AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA
Modelos Populacionais - Exames 2019 a 2022
11º ano – MACS

1. A canoagem é um desporto náutico praticado com uma canoa ou com um caiaque.

Uma das modalidades deste desporto é a canoagem de velocidade, na qual se insere a prova K1 1000 m. Nesta prova, a embarcação, um caiaque, tem apenas um lugar (K1), como se representa na figura ao lado, devendo o atleta percorrer 1000 metros.

Um atleta participou numa prova de canoagem K1 1000 m.

Admita que, enquanto a prova decorreu, a distância, D , percorrida pelo seu caiaque, em metros, t segundos após o início da prova, é bem aproximada pelo modelo seguinte, com arredondamento às centésimas.

$$D(t) = -3680 + 1840 \log(t + 100) \quad t \geq 0 \quad 0 \text{ (log designa o logaritmo de base 10)}$$

Assim, por exemplo, como $D(3) \approx 23{,}62049$, a distância percorrida pelo caiaque do atleta, 3 segundos após o início da prova, foi, aproximadamente, 23,62 metros.

1.1. Perante os dados recolhidos, o atleta afirmou:

≪Fui mais rápido nos primeiros cinco segundos da prova do que nos cinco segundos seguintes.≫

Justifique a afirmação do atleta, baseando-se no modelo apresentado.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

1.2. O recorde mundial desta prova é 3 minutos e 15 segundos.

Qual é a diferença entre o tempo alcançado pelo atleta e o recorde mundial?

Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:
- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às décimas.

Exame – 2022, Ép. especial

2. Uma das principais atrações do parque de campismo da ilha de Dujal é o seu lago natural, onde existem diversas espécies de peixes.

Admita que o número de peixes da espécie A existentes no lago, em centenas, t anos após o início do ano 2000, é bem aproximado pelo modelo

$$A(t) = \frac{20}{1 + 99e^{-0,8t}}$$

Assim, por exemplo, como $A(10) \approx 19{,}35713$ centenas, o número aproximado de peixes da espécie A existentes no lago, dez anos após o início do ano 2000, é 1936.

2.1. Qual foi o aumento, em percentagem, do número de peixes da espécie A no lago, comparando o número de peixes existentes três anos após o início do ano 2000 com o número existente seis anos após o início do ano 2000?

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

2.2. Num determinado momento, o número de peixes da espécie A foi, pela primeira vez, seis vezes maior do que o número de peixes existentes no início do ano 2002.

Determine em que ano tal ocorreu.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:
- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às décimas.

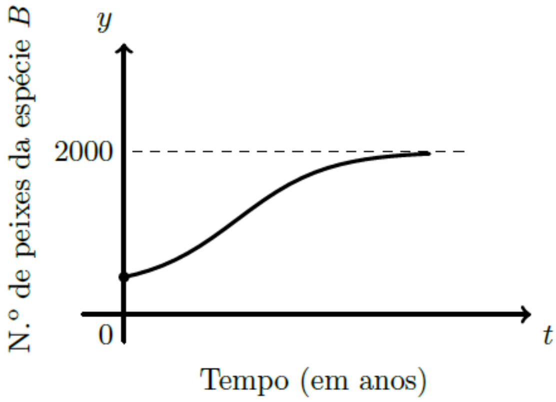
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

2.3. A evolução do número de peixes da espécie B no lago do parque de campismo, desde o início do ano 1997, pode ser modelada através de uma função.

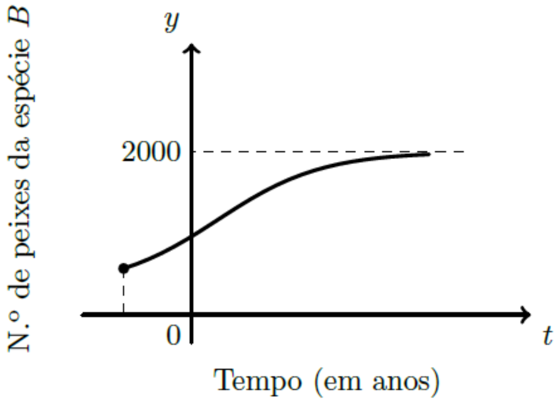
Com o tempo, estima-se que o número de peixes da espécie B no lago venha a atingir o dobro do número de peixes da espécie A.

Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico dessa função, desde o início do ano 1997, considerando que $t = 0$ corresponde ao início do ano 2000?

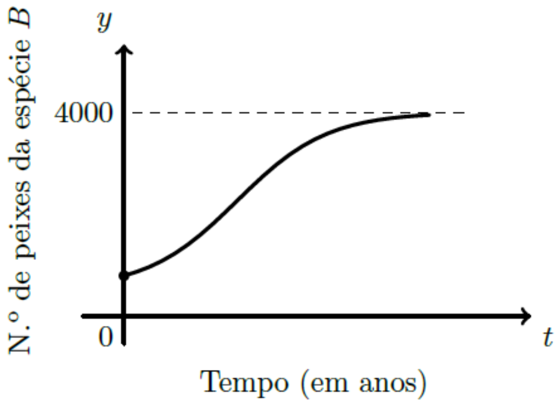
(A)



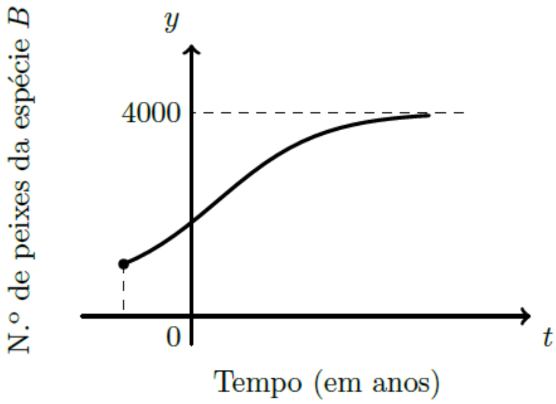
(B)



(C)



(D)



Exame – 2022, 2.ª Fase

3. A ilha de Dujal é um dos destinos de férias mais procurados pelos clientes da agência de viagens Ir&Voltar, devido à diversidade da sua flora.

Para preservar duas espécies de plantas, A e B, que, em dado momento, se encontravam em vias de extinção, foi criado, num viveiro, um projeto de reflorestação, com a duração de dois anos.

O número aproximado de plantas da espécie A e de plantas da espécie B, em centenas, existentes no viveiro, t meses após o início do projeto de reflorestação, é dado, respetivamente, pelas expressões

$$A(t) = 30 + 10\ln(t^3 + 1) \quad \text{e} \quad B(t) = 10 + 1.26^t \quad \text{com} \quad t \in [0{,}24]$$

Assim, por exemplo, como $A(7) \approx 88{,}406$ centenas, o número aproximado de plantas da espécie A existentes no viveiro, sete meses após o início do projeto, é 8841.

3.1. Determine o valor da percentagem de aumento do número de plantas da espécie A existentes em viveiro durante os primeiros dois meses do projeto de reflorestação.

Apresente o resultado arredondado às unidades.
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

3.2. Ao fim de doze meses, o número de plantas da espécie A era, aproximadamente, o ____________ do número de plantas da espécie B.

Selecione a opção que completa corretamente a frase.

(A) triplo **(B)** quádruplo **(C)** quíntuplo **(D)** sêxtuplo

3.3. Determine ao fim de quantos dias, após o início do projeto, o número de plantas da espécie A era igual ao número de plantas da espécie B.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Admita que cada mês tem 30 dias.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:
- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

Exame – 2022, 1.ª Fase

4. A rádio OnOfff é uma rádio local que transmite através da Internet, com recurso a tecnologia de transmissão de áudio e de vídeo em tempo real.

Desde que foi inaugurada, no início do ano 2000, a rádio OnOfff tem cada vez mais ouvintes. Admita que, t anos após a sua inauguração, o número de ouvintes da OnOfff é bem aproximado, com arredondamento às unidades, pelo modelo seguinte.

$$R(t) = 7700 + 1471\ln(t+1) \qquad (t \geq 0)$$

4.1. Prove que o número de ouvintes da rádio OnOfff sofreu um aumento superior a 2500, decorridos cinco anos após a inauguração.

4.2. O número de ouvintes ultrapassou pela primeira vez a marca dos 12 000 num determinado ano. No início do ano seguinte, procedeu-se à atualização dos equipamentos.

Determine em que ano se procedeu à atualização dos equipamentos. Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às décimas.

Exame – 2021, Ép. especial

5. O número aproximado de alunos estrangeiros inscritos na faculdade F1, t anos após o início do ano de 2000, é dado, arredondando às unidades o valor obtido, pela expressão

$$E(t) = \frac{2500}{1 + 15e^{-0,27t}} \qquad (t = 0,1,2,...,15)$$

Assim, por exemplo, o número aproximado de alunos estrangeiros inscritos nesta faculdade, dois anos após o início do ano de 2000, é 257, pois $E(2) = 256,64126...$

5.1. Comparando o número de alunos estrangeiros inscritos na faculdade F1 no início de 2004 com o número de alunos estrangeiros inscritos na faculdade F1 no início de 2007, concluiu-se que este triplicou.

Indique, justificando, se a afirmação é verdadeira.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

5.2. Na faculdade F2, o número aproximado de alunos estrangeiros inscritos, t anos após o início do ano de 2000, é dado, arredondando às unidades o valor obtido, pela expressão

$$N(t) = 200e^{0,16t} \qquad (t = 0,1,2,...,15)$$

Durante quantos anos o número de alunos estrangeiros inscritos, no início de cada ano, na faculdade F1 foi superior ao número de alunos estrangeiros inscritos, no início de cada ano, na faculdade F2?

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

Exame – 2021, 2.ª Fase

6. Admita que, no início do ano de 2016, a ParaPagarApp tinha, em Portugal continental, 50 000 utilizadores.

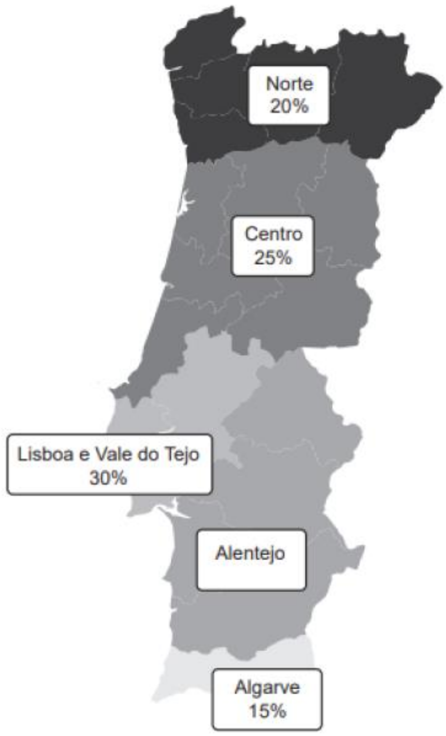
O número de utilizadores, em milhares, que, t anos após o início do ano de 2016, na região do Alentejo, utiliza a ParaPagarApp é bem aproximado pelo modelo

$$A(t) = \frac{20}{1 + e^{-0,2t}}$$

6.1. Determine a percentagem de utilizadores da aplicação ParaPagarApp em Portugal continental que não pertenciam à região do Alentejo no início do ano de 2016.

6.2. Numa perspetiva de longo prazo, estima-se que, com o passar dos anos, o número de utilizadores da ParaPagarApp, em Portugal continental, seja 200 000.

Na figura seguinte, apresenta-se um mapa de Portugal continental e, parcialmente, a estimativa da percentagem de utilizadores da ParaPagarApp, por regiões, numa perspetiva de longo prazo.



Atendendo aos dados apresentados na figura anterior, averigue se o modelo apresentado para o Alentejo poderá estar correto para uma estimativa a longo prazo de utilizadores da aplicação em Portugal continental. Justifique a sua resposta.

Exame – 2021, 1.ª Fase

7. Desde que a Associação Ambientalista de Avelares (AAA) começou a fazer a manutenção do lago do parque municipal de Avelares, a qualidade da água melhorou. Com a diminuição do número de um certo tipo de micro-organismos, o número de peixes no lago começou a aumentar.

Admita que, ao fim de t dias após a AAA começar a fazer a manutenção do lago, o número desses micro-organismos por cada 100 ml de água do lago e o número de peixes existentes no lago, em milhares, são dados, respetivamente, por

$$c(t) = 1200e^{-0,25t} \quad \text{e por} \quad p(t) = \frac{5}{1 + e^{-0,21t}}$$

7.1. A qualidade da água do lago é considerada boa se o número desses micro-organismos por cada 100 ml for igual ou inferior a 99.

Prove que, no instante em que a qualidade da água é considerada boa pela primeira vez, o número de peixes existentes no lago é superior a 4400.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

7.2. Com o passar do tempo, o número de peixes no lago tende a estabilizar num certo valor. A AAA decidiu que, quando o número de peixes do lago for igual a esse valor menos 400, se pode introduzir uma nova espécie de peixes no lago.

Determine ao fim de quantos dias, após a manutenção do lago passar a ser feita pela AAA, se pode fazer a introdução de novos peixes.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) que lhe permitem resolver o problema;
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

Exame – 2020, Ép. especial

8. Num dos dias do *Interrail*, a Elsa sentiu-se febril. Mediu a temperatura corporal e, como estava com febre, tomou um medicamento e ficou no quarto do hotel.

Admita que a temperatura corporal da Elsa, em graus Celsius (°C), t horas após a toma do medicamento, é bem aproximada pelo modelo seguinte.

$$C(t) = 26 + 13e^{-0,008t} \qquad \text{para } t \in [0{,}24]$$

Considera-se $t = 0$ o instante em que a Elsa tomou o medicamento.

8.1. Admita que a Elsa tomou o medicamento às 9 horas.

Se às 14 horas e 30 minutos a temperatura corporal da Elsa não tivesse diminuído, pelo menos, 0,5 °C, seria necessário recorrer a outro medicamento.

Indique, justificando, se terá sido necessário recorrer a outro medicamento.

Na sua resposta, apresente todos os cálculos que efetuar.
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

8.2. Preocupados com a Elsa, os amigos foram telefonando ao longo do dia.

Num dos telefonemas, a Elsa disse-lhes que a sua temperatura corporal era 38 °C e, no telefonema seguinte, disse-lhes que já era 37,8 °C.

Quanto tempo decorreu entre os dois telefonemas?

Apresente o resultado, em horas, arredondado às unidades.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:
- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) com arredondamento às décimas.

Exame – 2020, 2.ª Fase

9. Um balão publicitário foi lançado de uma plataforma.

Admita que, t minutos após ser lançado, a altura do balão, em metros, é bem aproximada pelo modelo seguinte.

$$A(t) = \frac{30}{1 + 29e^{-2t}} \qquad \text{para } t \in [0{,}5]$$

9.1. Determine quantos metros subiu o balão no primeiro minuto.

Apresente o resultado arredondado às unidades.
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

9.2. Quando o balão subiu dos 12 até aos 20 metros de altura, foram lançados confetes.

Determine durante quantos segundos decorreu o lançamento dos confetes.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:
- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) com arredondamento às centésimas.

Exame – 2020, 1.ª Fase

10. Desde que foi inaugurado, o Centro Comercial Futuro tem, ano após ano, cada vez mais visitantes. De acordo com a informação disponível, o número anual de visitantes do CCF, em milhares, t anos após o início do ano de 1990, é bem aproximado pelo modelo seguinte

$$V(t) = \frac{120}{1 + 5e^{-0.5t}}$$

10.1. Determine em que ano o número de visitantes anuais do CCF ultrapassou pela primeira vez o valor de 75 000

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- a(s) coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às décimas.

10.2. Determine o valor da percentagem de aumento do número de visitantes do CCF entre o início de 1995 e o início de 2000.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve quatro casas decimais.

Exame – 2019, Ép. especial

11. A Teresa arrematou um quadro num leilão.

Admita que o valor de mercado do quadro, em euros, t trimestres após o momento em que a Teresa o arrematou, é dado por

$$V(t) = \frac{1000}{1 + 4e^{-0,2t}} \qquad (t \geq 0)$$

11.1. A Teresa considera a compra um bom investimento se o quadro se valorizar, pelo menos, 30%, seis meses após ter sido arrematado.

Terá sido a compra do quadro um bom investimento?

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

11.2. Com o passar do tempo, o valor de mercado do quadro tende a estabilizar num certo valor. A Teresa vendeu o quadro por um preço 40 euros abaixo desse valor.

Determine durante quantos meses a Teresa manteve o quadro na sua posse.

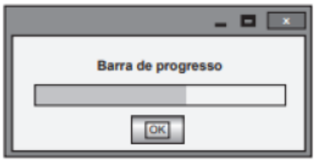
Apresente o resultado arredondado às unidades.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) que lhe permite(m) resolver o problema;
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às décimas.

Exame – 2019, 2.ª Fase

12. Cada vez que o Paulo descarrega um jogo para o seu computador, surge no seu monitor uma barra de progresso semelhante à que se apresenta na figura seguinte.



O Paulo decidiu descarregar um jogo para o seu computador; deu início ao processo e, sem olhar para o monitor, ausentou-se.

Quando voltou, observou pela primeira vez a barra de progresso, que indicava a percentagem da descarga do ficheiro já efetuada.

Admita que a percentagem da descarga do jogo, D, enquanto é efetuada, é bem aproximada pelo modelo seguinte

$$D(t) = -200 + 100\log_{10}(50t + 250)$$

A variável t representa o tempo, em minutos, e considera-se $t = 0$ o instante em que o Paulo observou, pela primeira vez, a barra de progresso.

12.1. Para se efetuar a descarga completa do jogo, é necessário transferir 8 gigabytes de dados.

Quantos gigabytes já tinham sido descarregados um minuto antes de o Paulo observar a barra de progresso pela primeira vez?

Apresente a resposta, com arredondamento às décimas.
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

12.2. Quanto tempo demorou a efetuar-se a descarga do jogo desde que o Paulo deu início ao processo?

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s).

Exame – 2019, 1.ª Fase