *f*, de domínio IR^+, definida por $f(x) = a + \ln\left(\frac{a}{x}\right)$. Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função $f\,'$, primeira derivada da função *f* ?

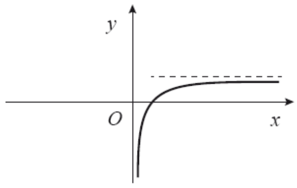
(A)



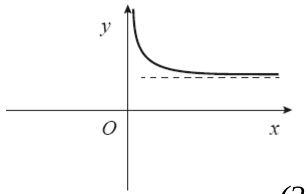
(B)



(C)



(D)



(2014)

174. Considere a função *f* , de domínio IR, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x} & se\ x < 4 \\ \ln\left(2e^x - e^4\right) & se\ x \geq 4 \end{cases}$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

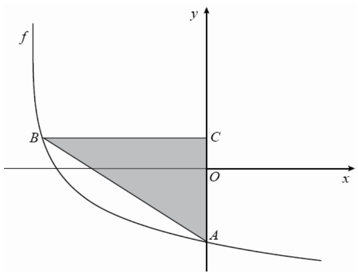
a) Averigue se a função *f* é contínua em *x*=4.

b) O gráfico da função *f* tem uma assíntota oblíqua quando *x* tende para $+\infty$, de equação $y = x + b$, com $b \in IR$. Determine *b*. *(2014)*

175. Considere a função *f*, de domínio $\left]-e^2, +\infty\right[$, definida por $f(x) = -\ln\left(x + e^2\right)$. Na figura ao lado estão representados, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função *f* e o triângulo [ABC].

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas (0, -2)
- o ponto B pertence ao gráfico da função *f* e tem abcissa negativa;
- o ponto C pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto B
- a área do triângulo [ABC] é igual a 8



Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

– escrever uma expressão da área do triângulo [ABC] em função da abcissa do ponto B

– equacionar o problema;

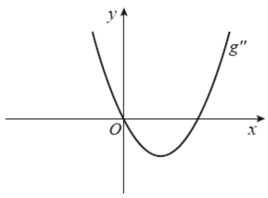
– reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;

– indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas. *(2014)*

176. Seja g uma função, de domínio $\left]-\infty, e\right[$, definida por $g(x) = \ln(e - x)$. Considere a sucessão estritamente crescente de termo geral $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Qual é o valor de $\lim g\left(x_n\right)$? *(2014)*

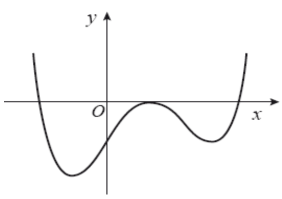
$(A)\,+\infty$ $(B)\,e$ $(C)\,1$ $(D)\,-\infty$

177. Na figura ao lado está representada, num referencial ortogonal *xOy*, parte do gráfico da função *g ´´* segunda derivada de uma função *g*

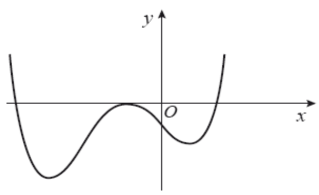


Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função *g* ?

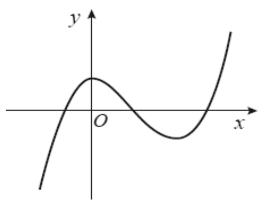
(A)



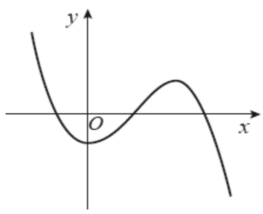
(B)



(C)



(D)



178. Considere as funções *f* e *g*, de domínio $]-\infty,0[$, definidas por $f(x)=x-1+\dfrac{\ln(-x)}{x}$ e $g(x)=-x+f(x)$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função *f* quanto à existência de assíntotas do seu gráfico e, caso existam, indique as suas equações.

b) Mostre que a condição $f(x)=-e$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e,-1[$

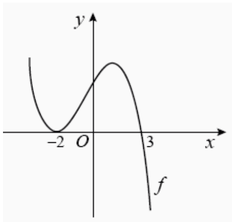
c) Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.
Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de *x* para os quais a função *g* tem extremos relativos. *(2014)*

179. Considere, num referencial o.n. *xOy*, a representação gráfica da função *f*, de domínio $[0,10]$, definida por $f(x)=-e^{\frac{x}{2}}+x^2+8$, e dois pontos A e B. Sabe-se que:

• o ponto A é o ponto de intersecção do gráfico da função *f* com o eixo das ordenadas;
• o ponto B pertence ao gráfico da função *f* e tem abcissa positiva; a reta AB tem declive -2.

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
– equacionar o problema;
– reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
– indicar o valor da abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas. *(2014)*

180. Na figura ao lado está representada, num referencial o.n. *xOy*, parte do gráfico de uma função polinomial *f*, de grau 3. Sabe-se que: *h´*, primeira derivada de uma função *h*, tem domínio *IR* e é definida por $h'(x)=\dfrac{f(x)}{e^{2x}}$; -2 e 3 são os únicos zeros da função *f*; a função *f* tem um extremo relativo em $x=-2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=3$.



Considere as afirmações seguintes.
I) A função h tem dois extremos relativos. II) h´´(-2)=0
III) y+3=0 é uma equação da assíntota do gráfico da função h quando x tende para $+\infty$.
Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação. *(2014)*

181. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real k, igual a $\log_3\left(\dfrac{3^k}{9}\right)$?

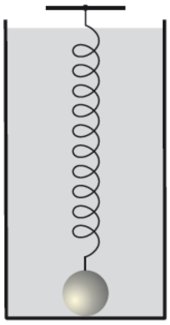
$(A)\ \dfrac{k}{2}$ $(B)\ k-2$ $(C)\ \dfrac{k}{9}$ $(D)\ k-9$ *(2015)*

182. Considere a função *f*, de domínio IR^+, definida por $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

Considere a sucessão de termo geral $u_n=n^2$. Qual é o valor de $\lim f(u_n)$? *(2015)*

$(A)\ 0$ $(B)\ 1$ $(C)\ e$ $(D)\ +\infty$

183. Na Figura 3, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso.



Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada. Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, *t* segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por $d(t)=10+(5-t)e^{-0{,}05t}$ com $(t\geq 0)$.

a) Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é 16cm. Determine o volume da esfera. Apresente o resultado em cm³, arredondado às centésimas.

b) Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. *(2015)*

184. Seja *f* a função, de domínio *IR*, definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1} & \text{se } x<\dfrac{1}{2}\\ (x+1)\ln x & \text{se } x\geq\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Averigue da existência de assíntotas verticais do gráfico da função *f*.

b) Estude a função *f* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$. Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de *f* tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de *f* tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de *f*.

c) Mostre que a equação $f(x)=3$ é possível em $]1,e[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas. Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação $f(x)=3$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1,e[$;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida. *(2015)*

185. Para certos valores de *a* e de *b* $(a>1 \text{ e } b>1)$, tem-se $\log_b a=\frac{1}{3}$.

Qual é, para esses valores de *a* e de *b*, o valor de $\log_a(a^2b)$?

(*A*) $\frac{2}{3}$ (*B*) $\frac{5}{3}$ (*C*) 2 (*D*) 5 *(2015)*

186. Para um certo número real *k*, é contínua em *IR* a função *f* definida por $f(x)=\begin{cases}2+e^{x+k} & \text{se } x\leq 0\\ \dfrac{2x+\ln(x+1)}{x} & \text{se } x>o\end{cases}$.

Qual é o valor de k? (*A*) 0 (*B*) 1 (*C*) $\ln 2$ (*D*) $\ln 3$ *(2015)*

187. Seja *f* a função, de domínio *IR*, definida por $f(x)=\begin{cases}1+xe^x & \text{se } x\leq 3\\ \ln(x-3)-\ln(x) & \text{se } x>3\end{cases}$

Resolva os itens a), b) e c), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função *f* quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

b) Resolva, em $]-\infty,3]$, a condição $f(x)-2x>1$.

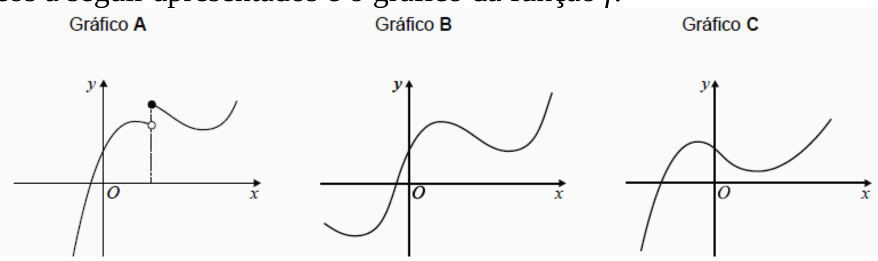
Apresente o conjunto solução, usando a notação de intervalos de números reais.

c) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa 4.

(2015)

188. Seja $f:IR\to IR$ uma função tal que: *f* tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio; $f'(0)>0$; $f''(x)<0$, para qualquer $x\in]-\infty,0[$.

Nenhum dos gráficos a seguir apresentados é o gráfico da função *f*.



Elabore uma composição na qual apresente, para cada um dos gráficos, uma razão pela qual esse gráfico não pode ser o gráfico da função *f*. *(2015)*

189. Admita que, ao longo dos séculos XIX, XX e XXI, o número de habitantes, N, em milhões, de uma certa região do globo é dado aproximadamente por $N(t)=\dfrac{200}{1+50e^{-0,25t}}\ (t\geq 0)$.

em que *t* é o tempo medido em décadas e em que o instante t = 0 corresponde ao **final** do ano 1800.

a) Determine a taxa média de variação da função N no intervalo [10, 20]. Apresente o resultado arredondado às unidades. Interprete o resultado, no contexto da situação descrita.

b) Mostre que $t=\ln\left(\dfrac{50N}{200-N}\right)^4$ ***(2015-especial)***

190. Seja *f* a função, de domínio IR_0^+, definida por $f(x)=x^2e^{1-x}$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal.

b) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

c) Considere, num referencial o.n. xOy, três pontos, A, B e C, tais que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função *f*;
- a abcissa do ponto B é maior do que a abcissa do ponto A;
- os pontos A e B têm a mesma ordenada, a qual é igual a 1,2;
- o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à do ponto B.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a área do quadrilátero [OABC], sendo O a origem do referencial. Na sua resposta:

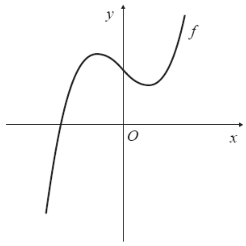
- reproduza, num referencial, o gráfico da função f no intervalo [0, 5];
- apresente o desenho do quadrilátero [OABC];
- indique as abcissas dos pontos A e B arredondadas às milésimas;
- apresente a área do quadrilátero arredondada às centésimas. ***(2015-especial)***

191. Seja f uma função de domínio IR. Sabe-se que $f'(2)=6$. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-2x}$?

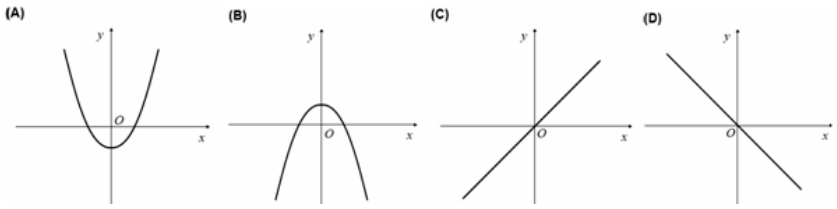
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

(2015-especial)

192. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial *f*.



Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f'', segunda derivada da função *f*?



(2015-especial)

193. Seja *a* um número real. Seja a função f, de domínio R^+, definida por $f(x)=e^{a\ln x}$. Considere, num referencial o.n. xOy, o ponto P(2, 8). Sabe-se que o ponto P pertence ao gráfico de f. Qual é o valor de *a*?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 ***(2015-especial)***

194. Seja *a* um número real diferente de 0. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{ae^{x-a}-a}{x^2-a^2}$?

$(A)\dfrac{1}{4}$ $(B)\dfrac{1}{2}$ $(C)1$ $(D)2$ ***(2016-1ª fase)***

195. Seja *f* uma função de domínio IR^-. Sabe-se que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+e^x-x}{x}=1$ e que o gráfico de *f* tem uma assíntota oblíqua. Qual é o declive dessa assíntota?

(A) −2 (B) −1 (C) 1 (D) 2 ***(2016-1ª fase)***

196. Considere as sucessões $(u_n)\ e\ (v_n)$ de termos gerais $u_n=\dfrac{kn+3}{2n}\ (k\,é\,um\,n^o\,real)\ e\ v_n=\ln\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$

Sabe-se que $\lim(u_n)=\lim(v_n)$. Qual é o valor de k ?

(A) 1 (B) 2 (C) e (D) $2e$ ***(2016-1ª fase)***

197. Seja *f* uma função, de domínio *IR*, cuja derivada, $f\,'$, de domínio IR, é dada por $f\,'(x)=e^x\left(x^2+x+1\right)$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Sejam *p* e *q* dois números reais tais que $p=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ e $q=-\dfrac{1}{p}$.

Determine o valor de *q* e interprete geometricamente esse valor.

b) Estude a função *f* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão. Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de *f* tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de *f* tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de *f*. ***(2016-1ª fase)***

198. Considere a função f, de domínio $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$, definida por $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Resolva os itens a) e b), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

b) Seja *a* um número real maior do que 1. Mostre que a reta secante ao gráfico de f nos pontos de abcissas *a* e *-a* passa na origem do referencial. ***(2016-1ªfase)***

199. Para certos valores de *a*>1 e *b*>1, tem-se $\log_a\left(ab^3\right)=5$. Qual é, para esses valores de *a* e de *b*, o valor de $\log_b a$? $(A)\dfrac{5}{3}$ $(B)\dfrac{3}{4}$ $(C)\dfrac{3}{5}$ $(D)\dfrac{1}{3}$ ***(2016-2ª fase)***

200. Considere a função f, de domínio IR$^+$, definida por $f(x)=\ln x$. Considere a sucessão de termo geral $u_n=\dfrac{n}{e^n}$. Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

$(A)-\infty$ $(B)0$ $(C)e$ $(D)+\infty$ ***(2016-2ª fase)***

201. Seja f a função, de domínio $\left]-\dfrac{\pi}{2},+\infty\right[$, definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+senx}{\cos x} & se\ -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0\\ x-\ln x & se\ x>0\end{cases}$

Resolva o item a) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntota oblíqua do seu gráfico.

b) Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\dfrac{1}{2}$. Além do ponto de tangência, a reta *r* intersecta o gráfico de *f* em mais dois pontos, A e B, cujas abcissas pertencem ao intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$ (considere que o ponto A é o de menor abcissa). Determine analiticamente a equação reduzida da reta *r* e, utilizando a calculadora gráfica, obtenha as abcissas dos pontos A e B. Apresente essas abcissas arredondadas às centésimas. Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema. ***(2016-2ª fase)***

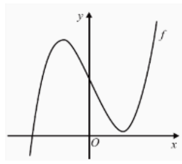
202. O José e o António são estudantes de Economia. O José pediu emprestados 600 euros ao António para comprar um computador, tendo-se comprometido a pagar o empréstimo em prestações mensais sujeitas a um certo juro. Para encontrarem as condições de pagamento do empréstimo, os dois colegas adaptaram uma fórmula que tinham estudado e estabeleceram um contrato. Nesse contrato, a prestação mensal *p*, em euros, que o José tem de pagar ao António é dada por $p=\dfrac{600x}{1-e^{-nx}}\ (x>0)$ em que *n* é o número de meses em que o empréstimo será pago e x é a taxa de juro mensal.

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos.
Na resolução do item a) pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

a) O José e o António acordaram que a taxa de juro mensal seria $0{,}3\%\ (x=0{,}003)$. Em quantos meses será pago o empréstimo, sabendo-se que o José irá pagar uma prestação mensal de 24 euros? Apresente o resultado arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais. ***(2016-2ª fase)***

b) Determine $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{600x}{1-e^{-nx}}$, em função de *n*, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

203. Seja *g* uma função contínua, de domínio *IR*, tal que para todo o número real $x, \left(g\circ g\right)(x)=x$ e para um certo número real *a*, tem-se $g(a)>a+1$. ***(2016-2ª fase)***
Mostre que a equação $g(x)=x+1$ é possível no intervalo $\left]a,\ g(a)\right[$.



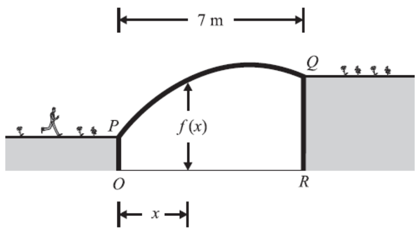
204. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial *f*. Sabe-se que o único ponto de inflexão do gráfico de f tem abcissa 0. Seja f'' a segunda derivada da função *f*. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(*A*) $f''(1)+f''(2)<0$ (*B*) $f''(-2)+f''(-1)>0$ (*C*) $f''(-1)\times f''(-2)<0$ (*D*) $f''(1)\times f''(2)>0$ ***(2017-1ª fase)***

205. Sejam f e g duas funções de domínio IR^+. Sabe-se que a reta de equação y= −x é assíntota oblíqua do gráfico de f e do gráfico de g. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\times g(x)}{x}$?

(A) $+\infty$ (B) 1 (C) −1 (D) $-\infty$ ***(2017-1ª fase)***

206. Na figura, está representada uma secção de uma ponte pedonal que liga as duas margens de um rio. A ponte, representada pelo arco PQ, está suportada por duas paredes, representadas pelos segmentos de reta [OP] e [RQ]. A distância entre as duas paredes é 7 metros. O segmento de reta [OR] representa a superfície da água do rio. Considere a reta OR como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a 1 metro. Para cada ponto situado entre O e R, de abcissa x, a distância na vertical, medida em metros, desse ponto ao arco PQ é dada por $f(x)=9-2{,}5\left(e^{1-0{,}2x}+e^{0{,}2x-1}\right),\ com\ x\in[0,7]$.

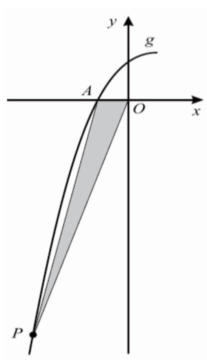


Resolva os itens seguintes recorrendo a métodos analíticos; utilize a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

a) Seja S o ponto pertencente ao segmento de reta [OR] cuja abcissa x verifica a equação $\sqrt{\left(f(0)\right)^2+x^2}=2$. Resolva esta equação, apresentando a solução arredondada às décimas, e interprete essa solução no contexto da situação descrita. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

b) O clube náutico de uma povoação situada numa das margens do rio possui um barco à vela. Sempre que esse barco navega no rio, a distância do ponto mais alto do mastro à superfície da água é 6 metros. Será que esse barco, navegando no rio, pode passar por baixo da ponte? ***(2017-1ª fase)***

207. Seja g a função, de domínio IR, definida por $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & se\ x<1\\ 2 & se\ x=1\\ 3+\dfrac{\sin\left(x-1\right)}{1-x} & se\ x>1\end{cases}$



Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função g quanto à continuidade no ponto 1.

b) Resolva, no intervalo]4,5[, a equação g(x)=3.

c) Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g e um triângulo [OAP]. Sabe-se que:

- o ponto A, de abcissa negativa, é a intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas;
- o ponto P é um ponto do gráfico da função g, de abcissa e ordenada negativas;

- a área do triângulo [OAP] é igual a 5.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto P. Apresente o valor obtido arredondado às décimas. Na sua resposta:
- determine analiticamente a abcissa do ponto A;
- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação. ***(2017-1ª fase)***

208. Seja $f: IR^+ \to IR^+$ uma função tal que $f'(x) < 0$, para qualquer número real positivo *x*. Considere, num referencial o.n. xOy: um ponto P, de abcissa *a*, pertencente ao gráfico de *f*; a reta r, tangente ao gráfico de f no ponto P; o ponto Q, ponto de intersecção da reta r com o eixo O*x*.

Sabendo que $\overline{OP} = \overline{PQ}$, determine o valor de $f'(a) + \frac{f(a)}{a}$. ***(2017-1ª fase)***

209. De uma função *f*, de domínio IR, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio, sabe-se que $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4$. Qual é o valor de f ´(2)?

$(A) -\frac{1}{2}$ $(B) -\frac{1}{4}$ $(C) \frac{1}{2}$ $(D) \frac{1}{4}$ ***(2017-2ª fase)***

210. Na Figura 1, está representado o gráfico de uma função f , de domínio [−1,6], e, na Figura 2, está representada parte do gráfico de uma função g , de domínio IR. Tal como as figuras sugerem, em ambas as funções, todos os objetos inteiros têm imagens inteiras.
Quais são os zeros da função $g \circ f$?

(A) 0 e 4 (B) 1 e 5 (C) −1 e 3 (D) 2 e 6

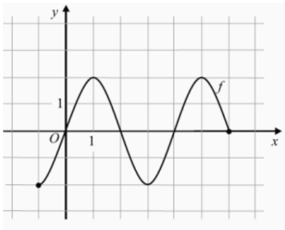


Figura 1

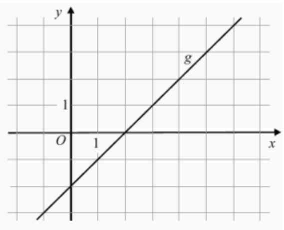


Figura 2

(2017-2ª fase)

211. Seja *f* uma função de domínio IR. A tabela de variação de sinal da função f '', segunda derivada de f, está representada ao lado. Seja g a função definida por $g(x) = -f(x-5)$. Em qual dos intervalos seguintes o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo?

x	$-\infty$	-10		0		10	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

(A)]−15,−5[(B)]0,10[(C)]−5,5[(D)]5,15[***(2017-2ª fase)***

212. Considere a função f, de domínio IR$^+$, definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Resolva os três itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

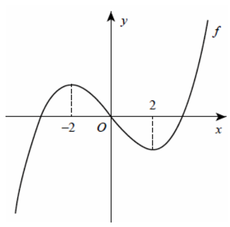
b) Resolva a inequação $f(x) > 2\ln x$. Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

c) Para um certo número real *k*, a função *g*, de domínio IR$^+$, definida por $g(x) = \frac{k}{x} + f(x)$, tem um extremo relativo para $x = 1$. Determine esse número *k*. ***(2017-2ª fase)***

213. Seja a um número real superior a 1. Qual é o valor de $4 + \log_a\left(5^{\ln a}\right)$? ***(2017-E.Especial)***

$(A) \ln(10e)$ $(B) \ln\left(5e^4\right)$ $(C) \ln\left(5e^2\right)$ $(D) \ln(20e)$

214. Na Figura está representada, num referencial o.n. *xOy*, parte do gráfico de uma função *f* , polinomial do terceiro grau.
Tal como a figura sugere, a função *f* tem um máximo relativo para $x = -2$ e tem um mínimo relativo para $x = 2$.
A origem do referencial é ponto de inflexão do gráfico de *f*.
Sejam *f '* e *f ''* a primeira e a segunda derivadas da função *f* , respetivamente.
Qual é o conjunto solução da condição $f'(x) \times f''(x) \geq 0$? ***(2017-E.Especial)***



$(A)\ [-2,0] \cup [2,+\infty[$ $(B)\ ]-\infty,-2] \cup [0,2]$ $(C)\ ]-\infty,0] \cup [2,+\infty[$ $(D)\ ]-\infty,-2] \cup [0,+\infty[$

215. Sejam *f* e *g* duas funções de domínio IR, tais que a função $f-g$ admite inversa.

Sabe-se que $f(3)=4$ e que $\left(f-g\right)^{-1}(2)=3$. Qual é o valor de $g(3)$?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 ***(2017-E.Especial)***

216. Pretende-se eliminar um poluente diluído na água de um tanque de um viveiro. Para tal, é escoada água por um orifício na base do tanque e, em simultâneo, é vertida no tanque água não poluída, de tal modo que a quantidade total de água no tanque se mantém.

Admita que a massa, *p*, de poluente, medida em gramas, *t* horas após o início do processo, é, para um certo número real positivo *k*, dada por $p(t)=120e^{-kt}$, $(t\geq 0)$.

Resolva os itens **a)** e **b)** recorrendo exclusivamente a métodos analíticos.

Na resolução do item b) pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

a) Determine o valor de *k*, sabendo que, duas horas após o início do processo, a massa de poluente é metade da existente ao fim de uma hora. Apresente o resultado na forma $\ln a$, com $a>1$.

b) Admita agora que $k=0,7$.

Determine a taxa média de variação da função *p* no intervalo $\left[0,3\right]$ e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita. Apresente o valor da taxa média de variação arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

(2017-E.Especial)

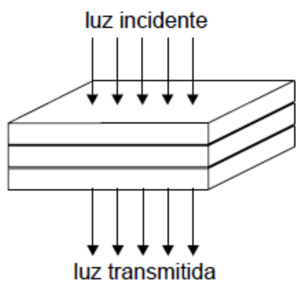
217. Seja *f* uma função diferenciável no intervalo $\left[0,2\right]$ tal que: $f(0)=1$ e $\forall x\in\left[0,2\right],\ 0<f'(x)<9$.

O teorema de Lagrange, aplicado à função *f* em $\left[0,2\right]$, permite concluir que:

$(A)\,0<f(2)<18$ $(B)\,1<f(2)<19$ $(C)\,2<f(2)<20$ $(D)\,3<f(2)<21$

(*2018-1ª fase - Caderno 1*)

218. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre um conjunto de três placas sobrepostas, homogéneas e iguais, feitas de um material transparente. A Figura 3 ilustra a situação. Admita que a potência, *L*, da luz transmitida, após atravessar o conjunto de placas, é dada por $L=I\left(1-R\right)^{6}e^{-3\lambda}$ em que:



- *I* é a potência da luz incidente;
- *R* é o coeficiente de reflexão do material $\left(0<R<1\right)$;
- λ é o coeficiente de absorção do material, por centímetro $\left(\lambda>0\right)$.

Relativamente ao material de que as placas são feitas, sabe-se que o coeficiente de reflexão, *R*, e o coeficiente de absorção, λ, têm o mesmo valor numérico.

Sabe-se ainda que a potência da luz transmitida é igual a metade da potência da luz incidente.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor comum dos coeficientes de absorção e de reflexão do material, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido arredondado às milésimas. **(*2018-1ª fase - Caderno 1*)**

219. Seja *k* um número real. Considere a sucessão convergente $\left(u_n\right)$ definida por $u_n=\left(\dfrac{n+k}{n}\right)^{n}$.

Sabe-se que o limite de $\left(u_n\right)$ é solução da equação $\ln\left(\dfrac{x}{e}\right)=3$. Qual é o valor de *k* ?

$(A)\,\dfrac{1}{4}$ $(B)\,3$ $(C)\,\dfrac{1}{3}$ $(D)\,4$ **(*2018-1ª fase - Caderno 2*)**

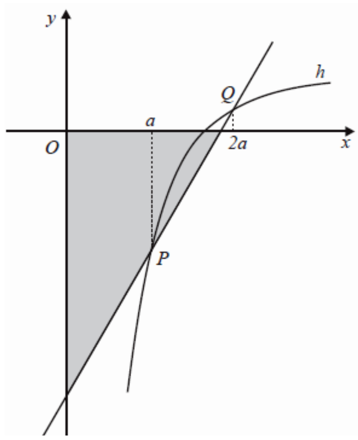
220. Sejam a e b números reais superiores a 1 tais que $\ln b = 4\ln a$

Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $a^x \geq b^{\frac{1}{x}}$
Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais. ***(2018-1ª fase - Caderno 2)***

221. Seja g a função, de domínio $]-\infty, \pi]$ definida por $g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{4x}, & x<0 \\ \dfrac{1}{2-sen(2x)}, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

a) Qual das afirmações seguintes é verdadeira?
(A) A função g não tem zeros. **(B)** A função g tem um único zero.
(C) A função g tem exatamente dois zeros. **(D)** A função g tem exatamente três zeros.
b) Averigue se a função g é contínua no ponto 0. Justifique a sua resposta.
c) Estude a função g quanto à monotonia no intervalo $]0, \pi]$ e determine, caso existam, os extremos relativos. ***(2018-1ª fase - Caderno 2)***

222. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função h, de domínio IR^+, definida por $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.



Para cada número real a pertencente ao intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, sejam P e Q os pontos do gráfico da função h de abcissas a e $2a$, respetivamente.
Tal como a figura sugere, a reta PQ define, com os eixos coordenados, um triângulo retângulo.
Mostre que existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ para o qual esse triângulo é isósceles.
Sugestão: comece por identificar o valor do declive da reta PQ para o qual o triângulo é isósceles.
(2018-1ª fase - Caderno 2)

223. A primeira derivada de uma função f, de domínio $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, é dada por $f'(x) = 3x - tg\, x$.

Sabe-se que o gráfico de f tem um único ponto de inflexão.
Qual é a abcissa desse ponto, arredondada às centésimas?
(A) 0,84 **(B)** 0,88 **(C)** 0,92 **(D)** 0,96
(2018-2ª fase - Caderno 1)

224. Qual é o valor do limite da sucessão de termo geral $\left(\dfrac{n+5}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$?

$(A)\,+\infty$ $(B)\,1$ $(C)\,e^4$ $(D)\,e^2$ ***(2018-2ª fase - Caderno 2)***

225. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x)$.
Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.
(2018-2ª fase - Caderno 2)

226. Seja f a função, de domínio IR, definida por $f(x) = \begin{cases} 3 + \dfrac{e^x}{1-x} & \text{se } x<1 \\ \dfrac{\ln\left(x^2\right)+2}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

a) Determine $f'(0)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.
b) Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

c) Seja *h* a função, de domínio IR, definida por $h(x)=x+1$.

Qual é o valor de $\left(f o h^{-1}\right)(2)$? (o símbolo *o* designa a composição de funções)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 **(*2018-2ª fase - Caderno 2*)**

227. Na cidade de Saint Louis, nos Estados Unidos, existe um monumento em forma de arco conhecido como Portal do Oeste. No ponto mais elevado desse arco, encontra-se um miradouro ao qual se acede por um ascensor. A figura 1 é uma fotografia dessa estrutura e a figura 2 representa um esquema do arco. Relativamente à Figura 2, sabe-se que:

- os pontos *A* e *B* representam a intersecção do arco com o solo;
- o ponto *O* é o ponto médio de [A];
- o ponto *C* representa o miradouro, e a reta *OC* é um eixo de simetria do arco.

Figura 1

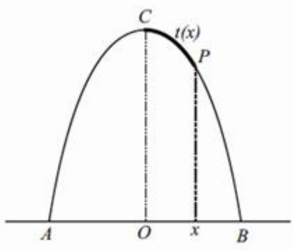


Figura 2

Considere a reta *AB* como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto *O* e em que uma unidade corresponde a um metro.

Admita que o ascensor se está a deslocar no arco *CB*, do miradouro *C* para o ponto *B*.

Para cada ponto *P*, de abcissa *x*, situado no arco *CB*, o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco *CP* é dado, em minutos, por $t(x)=0{,}34\left(e^{0{,}0257x}-e^{-0{,}0257x}\right)$, com $x\left[0{,}96\right]$.

Num certo instante, o ascensor encontra-se num ponto *F* (não coincidente com o ponto *C*), a uma certa distância da reta *OC*. Passado algum tempo, o ascensor encontra-se num ponto *G*.

A Figura 3 ilustra a situação. Sabe-se que:

- a distância do ponto G à reta OC é igual ao triplo da distância do ponto F à mesma reta;
- o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco que vai de F até G é igual ao triplo do tempo que demora a percorrer o arco que vai de C até F.

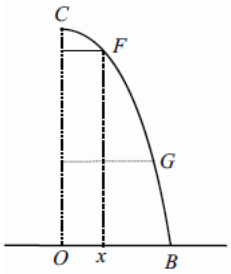


Figura 3

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a distância, *x*, em metros, do ponto *F* à reta *OC*. Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor da distância pedida arredondado às décimas. **(*2018-EE - Caderno 1*)**

228. Seja *g* uma função real, de domínio $\left[0{,}1\right]$. Sabe-se que a função *g* não tem mínimo.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) A função *g* não tem zeros. (B) A função *g* não é limitada.

(C) A função *g* não tem máximo. (D) A função *g* não é contínua. **(*2018-EE - Caderno 2*)**

229. Qual é o valor do limite da sucessão $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n}$?

$(A)\,1$ $(B)\ e$ $(C)\ e^2$ $(D)\ +\infty$ **(*2018-EE* - Caderno *2*)**

230. Considere a função *f*, de domínio IR^{+}, definida por $f(x)=x^3+6\ln x$.

Estude a função *f* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão. Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de *f*.

(*2018-EE - Caderno 2*)

231. Qual é o limite da sucessão de termo geral $\left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n}$?

$(A)\ \frac{1}{e^3}$ $\quad(B)\ e^3$ $\quad(C)\ \frac{1}{e^6}$ $\quad(D)\ e^6$ ***(2019 - 1ª - Cad 1)***

232. Seja g a função, de domínio $IR\setminus\{0\}$, definida por $g(x)=\frac{e^{-x}}{x}$

a) Estude a função g quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

b) Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $h(x)=g(x)+2x-\frac{1}{\sqrt{x}}$. Sabe-se que o gráfico da função h tem uma assíntota oblíqua. Qual é o declive dessa assíntota?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** e **(D)** e^2 ***(2019 - 1ª - Cad 2)***

233. Sejam a e b dois números reais positivos tais que a>b. Sabe-se que $a+b=2(a-b)$. Qual é o valor, arredondado às décimas, de $\ln\left(a^2-b^2\right)-2\ln\left(a+b\right)$?

(A) 0,7 **(B)** 1,4 **(C)** −0,7 **(D)** −1,4 ***(2019 - 1ª - Cad 1)***

234. Para um certo número real k, é contínua em IR a função f, definida por $f(x)=\begin{cases}\log_3 k & se\ x=1\\ \frac{x^2-1}{x-1} & se\ x\neq 1\end{cases}$

Qual é o valor de k ?

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 9 ***(2019 - 2ª - Cad 1)***

235. Qual é, para qualquer número real positivo a, o limite da sucessão $\left(\frac{n+\ln a}{n}\right)^{n+2}$?

(A) a^2 **(B)** 2^a **(C)** a **(D)** $\sqrt{a}$ ***(2019 - 2ª - Cad 2)***

236. Uma lente de contacto é um meio transparente limitado por duas faces, sendo cada uma delas parte de uma superfície esférica. Na Figura 2, pode observar-se uma lente de contacto. Na Figura 3, está representado um corte longitudinal de duas superfícies esféricas, uma de centro C_1 e raio r_1 e outra de centro C_2 e raio r_2, com $r_2>r_1$, que servem de base à construção de uma lente de contacto, representada a sombreado na figura. Seja $x=\overline{C_1C_2}$. Sabe-se que o diâmetro, d, da lente é dado por $\frac{\sqrt{\left[\left(r_1+r_2\right)^2-x^2\right]\left[x^2-\left(r_1-r_2\right)^2\right]}}{x}$, $\quad com\ r_2-r_1<x<\sqrt{r_2^{\,2}-r_1^{\,2}}$.

Figura 2

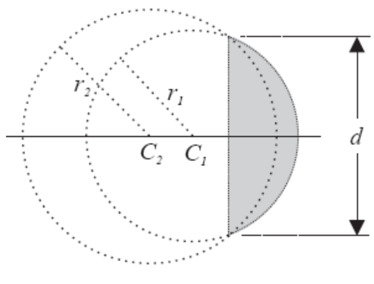


Figura 3

Uma lente de contacto foi obtida a partir de duas superfícies esféricas com 7 mm e 8 mm de raio, respetivamente.

O diâmetro dessa lente excede em 9 mm a distância, x, entre os centros das duas superfícies esféricas. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de x, sabendo-se que esse valor é único no intervalo $\left]r_2-r_1,\sqrt{r_2^{\,2}-r_1^{\,2}}\right[$. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido em milímetros, arredondado às décimas. ***(2019 - 1ª - Cad 1)***

237. O nível, *N*, de um som, medido em decibéis, é função da sua intensidade, *I*, medida em microwatt por metro quadrado $\left(\mu W / m^2\right)$, de acordo com a igualdade $N = 60 + 10\log_{10} I, \quad com\ I > 0$

Relativamente ao som de um certo despertador, sabe-se que, aumentando a sua intensidade em 150 $\mu W / m^2$, o seu nível passa a ser 1,4% do quadrado do nível inicial. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor da intensidade inicial do som desse despertador, sabendo-se que pertence ao intervalo [20,80] e que, neste intervalo, esse valor é único. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) obter o valor pedido;
- apresente esse valor em $\mu W / m^2$, arredondado às unidades. ***(2019 - 2ª - Cad 1)***

238. Considere a função *h* , de domínio IR\{1}, definida por $h(x) = \frac{e^x}{x-1}$

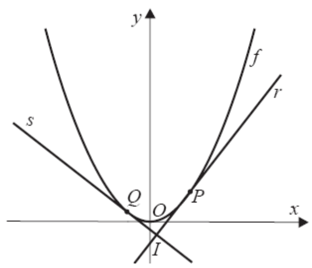
a) Estude a função *h* quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

b) Resolva, em IR\{1}, a equação $\left(x-1\right) \times h(x) + 2e^{-x} = 3$ ***(2019 - 2ª - Cad 2)***

239. Na Figura, está representado o gráfico da função *f*, definida em IR por $f(x) = x^2$.

Considere que um ponto *P*, de abcissa positiva, se desloca sobre o gráfico da função *f*. Para cada posição do ponto *P*, seja:

- *r* a reta tangente ao gráfico de *f* nesse ponto;
- *s* a reta perpendicular a *r* e tangente ao gráfico de *f*
- *Q* o ponto de tangência da reta *s* com o gráfico de *f*
- *I* o ponto de intersecção das retas *r* e *s*

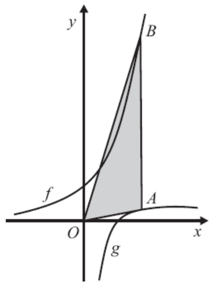


Mostre que, qualquer que seja a abcissa do ponto *P*, a ordenada do ponto *I* é sempre igual a $-\frac{1}{4}$. Sugestão: Designe a abcissa do ponto *P* por *a*.

(2019 - 2ª - Cad 2)

240. Na Figura, estão representadas, em referencial o.n. *xOy*:

- parte do gráfico da função *f*, de domínio IR , definida por $f(x) = e^x$
- parte do gráfico da função *g*, de domínio IR$^+$, definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$



Considere que um ponto *A* se desloca no primeiro quadrante sobre o gráfico da função *g*. Para cada posição do ponto *A*, seja *B* o ponto do gráfico da função *f* cuja abcissa é igual à do ponto *A*. Seja *a (a>1)* a abcissa comum dos pontos *A* e *B*. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de *a* para o qual a área do triângulo [*OAB*] é igual a 5, sabendo-se que esse valor existe e é único. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de *a* arredondado às décimas. ***(2019 - EE - Cad 1)***

241. Para um certo número real *k*, é contínua em IR a função *f*, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+x-2} & se\ x > 1 \\ k & se\ x \leq 1 \end{cases}$

Qual é o valor de *k* ?

$(A)\,2 \qquad (B)\,3 \qquad (C)\,\frac{1}{3} \qquad (D)\,\frac{1}{2}$ ***(2019 - EE - Cad 1)***

242. Sejam *f* e *g* duas funções de domínio IR. Sabe-se que $f(x)=2x+1$ e que $(f\circ g)(x)=7$, para todo o valor real de *x*. Qual das seguintes expressões define a função *g* ?
(A) −3 (B) 3 (C) *x* − 3 (D) *x* + 3 ***(2019 - EE - Cad 2)***

243. Considere a função *f*, de domínio IR^+, definida por $f(x)=\ln x$. Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n=\left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n}{4}}$. Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

$(A)4$ $(B)2$ $(C)\frac{1}{2}$ $(D)\frac{1}{4}$ ***(2019 - EE - Cad 2)***

244. Seja *g* a função, de domínio IR , definida por $g(x)=\begin{cases} x\ln(1-x) & se\ x\le 0 \\ \dfrac{1-3x}{1-e^{-x}} & se\ x>0 \end{cases}$

a) Qual é o declive da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa −1?
(A) 0,5 +ln 2 (B) -0,5+ln 2 (C) 0,5 −ln 2 (D) −0,5−ln 2

b) O gráfico da função *g* tem uma assíntota oblíqua, quando $x\to+\infty$.
Determine a equação reduzida dessa assíntota. ***(2019 - EE - Cad 2)***

245. Seja f a função definida em $]-\infty,2]$ por $f(x)=x+\ln(e^x+1)$

Resolva as alíneas a) e b) sem recorrer à calculadora.

a) O gráfico de *f* tem uma assíntota oblíqua. Determine uma equação dessa assíntota.

b) A equação $f(x)=2x+1$ tem uma única solução. Determine essa solução e apresente-a na forma $-\ln k$, com k>0.

c) Seja h a função definida em $]-\infty,2]$ por $h(x)=f(x)-x$. Qual das expressões seguintes pode ser a expressão analítica da função h^{-1}, função inversa de *h* ?
$(A)e^x-1$ $(B)1-e^x$ $(C)\ln(e^x-1)$ $(D)\ln(1-e^x)$ ***(2020 1ª)***

246. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n=\frac{8n-4}{n+1}$

Seja *f* a função, de domínio $]-\infty,8[$, definida por $f(x)=\log_2(8-x)$. A que é igual $\lim f(u_n)$?
$(A)-\infty$ $(B)0$ $(C)1$ $(D)+\infty$ **(2020 1ª)**

247. Dados dois números reais positivos, sabe-se que a soma dos seus logaritmos na base 8 é igual a $\frac{1}{3}$. A que é igual o produto desses dois números?
(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 8 **(D)** 9 ***(2020 2ª)***

248. Seja *h* a função, de domínio $]-\infty,4[$, definida por $h(x)=\begin{cases} 1+xe^{x-1} & se\,x\le 1 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{sen(x-1)} & se\,1<x<4 \end{cases}$

Sem recorrer à calculadora, mostre que o gráfico da função *h* tem uma assíntota horizontal e apresente uma equação dessa assíntota. ***(2020 2ª)***

249. Seja *f* uma função, de domínio $]0,+\infty[$, cuja derivada, *f ´*, de domínio $]0,+\infty[$, é dada por $f\,'(x)=\frac{2+\ln x}{x}$.

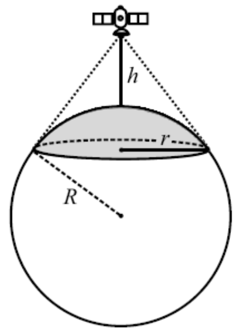
a) Sem recorrer à calculadora, estude a função *f* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão. Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

b) Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{1-x^2}$?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 2 ***(2020 2ª)***

250. Os satélites artificiais são utilizados para diversos fins e a altitude a que são colocados depende do fim a que se destinam. Admita que a Terra é uma esfera. A Figura apresenta um esquema em que se pode observar a superfície terrestre coberta por um satélite, quando este se encontra numa certa posição. Nesta figura,



- R é o raio, em quilómetros, da Terra e h é a altitude, em quilómetros, do satélite ($h>0$)
- r é o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite ($0<r<R$)
- as grandezas h e r podem relacionar-se por meio da igualdade $r=\dfrac{R}{h+R}\sqrt{h^2+2hR}$

Sabe-se que, para cada posição do satélite, a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é dada por $50\left(1-\sqrt{1-\left(\dfrac{r}{R}\right)^2}\right)$

a) Qual é a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se o raio da base da calote esférica for igual a $\dfrac{3}{5}$ do raio da Terra?

(A) 20% **(B)** 15% **(C)** 10% **(D)** 5%

b) Considere que o raio da Terra é 6400 km.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se a altitude deste for igual ao raio da base da respetiva calote esférica. Apresente o resultado arredondado às unidades. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

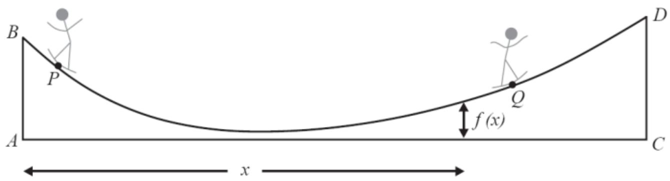
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;

– apresente o valor pedido arredondado às unidades.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

(2020 2ª)

251. Um município construiu, num dos seus parques, uma rampa de *skate* entre duas paredes verticais distanciadas 21 metros uma da outra. Na figura ao lado, estão representados um corte longitudinal da rampa e dois jovens, cada um no seu *skate*. Nesta figura, o arco BD representa a rampa, os segmentos de reta [AB] e [CD] representam as paredes e o segmento de reta [AC] representa o solo. Os pontos P e Q representam as posições dos dois jovens na rampa. Admita que a distância ao solo, em metros, de um ponto da rampa situado x metros à direita da parede representada na figura por [AB] é dada por



$f(x)=0{,}0001x^4-0{,}005x^3+0{,}11x^2-x+3{,}4 \quad , \quad 0\le x\le 21$

a) Qual é, em metros, com arredondamento às décimas, o valor absoluto da diferença entre as alturas das duas paredes da rampa de *skate*?

(A) 0,8 **(B)** 0,7 **(C)** 0,5 **(D)** 0,4

b) Num certo instante, os dois jovens estão à mesma distância do solo, um mais próximo da parede representada por [AB] e o outro mais próximo da parede representada por [CD]. O jovem que se encontra mais próximo da parede representada por [AB] está a um metro desta parede. Seja d a distância a que se encontra da parede representada por [CD] o jovem que dela está mais próximo. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de d, sabendo-se que esse valor existe e é único. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;

– apresente o valor de d em metros, arredondado às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

(2020 EE)

252. Para um certo número real k, seja g a função, de domínio IR, definida por $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{k-kx} & se\ x<1 \\ x^2-10+8\ln x & se\ x\geq 1 \end{cases}$

a) Sabe-se que g é contínua no ponto 1. Qual é o valor de k ?

$(A)\dfrac{1}{6}$ $(B)\dfrac{1}{7}$ $(C)\dfrac{1}{8}$ $(D)\dfrac{1}{9}$

b) Estude, sem recorrer à calculadora, a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $]1,+\infty[$

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g , caso este(s) exista(m).

c) Mostre, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]\sqrt{e},e[$.

(2020 EE)

253. Seja f a função, de domínio $]0,+\infty[$, definida por $f(x)=\begin{cases} -x^2(1+2\ln x) & \text{se } 0<x\leq 1 \\ \dfrac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} & \text{se } x>1 \end{cases}$

Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.

a) Averigue se a função f é contínua em $x=1$.

b) Estude, no intervalo $]0,1[$ a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos. Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

(2021 - 1ª)

254. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja h a função, de domínio IR^+, definida por $h(x)=\dfrac{x^3}{2x^2-\ln x}$

Estude a função h quanto à existência de assíntota oblíqua ao seu gráfico e, caso esta exista, escreva a sua equação reduzida.

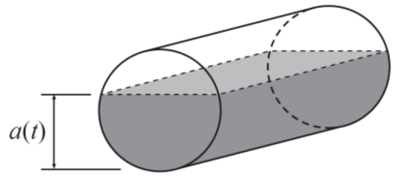
(2021 - 1ª)

255. A Figura representa um depósito de forma cilíndrica, instalado na horizontal, que contém uma certa quantidade de combustível.

Sabe-se que as bases do cilindro têm 1,8 metros de diâmetro.

Num certo instante, iniciou-se o vazamento do depósito.

Seja $a(t)$ a altura, em metros, do combustível no depósito, t minutos após o início do vazamento.



Admita que $a(t)=1,8-(0,216+0.0039t)^{\frac{2}{3}}$

a) Qual é, em metros, a diferença entre a altura do combustível no depósito no início do vazamento e a altura do combustível quando este ocupa metade da capacidade do depósito?

(A) 0,72 (B) 0,54 (C) 0,36 (D) 0,27

b) Decorridos t_1 minutos após o início do vazamento, a altura do combustível no depósito é igual a um certo valor.
Sabe-se que, passado igual período de tempo, a altura do combustível no depósito é igual a metade desse valor.
Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_1, sabendo que esse valor existe e é único.
Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).
Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.
Na sua resposta:
✓ apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
✓ reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas.
Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

(2021 - 1ª)

256. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação $\ln\left((1-x)e^{x-1}\right)=x$.

(2021 - 1ª)

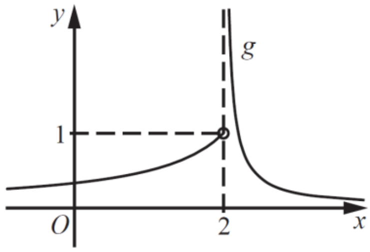
257. Na figura está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $IR\setminus\{2\}$.

A reta de equação $x=2$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função g.

Seja v_n a sucessão de termo geral $v_n=2-\dfrac{5}{n+3}$. A que é igual $\lim g(v_n)$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $+\infty$

(2021 - 2ª)



258. Seja f a função, de domínio IR, definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-e^{-x}}{x} & se\ x<0\\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}-3 & se\ x\geq 0\end{cases}$

Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

b) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -2

(2021 - 2ª)

259. Num laboratório cuja temperatura ambiente é constante, aqueceu-se uma substância até atingir uma certa temperatura, superior à temperatura ambiente, e, a seguir, deixou-se arrefecer essa substância durante uma hora.

Admita que a temperatura dessa substância, em graus Celsius, t minutos após o início do arrefecimento, é dada por $T(t)=20+100e^{-kt}$, $0\leq t\leq 60$, em que k é uma constante real positiva.

a) Durante o arrefecimento, houve um instante t_1 em que a temperatura da substância foi 30 ºC.
Qual é o valor de k ?

(A) $\ln\left(\dfrac{10}{t_1}\right)$ (B) $t_1-\ln 10$ (C) $\dfrac{\ln 10}{t_1}$ (D) $t_1+\ln 10$

b) Considere $k=0{,}04$ k = 0,04

Sabe-se que, durante os primeiros t_2 minutos, a taxa média de variação da função T foi igual a −2,4.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_2, sabendo que esse valor existe e é único.
Apresente o resultado em minutos e segundos (segundos arredondados às unidades).
Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.
Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às milésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

(2021 - 2ª)

260. Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Considere, para um certo número real *k*, a função g, de domínio $IR\setminus\{0\}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{x^2-x}+k & \text{se } x<0\\ 2+x\ln x & \text{se } x>0\end{cases}$$

Sabe-se que existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$. Determine o valor de k.

(2021 - 2ª)

261. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação

$$x\ln(1-x)-\ln(1-x)=(1-x)\ln(3-2x)$$

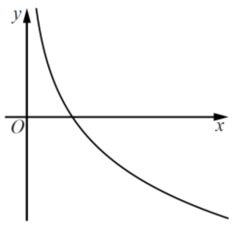
(2021 - 2ª)

262. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n=2n^2-n$.

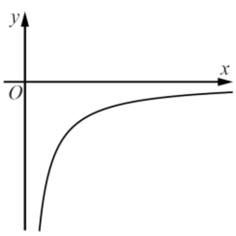
Em relação a uma certa função *f*, de domínio IR^+, sabe-se que $\lim f\left(\dfrac{1}{u_n}\right)=+\infty$

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função *f* ?

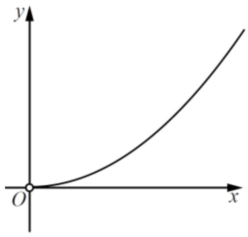
(A)



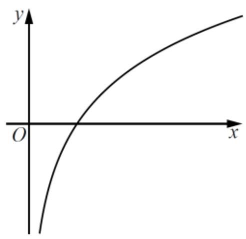
(B)



(C)



(D)



(2021 - EE)

263. Seja *f* a função, de domínio *IR*, definida por

$$f(x)=\begin{cases}x-2\ln(3-2x) & \text{se } x\le 1\\ \dfrac{sen(x-1)}{1-x^2}+k & \text{se } x>1\end{cases} \qquad \text{(k é um número real)}$$

Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.

a) Determine *k*, sabendo que a função *f* é contínua em $x=1$. (*Trigonometria*)

b) Estude, no intervalo $]-\infty, 1[$, a função *f* quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

(2021 - EE)

264. Seja g a função, de domínio $\left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$, definida por

$g(x)=\log_2(1-\cos x)+\log_2(1+\cos x)+2\log_2(2\cos x)$.

Mostre que $g(x)=2\log_2\left(sen(2x)\right)$. (*Trigonometria*)

(2021 - EE)

265. Para conhecer a variação do número de bactérias de uma determinada estirpe, colocou-se num tubo de ensaio fechado, com alguns nutrientes, um certo número de bactérias dessa estirpe.

Admita que, nessas condições, o número, *N*, em milhares, de bactérias vivas existentes no tubo, *t* horas após a sua colocação nesse tubo, é dado por $N(t)=N_0\,e^{1,08t-0,3t^2}$, em que N_0 representa a dimensão, em milhares, da população inicial.

a) Com o decorrer do tempo, para que tende o número de bactérias vivas existentes no tubo?

$(A)+\infty$ $(B)\ 0,78\,N_0$ $(C)\,N_0$ $(D)\,0$

b) Considere $N_0=1,63$.

Num certo instante, t_1, havia, no tubo de ensaio, mais meio milhar de bactérias vivas do que uma hora antes desse instante.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de t_1, sabendo que este valor existe e é único.

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas.

(2021 - EE)

266. Seja *f* a função, de domínio *R*, definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} & \text{se } x\le 1\\ \dfrac{x-1}{e^{x-2}} & \text{se } x>1\end{cases}$

Estude, sem recorrer à calculadora, a função *f* quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso existam, escreva as suas equações.

(2021 - EE)

267. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que verificam a condição

$$e^{-x}\left(4+e^{2x}\right)\ge 5\ \wedge\ -2\le x\le 2\,.$$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

(2021 - EE)

268. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy, partes dos gráficos das funções *f* e *g*, ambas de domínio *IR*, definidas, respetivamente, por $f(x)=2x^2$ e $g(x)=-(x-1)^2$ e a única reta não horizontal que é tangente, simultaneamente, ao gráfico de *f* e ao gráfico de *g*.

Seja A o ponto de tangência dessa reta com o gráfico de *f* e seja B o ponto de tangência dessa mesma reta com o gráfico de *g*.

Determine, sem recorrer à calculadora, as abcissas dos pontos A e B.

(2021 - EE)