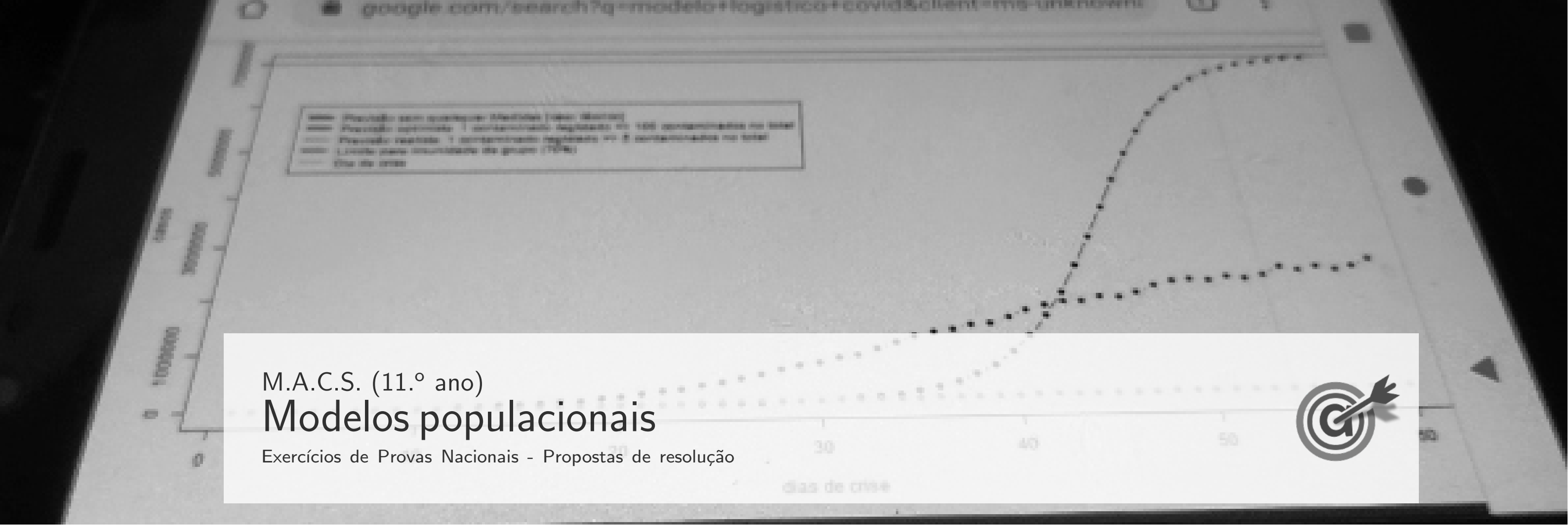


M.A.C.S. (11.º ano)

Modelos populacionais

Exercícios de Provas Nacionais - Propostas de resolução

1.

1.1. Como, de acordo com o modelo apresentado, o tempo é medido em décadas e $t = 0$ corresponde ao final de 1900, então o final de 1970 corresponde a $t = 7$ e o final de 2000, a $t = 10$, pelo que o número de habitantes no final destes anos, é:

- $A(7) = 1 + 30e^{-0{,}02\times 7} \approx 27{,}081$ centenas
- $A(10) = 1 + 30e^{-0{,}02\times 10} \approx 25{,}562$ centenas

Assim, o valor da diminuição do número de habitantes entre o final de 1970 e o final de 2000 é:

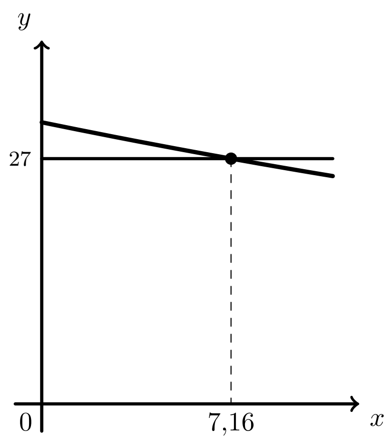
$$A(7) - A(10) \approx 27{,}081 - 25{,}562 \approx 1{,}519 \text{ centenas}$$

Esta diminuição, em percentagem, p, relativamente ao final de 1970, arredondada às unidades, é:

$$\frac{27{,}081}{100} = \frac{1{,}519}{p} \Leftrightarrow p = \frac{1{,}519 \times 100}{27{,}081} \Leftrightarrow p \approx 6\%$$

1.2. Como 2700 são 27 centenas, para determinar o ano em que, no final, o número de habitantes da freguesia A foi, pela primeira vez, inferior a 2700, devemos resolver a equação $A(t) = 27$.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta, representamos o gráfico da função $f(x) = 1 + 30e^{-0{,}2x}$ e a reta $g(x) = 27$, numa janela ajustada, obtemos o valor aproximado (com duas casas decimais) das coordenadas do ponto de interseção: $(7{,}16\,;\,27)$.



Assim, temos que no final do ano de 1971 ($t = 7{,}1$) a população ainda não era inferior a 2700, pelo que foi apenas no ano de 1972 que o número de habitantes da freguesia A foi, pela primeira vez, inferior a 2700 .

1.3. Representando os dois modelos na calculadora gráfica e observando a sua representação em tabela, podemos comparar o número de habitantes de cada freguesia ao fim de cada década:

t	$A(t)$	$B(t)$
0	31,000	20,400
1	30,406	21,000
2	29,824	21,600
3	29,253	22,200
4	28,693	22,800
5	28,145	23,400
6	27,608	24,000
7	27,081	24,600
8	26,564	25,200
9	26,058	25,800
10	25,562	26,400

Assim, temos que:

No final do ano de 1900, o número de habitantes da freguesia A era 3100, sendo superior ao número de habitantes da freguesia B. Decorridas dez décadas, a freguesia que até então tinha menor número de habitantes passou a ser a freguesia com maior número de habitantes.

Decorridas duas décadas após o final do ano de 1900, é possível afirmar que, na freguesia B, o número de habitantes era superior a 2000.

Logo, as correspondências corretas são:

- **I → a)**
- **II → c)**
- **III → a)**
- **IV → c)**

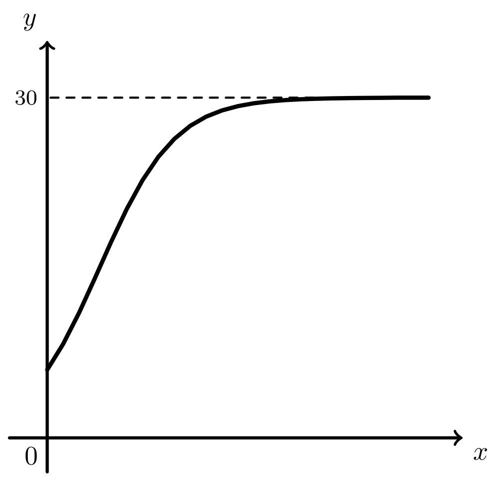
Exame – 2024, Ép. especial

2.

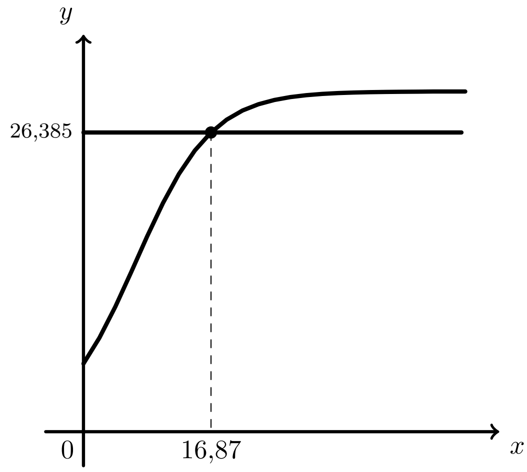
2.1. Observando a representação gráfica do modelo $P(t)$, na calculadora gráfica, podemos verificar que os valores se aproximam de 30, com o passar do tempo.

Como o modelo exprime o número aproximado de utilizadores da aplicação, em centenas, o número de utilizadores tende para 30 centenas, ou seja, 3000.

Resposta: **Opção C**



2.2. Assim, usando a calculadora gráfica para obter o gráfico da função P, relativo ao ano 2021, e também o gráfico da função constante $f(x) = 26{,}385$, numa janela adequada, podemos observar que, aproximadamente 16,87 meses após o dia 1 de janeiro de 2020, o número de utilizadores da aplicação atingiu o triplo do que existia a 1 de fevereiro de 2016.



Como 16,87 meses após o dia 1 de janeiro de 2020, corresponde a 4,87 meses após o dia 1 de janeiro de 2021, este momento corresponde a uma data relativa a maio de 2021.

2.3. Representando os dois modelos na calculadora gráfica e observando a sua representação em tabela, podemos procurar os meses em que no primeiro dia, o número de utilizadores da aplicação foi superior a 700 e inferior a 900:

t	$N(t)$	$P(t)$
0	9,400	6,000
1	8,795	7,018
2	8,441	8,149
3	8,190	9,389
4	7,995	10,725
5	7,836	12,138
6	7,701	13,607
7	7,585	15,103
8	7,482	16,597
9	7,390	18,059

t	$N(t)$	$P(t)$
10	7,307	19,464
11	7,231	20,787
12	7,161	22,012
13	7,096	23,129
14	7,036	24,130
15	6,980	25,018
16	6,927	25,794
17	6,877	26,467
18	6,830	27,044
19	6,785	27,536

- entre 1 de janeiro de 2016 até 31 de dezembro de 2019, foram 14 os meses em que o número de utilizadores da aplicação foi superior a 700 e inferior a 900;
- a partir 1 de janeiro de 2020, o número de utilizadores da aplicação esteve entre 700 e 900 em apenas 2 meses.

Assim, temos que o número de utilizadores da aplicação foi superior a 700 e inferior a 900, em $14 + 2 = 16$ meses.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2024, 2.ª Fase

3.

3.1. Sabemos que:

- $A(t)$ representa o número de árvores em milhares;
- $A(7)$ representa o número de árvores no início de 2009;
- $A(5)$ representa o número de árvores no início de 2007;
- $A(7)-A(5)$ representa o aumento do número de árvores entre o início de 2007 e o início de 2009.

Assim, $A(7)-A(5)>10$ significa que o aumento do número de árvores entre 1 de janeiro de 2009 e 1 de janeiro de 2007 foi maior que 10 milhares, ou seja, superior a 10 000.

Resposta: **Opção B**

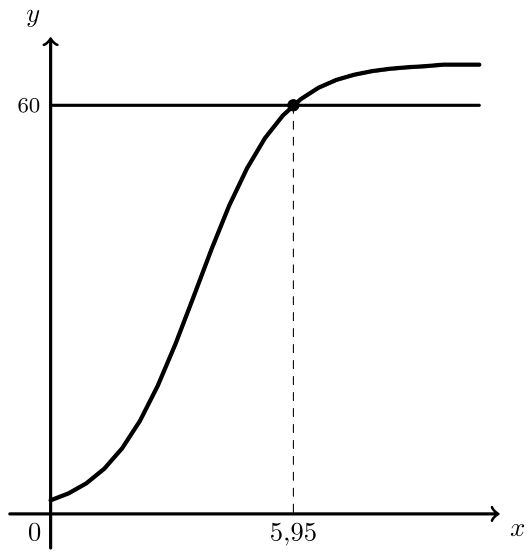
3.2. Calculando o número de árvore no início de 2002, em milhares, temos:

$$A(0)=\frac{66}{1+32e^{-0,87\times 0}}=\frac{66}{1+32\times 1}=\frac{66}{33}=2$$

No ano em causa, o número de árvores foi 30 vezes superior, ou seja:

$$30\times A(0)=30\times 2=60 \text{ milhares}$$

Assim, usando a calculadora gráfica para obter o gráfico da função $A(t)$ e também o gráfico da função constante $f(x)=60$, numa janela adequada, obtemos a abcissa do ponto de interseção, ou seja, o valor do tempo em que o número de árvores era de 60 000.



Assim, temos que o número de árvores atingiu o valor 60 000 para $t\approx 5{,}95$, ou seja, 6 anos após o início de 2002, isto é, em 2008.

3.3. Sabemos que:

- no início de 2011, o número de árvores era de $A(9)=\dfrac{66}{1+32e^{-0,87\times 9}}\approx 65{,}660$ milhares;
- no início de 2012, o número de árvores era de $A(10)=\dfrac{66}{1+32e^{-0,87\times 10}}\approx 65{,}871$ milhares;
- o aumento do número de árvores durante o ano de 2011 foi de $65\,871-65\,660=211$ árvores;
- como o aumento do número de árvores por fatores naturais corresponde a 0,21% do número de árvores que existiam no início de 2011, esta parte do aumento corresponde a $0{,}0021\times 65\,660\approx$ 138 árvores.

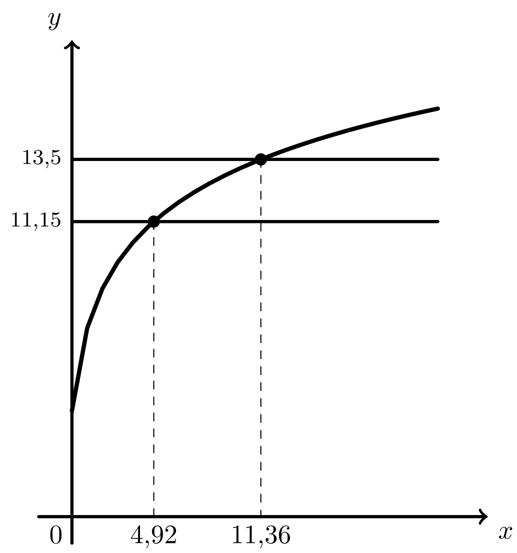
Assim, o número de árvores plantadas corresponde à diferença entre o aumento total do número de árvores registado durante 2011 e o número de árvores que surgiram por fatores naturais, ou seja: $211-138=73$ árvores.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2024, 1.ª Fase

4.

4.1. Representamos na calculadora gráfica os gráficos do saldo A da conta-corrente ($y = 4 + 3\ln(2x+1)$) e das retas correspondente aos 11,15 e 13,5 milhões de euros ($y = 11{,}15$ e $y = 13{,}5$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $0 \leq x \leq 22$, que se encontram reproduzidos na figura ao lado.



Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção do modelo com cada uma das retas, obtemos o valores arredondados (às centésimas) das abcissas dos pontos de interseção, ou seja, o valor correspondente ao tempos em que o saldo era 11,15 e 13,5 milhões de euros, ou seja, os pontos de coordenadas $(4{,}92\,;\,11{,}5)$ e $(11{,}36\,;\,13{,}5)$.

Assim, o período de tempo em ocorreu o maior investimento em publicidade para promover o itinerário A, durou $11{,}36 - 4{,}92 = 6{,}44$ anos a que correspondem 6 anos completos.

4.2. Relativamente ao valor do saldo A, temos que:

- no inicio do ano 200 era: $A(0) = 4 + 3\ln(2 \times 0 + 1) = 4$ milhões de euros;
- no final do primeiro ano, era: $A(1) = 4 + 3\ln(2 \times 1 + 1) \approx 7{,}2958$ milhões de euros ;
- durante o primeiro ano registou um aumento de: $A(1) - A(0) \approx 7{,}2958 - 4 \approx 3{,}2958$ milhões de euros .

Assim, o aumento em percentagem, a registado no primeiro ano é:

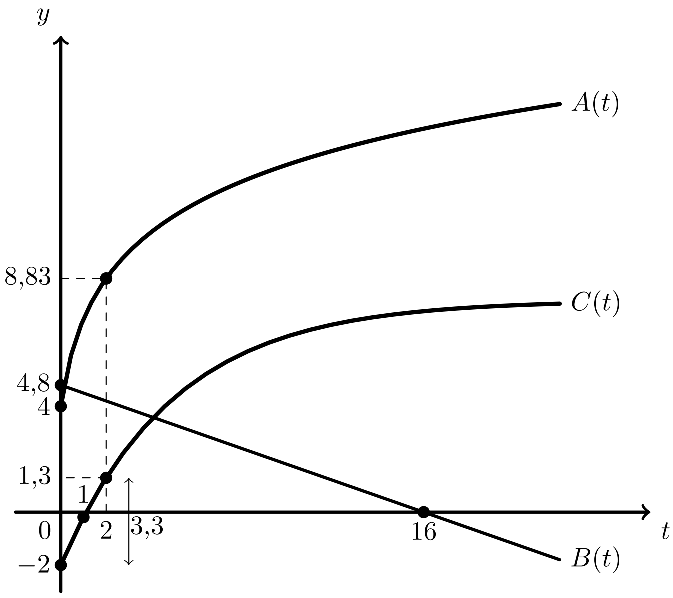
$$\frac{a}{3{,}2958} = \frac{100}{4} \Leftrightarrow a = \frac{100 \times 3{,}2958}{4} \Leftrightarrow a = 82{,}395 \Rightarrow a \approx 82\%$$

Resposta: **Opção D**

4.3. Representando na calculadora gráfica os gráficos dos três modelos, numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $0 \leq x \leq 22$, obtemos os gráficos reproduzidos na figura seguinte.

Da observação dos gráficos e usando as diferentes ferramentas da calculadora gráfica, podemos estabelecer as seguintes correspondências:

- **(b) - (1)** o saldo B tem vindo a diminuir;
- **(b) - (2)** o saldo B era o que tinha maior valor no inicio do ano 2000;
- **(c) - (3)** o saldo C era o único com valor negativo no início de 2001;
- **(a) - (4)** o saldo A foi o único com valor sempre positivo;
- **(c) - (5)** o saldo C nos dois primeiros anos (entre 2000 e 2002) aumentou aproximadamente 3 milhões de euros;
- **(b) - (6)** o saldo B era nulo no início de 2016;
- **(a) - (7)** o saldo A era o que apresentava maior valor no início de 2002.



Resposta: **(a) - 4,7**; **(b) - 1,2,6** e **(c) - 3,5**

Exame – 2023, 2.ª Fase

5.

5.1. Analisando o número de habitantes no início de cada uma das décadas e o crescimento associado, temos:

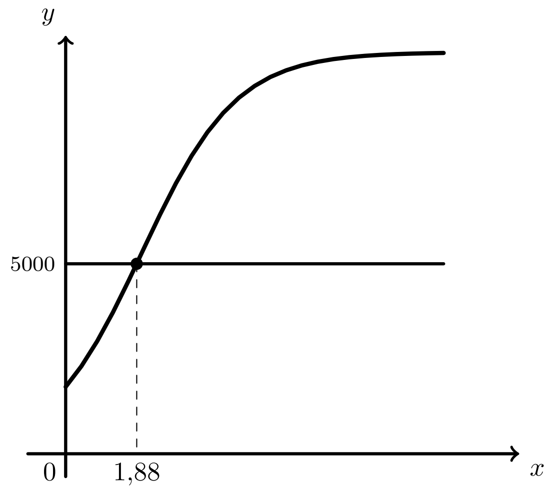
Anos	N.º de habitantes	Crescimento
1980	$A(1) = \frac{10566}{1+5\times e^{-0,8\times 1}} \approx 3254$	—
1990	$A(2) = \frac{10566}{1+5\times e^{-0,8\times 2}} \approx 5258$	$5258 - 3234 = 2004$
2000	$A(3) = \frac{10566}{1+5\times e^{-0,8\times 3}} \approx 7269$	$7269 - 5258 = \mathbf{2011}$
2010	$A(4) = \frac{10566}{1+5\times e^{-0,8\times 4}} \approx 8777$	$8777 - 7269 = 1508$
2020	$A(5) = \frac{10566}{1+5\times e^{-0,8\times 5}} \approx 9679$	$9679 - 8777 = 902$

Logo é possível verificar que, de entre os intervalos de tempo apresentados, aquele em que se verificou o crescimento da população mais acentuado foi entre o inicio de 1990 e o início de 2000.

Resposta: **Opção B**

5.2. Representamos na calculadora gráfica os gráficos do número de habitantes em função do tempo ($y = \dfrac{10\,566}{1+5e^{-0,8x}}$) e da reta correspondente aos 5 milhares de habitantes ($y = 5000$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $x \geq 0$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção do modelo com a reta, obtemos o valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto de interseção, ou seja, o valor correspondente ao tempos em que o número de habitantes da freguesia era 5000, ou seja, os pontos de coordenadas (1,88 ; 5000).



Assim, como $A(1{,}88) \approx 5000$, sabemos que a ampliação do centro de saúde aconteceu 1,88 décadas após o inicio de 1970, ou seja, num período de tempo compreendido entre 1 e 2 décadas ($1 < 1{,}88 < 2$) após o inicio de 1970, o que nos permite garantir que a ampliação ocorreu entre 1980 e 1990, ou seja, na década de 80.

5.3. Calculando o número de habitantes, em cada uma das duas freguesias, no inicio de 1970, ou seja, para $t = 0$, temos:

- $A(0) = \dfrac{10566}{1+5\times e^{-0,8\times 0}} = 1761$
- $B(0) = \dfrac{a}{1+4\times e^{-0,7\times 0}} = \dfrac{a}{1+4\times e^{0}} = \dfrac{a}{1+4\times 1} = \dfrac{a}{5}$

Como, nesta data, as duas freguesias tinham o mesmo número de habitantes, estes valores são iguais, pelo que podemos calcular o valor de a:

$$\frac{a}{5} = 1761 \Leftrightarrow a = 1761 \times 5 \Leftrightarrow a = 8805$$

E assim, substituindo o valor de a no modelo, temos que o número de habitantes da freguesia de Bileira, com arredondamento às unidades, no início do ano de 2020, ou seja, para $t = 5$, é:

$$B(5) = \frac{8805}{1+4\times e^{-0,7\times 5}} \approx 7856$$

Exame – 2023, 1.ª Fase

6.

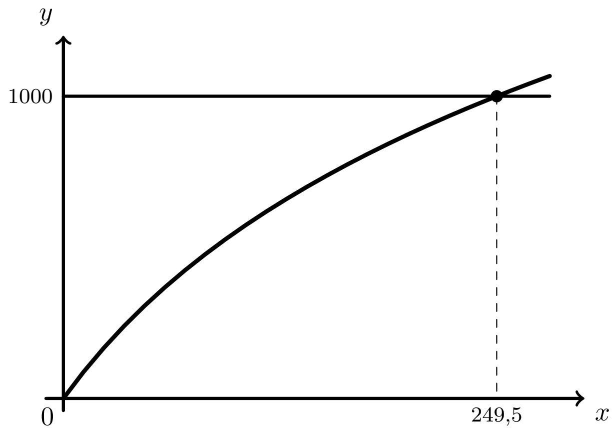
6.1. De acordo com o modelo apresentado, podemos calcular as distâncias percorridas, respetivamente em 5 segundos e em 10 segundos após o inicio da prova:

- $D(5) = -3680 + 1840\log(5+100) \approx 38{,}98831$
- $D(10) = -3680 + 1840\log(10+100) \approx 76{,}16254$

Assim temos que a distância percorrida nos primeiros 5 segundos foi, aproximadamente 38,99 metros e nos 5 segundos seguintes foi de $76{,}16254 - 38{,}98831 \approx 37{,}17$ metros. Assim, no segundo período de 5 segundos percorreu uma distância inferior no mesmo espaço de tempo, pelo que a afirmação do atleta é correta.

6.2. Como a prova tem 1000 metros, o tempo, em segundos, que o atleta demorou a fazer a prova é a abcissa do ponto de interseção do gráfico da função que modela a distância percorrida pelo atleta com a reta de equação $y = 1000$.

Assim, usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta, representamos o gráfico da função $y = -3680 + 1840\log(x + 100)$ e a reta $y = 1000$, numa janela ajustada, obtemos o valor aproximado (com arredondamento às décimas) das coordenadas do ponto de interseção: $(249{,}5\,;\,1000)$.



Assim, temos que o atleta demorou 249,5 segundos a completar a prova, e como o recorde mundial é de $3 \times 60 + 15 = 195$ segundos, a diferença, em segundos, arredondado às décimas, entre o tempo alcançado pelo atleta e o recorde mundial é:

$$249{,}5 - 195 = 54{,}5 \text{ segundos}$$

Exame – 2022, Ép. especial

7.

7.1. Temos que o número aproximado de peixes da espécie A existentes no lago:

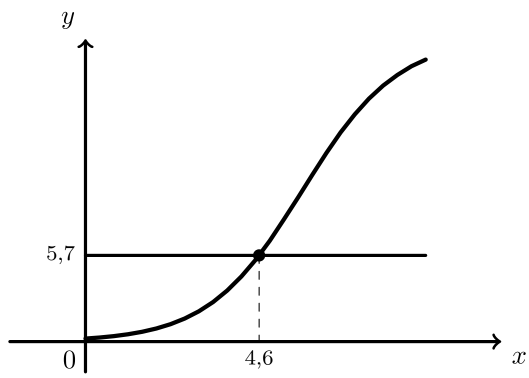
- três anos após o início do ano 2000, era $A(3) = \dfrac{20}{1 + 99e^{-0{,}8\times 3}} \approx 2{,}00379$
- seis anos após o início do ano 2000, era $A(6) = \dfrac{20}{1 + 99e^{-0{,}8\times 6}} \approx 11{,}02083$

Assim, neste período, o aumento foi de $A(6) - A(3) \approx 11{,}02083 - 2{,}00379 \approx 9{,}01704$ centenas de peixes, a que corresponde um aumento percentual, a, com arredondamento às unidades, dado por:

$$\frac{2{,}00379}{9{,}01704} = \frac{100}{a} \Leftrightarrow a = \frac{100 \times 9{,}01704}{200} \Leftrightarrow a \approx 450\%$$

7.2. Como o número aproximado de peixes da espécie A existentes no lago no início do ano 2002 era 95, porque $A(6) = \dfrac{20}{1+99e^{-0,8\times 6}} \approx 0{,}95294$, então este número foi, pela primeira vez, seis vezes maior quando atingiu o valor de $6 \times 95 = 570$, ou seja 5,7 centenas.

Assim, usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta, representamos o gráfico da função $y = \dfrac{20}{1+99e^{0,8x}}$ e a reta $y = 5{,}7$, numa janela ajustada, obtemos o valor aproximado (com arredondamento às décimas) das coordenadas do ponto de interseção: $(4{,}6\,;\,5{,}7)$



Desta forma, temos que o número de peixes da espécie A foi, pela primeira vez, seis vezes maior do que o número de peixes existentes no início do ano 2002, 4,6 anos após o início de 2002, ou seja durante o ano de 2004.

7.3. Como o número de peixes da espécie A existentes no lago, em centenas, t anos após o início do ano 2000, é bem aproximado pelo modelo $A(t) = \dfrac{20}{1+99e^{0,8t}}$ temos que o número máximo de peixes desta espécie se aproxime de 20 centenas, ou seja dos 2000 peixes.

Assim, o número máximo de peixes da espécie B deve aproximar-se de 4000 (o dobro da espécie A) pelo que apenas os gráficos das opções (C) e (D) podem representar o modelo que aproxima o número de peixes da espécie B ao longo do tempo.

Adicionalmente, como $t = 0$ corresponde ao início de 2000 e o modelo deve reportar-se ao início de 1997, a que corresponde $t = -3$, o gráfico deve estar representado para valores de t superiores ou iguais a -3 ($t \geq -3$), pelo que das duas opções anteriores, apenas o gráfico da opção (D) pode representar o modelo pretendido.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2022, 2.ª Fase

8.

8.1. De acordo com o modelo apresentado, podemos calcular o número de plantas da espécie A:

- No início do projeto de reflorestação, ou seja 0 meses após o inicio do projeto:

$$A(0) = 30 + 10\ln(0^3+1) = 30 \text{ centenas} = 3000$$

- 2 meses após o inicio do projeto:

$$A(2) = 30 + 10\ln(2^3+1) \approx 51{,}972 \text{ centenas} \approx 5197$$

Ou seja, nos primeiros dois meses do projeto o aumento do número de plantas desta espécie foi $5197 - 3000 = 2197$, a que corresponde uma percentagem de aumento a, relativamente ao valor inicial, arredondada às unidades:

$$\frac{3000}{2197} = \frac{100}{a} \Leftrightarrow a = \frac{100 \times 2197}{3000} \Rightarrow a \approx 73\%$$

8.2. Calculando o número de plantas da espécie A e da espécie B ao fim de 12 meses, temos:

- $A(12) = 30 + 10\ln(12^3+1) \approx 104{,}553$ centenas $\approx 10\,455$
- $B(12) = 10 + 1{,}26^{12} = 26{,}012$ centenas ≈ 2601

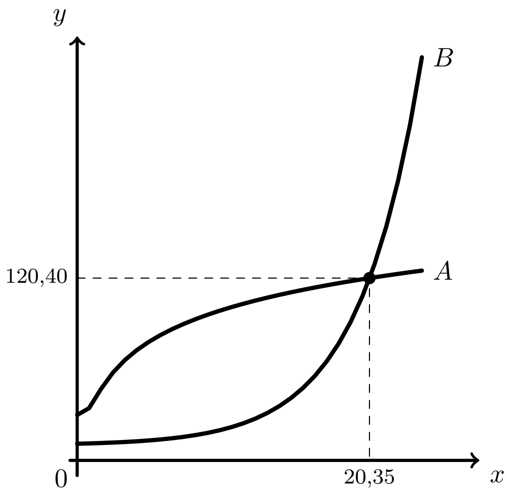
Calculando a razão entre estes valores, temos:

$$\frac{A(12)}{B(12)} \approx \frac{10\,455}{2601} \approx 4$$

Pelo que podemos afirma que $A(12) \approx 4 \times B(12)$

Resposta: **Opção B**

8.3. Representando na calculadora gráfica os modelos da variação dos números de plantas das espécies A e B ($y = 30 + \ln(x^3+1)$ e $y = 10 + 1{,}26^x$), para os valores do tempo indicados, ou seja, $0 \leq x \leq 24$, obtemos os gráficos que se encontram reproduzidos na figura ao lado.



Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção das representações gráficas dos dois modelos, obtemos os valores aproximados (às centésimas) das coordenadas, ou seja, os valores correspondente ao tempo em que o número de plantas das duas espécies era igual, ou seja, o ponto de coordenadas $(20{,}35\,;\,120{,}40)$

Assim, temos que o número de plantas das duas espécies era igual ao fim de 20,35 meses, a que corresponde um número aproximado (às unidades) de $20{,}35 \times 30 \approx 611$ dias.

Exame – 2023, 1.ª Fase

9.

9.1. Quando foi inaugurada a rádio OnOfff, ou seja, zero anos após a sua inauguração ($t = 0$), o número aproximado de ouvintes era:

$$R(0) = 7700 + 1471\ln(0+1) = 7700 + 1471 \times 0 = 7700$$

Cinco anos após a inauguração ($t = 5$), o número aproximado de ouvintes era:

$$R(5) = 7700 + 1471\ln(5+1) \approx 10\,336$$

Assim, o valor aproximado do aumento de ouvintes, decorridos cinco anos após a inauguração, é:

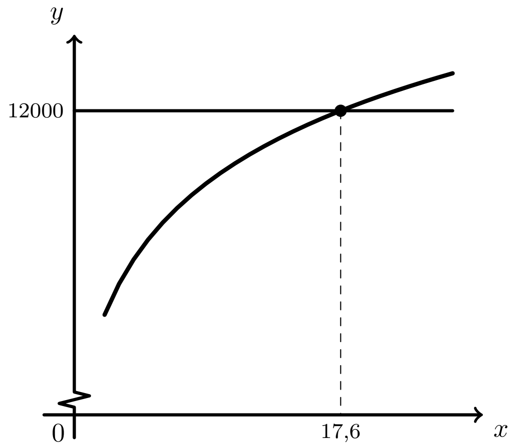
$$R(5) - R(0) \approx 10\,336 - 7700 \approx 2636$$

Ou seja, nos primeiros cinco anos o aumento do número de ouvintes foi superior a 2500.

9.2. Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta, representamos o gráfico da função $y = 7700 + 1471\ln(x + 1)$ e a reta $y = 12000$, numa janela ajustada, obtemos o valor aproximado (com arredondamento às centésimas) das coordenadas do ponto de interseção: (17,6 ; 12000)

Assim, temos que o número de ouvintes ultrapassou pela primeira vez a marca dos 12 000, 17 anos após a inauguração da rádio, ou seja durante o ano de 2017.

Como a atualização dos equipamentos ocorreu no início do ano seguinte, esta ocorreu em 2018.



Exame – 2021, Ép. especial

10.

10.1. Calculando o número de alunos estrangeiros inscritos nesta faculdade no início de 2004, ou seja 4 anos após o inicio de 2000 e o número de alunos estrangeiros inscritos no início de 2007, temos:

$$E(4) = \frac{2500}{1 + 15e^{-0,27\times 4}} \approx 410{,}24 \approx 410$$

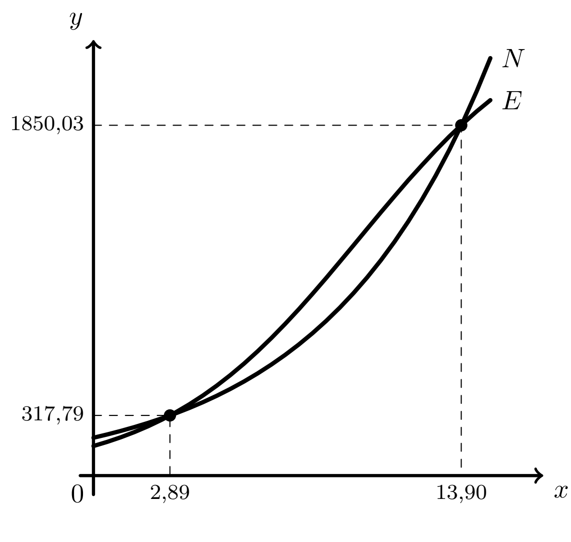
$$E(7) = \frac{2500}{1 + 15e^{-0,27\times 7}} \approx 765{,}44 \approx 765$$

Assim podemos concluir que a afirmação é falsa porque o triplo do número de alunos estrangeiros inscritos na faculdade F1 no início de 2004 é $410 \times 3 = 1230$, que é um valor que não é bem aproximado pelo valor de $E(7)$.

10.2. Representando na calculadora gráfica os modelos da variação do número de alunos estrangeiros inscritos nas duas faculdades ($y = \frac{2500}{1 + 15e^{-0,27x}}$ e $y = 200e^{0,16x}$), numa janela compatível com o limite temporal dos modelos, ou seja, $0 \leq x \leq 15$, obtemos os gráficos que se encontram reproduzidos na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção dos dois modelos, obtemos os valores aproximados (às centésimas) das coordenadas, ou seja, os valores correspondente aos tempos em que o número de alunos estrangeiros inscritos nas duas faculdades era igual, ou seja, os pontos de coordenadas (2,89 ; 319,79) e (13,90 ; 1850,03)

Assim, observando os valores arredondados às unidades dos pontos de interseção $t_1 \approx 2{,}89 \approx 3$ e $t_2 \approx 13{,}90 \approx 13$ podemos concluir que, o número de alunos estrangeiros inscritos, no início de cada ano, na faculdade F1 foi superior ao número de alunos estrangeiros inscritos, no início de cada ano, na faculdade F2 entre 2003 e 2014, ou seja, durante $2014 - 2003 = 11$ anos.



Exame – 2021, 2.ª Fase

11.

11.1. Como o número de utilizadores, em milhares, que, t anos após o início do ano de 2016, na região do Alentejo, utiliza a ParaPagarApp é bem aproximado pelo modelo, no início de 2016 ($t = 0$), o número de utilizadores era:

$$A(0) = \frac{20}{1 + e^{-0,2\times 0}} = 10 \text{ milhares}$$

Como o número de utilizadores, em Portugal continental, era 50 000, ou seja, 50 milhares, e o número de utilizadores que não pertenciam à região do Alentejo, correspondente a $50 - 10 = 40$ milhares, então calculando a percentagem, p, correspondente aos utilizadores que não não pertenciam à região do Alentejo, temos:

$$\frac{p}{40} = \frac{100}{50} \Leftrightarrow p = \frac{40\times 100}{50} \Leftrightarrow p = \frac{40\times 100}{50} \Leftrightarrow p = 80$$

Ou seja, no início de 2016 a percentagem de utilizadores da aplicação que não pertenciam à região do Alentejo era 80%.

11.2. Atendendo aos valores indicados no mapa, a percentagem de utilizadores da aplicação no Alentejo, numa perspetiva de longo prazo, é:

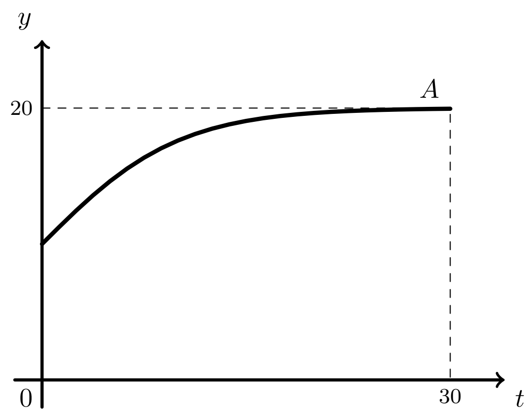
$$100 - 20 - 25 - 30 - 15 = 10$$

Como o número de utilizadores da aplicação em Portugal continental, se estima em 200 000, o número de utilizadores estimado na região do Alentejo, ou seja 10% deste valor, corresponde a:

$$200\,000 \times 0,1 = 20\,000$$

Representando o modelo apresentado para a região Alentejo, num horizonte temporal alargado, por exemplo de 30 anos, ou seja até 2046 ou seja, $0 \leq x \leq 30$, obtemos o gráfico que se encontra reproduzido na figura ao lado.

Determinando o valor aproximado de utilizadores esperados no ano 2046, ou seja, numa perspetiva de longo prazo, podemos verificar que o número de utilizadores no Alentejo tende a estabilizar em 20 milhares, ou seja, um valor aproximadamente igual ao valor calculado a partir dos dados do mapa, pelo que se pode considerar o modelo adequado.

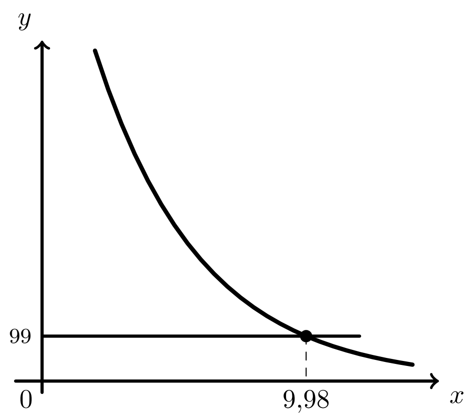


Exame – 2021, 1.ª Fase

12.

12.1. Para determinar o instante em que a qualidade da água é considerada boa pela primeira vez, ou seja, o tempo correspondente ao instante em que o número de micro-organismos por cada 100 ml é igual a 99, devemos resolver a equação $c(t) = 99$

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta, representamos o gráfico da função $y = 1200e^{-0,25t}$ e a reta $y = 99$, numa janela ajustada, obtemos o valor aproximado (com duas casas decimais) das coordenadas do ponto de interseção: (9,98 ; 99)



Assim, temos que o instante em que a qualidade da água é considerada boa pela primeira vez, é $t \approx 9{,}98$ dias, e calculando o número de peixes existentes no lago, neste instante, temos:

$$p(9{,}98) \approx \frac{5}{1 + e^{-0{,}21 \times 9{,}98}} \approx 4{,}45 \text{ milhares}$$

Logo, como 4400 peixes são 4,4 milhares, temos que $p(9{,}98)$ é maior que 4,4, ou seja, no instante em que a qualidade da água é considerada boa pela primeira vez, o número de peixes existentes no lago é superior a 4400.

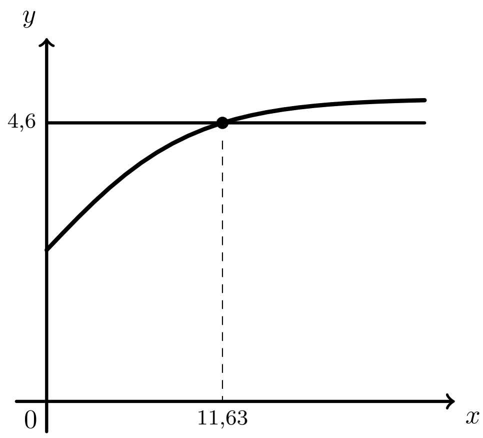
12.2. Observando a expressão algébrica da função p (ou a sua representação gráfica), podemos verificar que o número de peixes no lago tende a estabilizar no valor 5 milhares.

Assim, a introdução da nova espécie de peixes deve acontecer quando a população da espécie existente no lago for de $5000 - 400 = 4600$, ou seja, de 4,6 milhares.

Para determinar o instante em que a população é de 4,6 milhares, devemos resolver a equação $p(t) = 4{,}6$

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta, representamos o gráfico da função $y = \dfrac{5}{1 + e^{-0{,}21t}}$ e a reta $y = 4{,}6$, numa janela ajustada, obtemos o valor aproximado (com arredondamento às centésimas) das coordenadas do ponto de interseção: (11,63 ; 4,6)

Assim, temos que ao fim de 12 dias, após a manutenção do lago passar a ser feita pela AAA, pode-se fazer a introdução de novos peixes (porque foi no decorrer do 11.º dia que a população dos peixes existentes atingiu o valor de 4600).



Exame – 2020, Ép. especial

13.

13.1. Como a Elsa tomou o medicamento às 9 horas (a que corresponde $t = 0$), então as 14 horas e 30 minutos corresponde a um momento em que passaram 5 horas e meia, ou seja, $t = 5{,}5$

Assim, determinando a temperatura corporal da Elsa, às 14 horas e 30 minutos, de acordo com o modelo, temos:

$$C(5{,}5) = 26 + 13e^{-0{,}008\times 5{,}5} \approx 38{,}440\,^\circ\mathrm{C}$$

Calculado a temperatura no momento da toma do medicamento, temos:

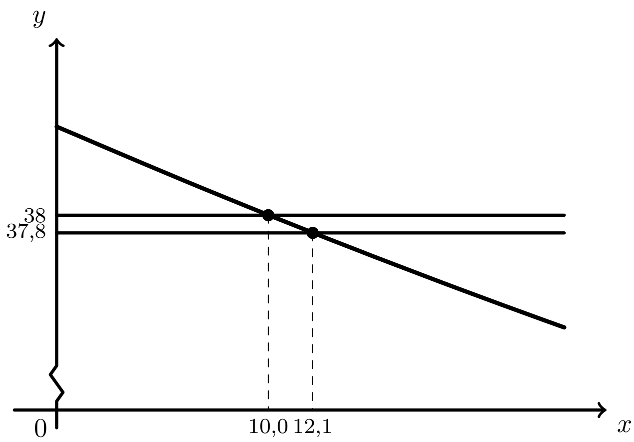
$$C(0) = 26 + 13e^{-0{,}008\times 0} = 39\,^\circ\mathrm{C}$$

Como $C(0) - C(5{,}5) \approx 39 - 38{,}440 \approx 0{,}56$, podemos verificar que a diminuição da temperatura neste período de tempo foi superior a $0{,}5\,^\circ\mathrm{C}$ e concluir que não terá sido necessário recorrer a outro medicamento.

13.2. Representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo da evolução da temperatura corporal da Elsa em função do tempo ($y = 26 + 13e^{-0{,}008x}$) e das retas correspondentes às temperaturas comunicadas nos dois telefonemas, 38 °C e 37,8 °C ($y = 38$ e $y = 37{,}8$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $0 \leq x \leq 24$ e também com os valores esperados para a evolução da altura, ou seja, $35 \leq y < 40$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção do modelo com as duas retas, obtemos o valor aproximado (às décimas) das abcissas dos pontos de interseção, ou seja, os valores correspondente aos tempos em que as temperaturas eram, respetivamente 38 °C e 37,8 °C, ou seja, os pontos de coordenadas (10,0 ; 38) e (12,1 ; 37,8)

Assim, o tempo decorrido entre os dois telefonemas foi de $12{,}1 - 10{,}0 \approx 2$ minutos



Exame – 2020, 2.ª Fase

14.

14.1. Podemos calcular a a altura em metros, a que o balão se encontrava no instante em que foi lançado, ou seja, o valor do modelo para $t = 0$:

$$A(0) = \frac{30}{1 + 29e^{-2\times 0}} = 1$$

Da mesma forma podemos determinar a altura do balão 1 minuto após o lançamento, ou seja, o valor do modelo para $t = 1$:

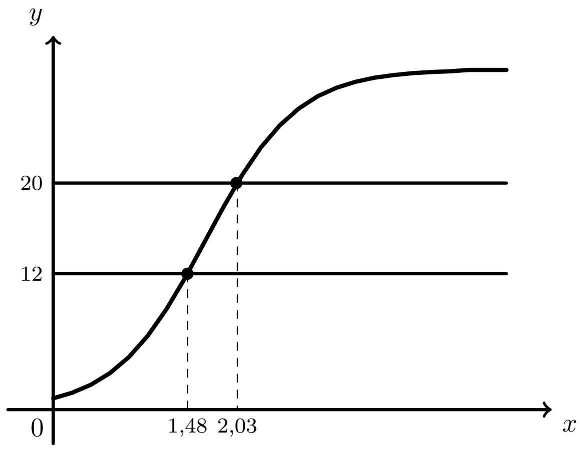
$$A(1) = \frac{30}{1 + 29e^{-2\times 1}} \approx 6{,}09$$

E assim o valor, em metros, arredondado às unidades, da subida do balão no primeiro minuto, é:

$$A(1) - A(0) \approx 6{,}09 - 1 \approx 5$$

14.2. Representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo da altura do balão em função do tempo $\left(y = \dfrac{30}{1+29e^{-2x}}\right)$ e das retas correspondentes às alturas de 12 metros e de 20 metros ($y = 12$ e $y = 20$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $0 \leq x \leq 5$ e também com os valores esperados para a evolução da altura, ou seja, $0 \leq y < 30$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção do modelo com as duas retas, obtemos o valor aproximado (às centésimas) das abcissas dos pontos de interseção, ou seja, os valores correspondente aos tempos em que as alturas eram, respetivamente 12 e 20 metros, ou seja, os pontos de coordenadas $(1{,}48\,;\,12)$ e $(2{,}03\,;\,20)$



Assim, o balão esteve entre os 12 e os 20 metros durante $2{,}03 - 1{,}48 = 0{,}55$ minutos

Calculando o número de segundos correspondentes a 0,55 minutos, temos:

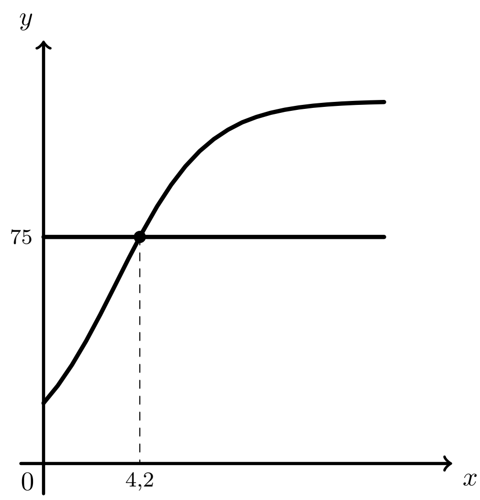
$$0{,}55 \times 60 = 33$$

Ou seja, de acordo com o modelo foram lançados confetes durante 33 segundos.

Exame – 2020, 1.ª Fase

15.

15.1. Representando na calculadora gráfica, o modelo da variação do número de visitantes do CCF em cada ano $\left(y = \dfrac{120}{1+5e^{-0{,}5x}}\right)$, e a reta correspondente a 75 000 visitantes, ou seja, 75 milhares ($y = 75$), numa janela que permita observar a interseção dos dois gráficos, obtemos a representação reproduzida na figura ao lado.



Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção do modelo de variação com a reta, obtemos os valores aproximados (às décimas) das coordenadas, ou seja, o valor correspondente ao número de anos após o início de 1990 em que o número de visitantes foi 75 000: $(4{,}2\,;\,75)$

Assim, podemos concluir que o número de visitantes ultrapassou pela primeira vez o valor de 75 000 4,2 anos após o início de 1990, ou seja, durante o ano de 1994.

15.2. Calculando o número anual de visitantes no início de 1995, ou seja 5 anos após o início de 1990, temos:

$$V(5) = \frac{120}{1+5e^{-0,5\times 5}} \approx 85{,}0807 \text{ milhares de visitantes}$$

Da mesma forma, o número anual de visitantes no início de 2000, ou seja 10 anos após o início de 1990, é:

$$V(10) = \frac{120}{1+5e^{-0,5\times 10}} \approx 116{,}0890 \text{ milhares de visitantes}$$

Assim, o valor percentual do aumento do número de visitantes do CCF entre o início de 1995 (100%) e o início de 2000, arredondada às unidades, é:

$$\frac{85{,}0807}{31{,}0083} = \frac{100}{p} \Leftrightarrow p = \frac{31{,}0083\times 100}{85{,}0807} \Rightarrow p \approx 36\%$$

Exame – 2019, Ép. especial

16.

16.1. Calculando o valor pelo qual foi arrematado, ou seja o valor associado a zero trimestres, temos;

$$V(0) = \frac{1000}{1+4e^{-0,2\times 0}} = \frac{1000}{1+4e^{0}} = \frac{1000}{1+4\times 1} = \frac{1000}{5} = 200 \text{ euros}$$

Calculando o valor correspondente a uma valorização de 30%, temos:

$$1{,}3\times V(0) = 1{,}3\times 200 = 260 \text{ euros}$$

Calculando o valor do quadro, seis meses, ou seja 2 trimestres, após ter sido arrematado, de acordo com o modelo, temos:

$$V(2) = \frac{1000}{1+4e^{-0,2\times 2}} = \frac{1000}{1+4e^{-0,4}} \approx 271{,}64 \text{ euros}$$

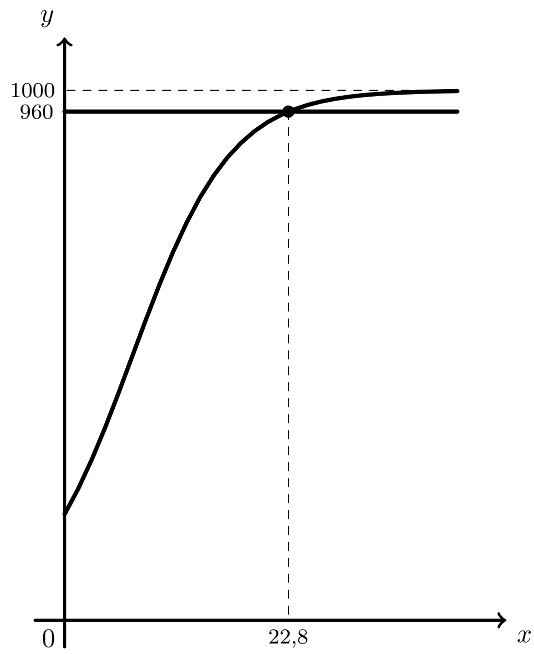
Desta forma, de acordo com o critério definido pela Teresa, podemos afirmar que a compra foi um bom investimento porque o valor do quadro seis meses após ter sido comprado (271,64 €) é superior a uma valorização de 30% (260 €).

16.2. Representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo da variação da valorização do quadro $\left(y = \dfrac{1000}{1+4e^{-0,2x}}\right)$, numa janela que permita observar a variação da valorização até que o preço seja estável ou seja, $0 \leq x \leq 40$ e também com os valores esperados para a evolução da percentagem, ou seja, $0 \leq y < 1100$, que se encontra reproduzido na figura seguinte. Usando a função da calculadora que pemite observar as coordenadas dos pontos do gráfico, e fazendo variar os valores das abcissas dos pontos, podemos verificar que com o passar do tempo, o valor de mercado do quadro tende a estabilizar em torno dos 1000 €,

Assim, como a Teresa vendeu o quadro por um preço 40 euros abaixo desse valor, calculamos o preço de venda do quadro:

$$1000 - 40 = 960 \text{ €}$$

Representando na calculadora gráfica, para além do modelo anterior, a reta correspondente ao 960 € $(y = 960)$, obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.



Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção do modelo de variação com a reta, obtemos os valores aproximados (às décimas) das coordenadas, ou seja, o valor correspondente ao tempo em que o valor de mercado do quadro era de 960 euros, ou seja: $(22,8\,;\,960)$

Assim, podemos concluir que, a Teresa vendeu o quadro 22,8 trimestres após o ter arrematado no leilão. Como cada trimestre tem 3 meses, temos que a venda foi feita após

$$22,8 \times 3 = 68,4 \text{ meses}$$

o número de meses que a Teresa manteve o quadro na sua posse, é 68 meses.

Exame – 2019, 2.ª Fase

17.

17.1. Como t representa o tempo, em minutos, e se considera que $t = 0$ é o instante em que o Paulo observou, pela primeira vez, a barra de progresso; um minuto antes de o Paulo observar a barra de progresso pela primeira vez, corresponde a $t = -1$, pelo que a percentagem da descarga do jogo associada é:

$$D(-1) = -200 + 100\log_{10}(50 \times (-1) + 250) \approx 30,103\%$$

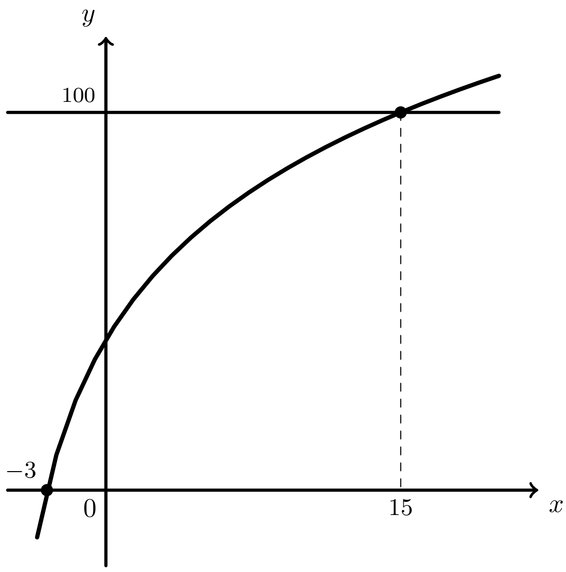
Desta forma, como a descarga completa do jogo, corresponde a transferir 8 gigabytes, a percentagem correspondente, arredondada às décimas, é:

$$8 \times 0,301 \approx 2,4 \text{ gigabytes}$$

17.2. Para que a descarga do jogo fique concluída, a percentagem deve atingir os 100%. Assim, representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo da variação da percentagem de descarga ($y = -200 + 100\log_{10}(50x + 250)$) e da reta correspondente ao 100% ($y = 100$), numa janela que permita observar a variação da percentagem entre os zero e os 100%, ou seja, $-3{,}5 \leq x \leq 20$ e também com os valores esperados para a evolução da percentagem, ou seja, $0 \leq y < 100$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar os valores das coordenadas do ponto de interseção do modelo com a reta, obtemos o valor da abcissa do ponto de interseção, ou seja, o tempo (número de minutos) após o Paulo ter olhado para a barra de progresso pela primeira vez, ou seja, o ponto de coordenadas $(15\,;\,100)$

Da mesma forma, determinamos o valor da coordenada em que o gráfico do modelo interseta o eixo das abcissas, ou que permite determinar o tempo (número de minutos) antes o Paulo ter olhado para a barra de progresso pela primeira vez, ou seja, o ponto de coordenadas $(-3\,;\,0)$



Assim, temos que antes do Paulo ter olhado pela primeira vez para a barra de progresso passaram 3 minutos e depois de ter olhado passaram mais 15 minutos, até a descarga atingir os 100%, pelo que o tempo que demorou a efetuar-se a descarga do jogo desde que o Paulo deu início ao processo foi:

$$3 + 15 = 18 \text{ minutos}$$

Exame – 2019, 1.ª Fase

18.

18.1. Recorrendo à calculadora podemos calcular o número de eleitores inscritos no momento da criação da freguesia, ou seja, zero anos após a sua criação ($t = 0$):

$$E(0) = 7700 - 1471\ln(0 + 1) = 7700$$

De forma análoga podemos calcular o número de eleitores inscritos cinco anos após a sua criação ($t = 5$):

$$E(5) = 7700 - 1471\ln(5 + 1) \approx 5064$$

Logo, o valor da redução do número de eleitores da freguesia, nos primeiros cinco anos, é:

$$E(0) - E(5) = 7700 - 5064 = 2636$$