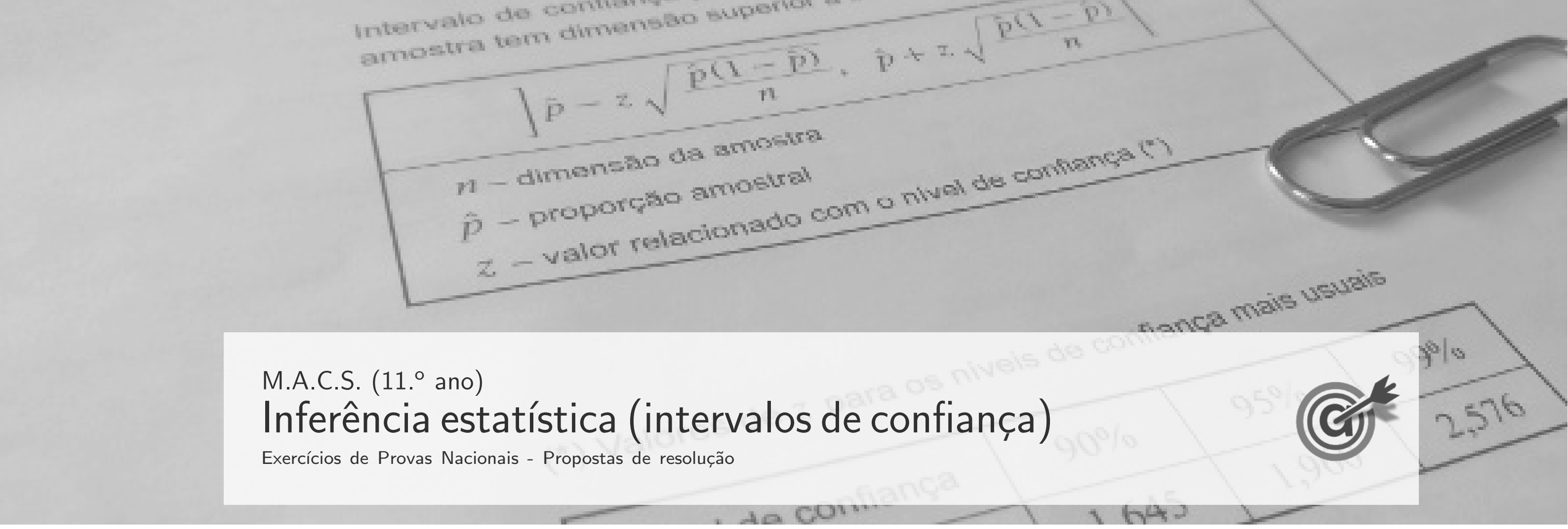

M.A.C.S. (11.º ano)

Inferência estatística (intervalos de confiança)

Exercícios de Provas Nacionais - Propostas de resolução

1. O número de turistas que foram questionados, ou seja, a dimensão da amostra, é $n = 105$.

   Como o intervalo $]0{,}306; 0{,}494[$ é um intervalo de confiança a 95%, sabemos que o valor de z correspondente a este nível de confiança é 1,960.

   Sabendo que o valor de $\hat{p}$, ou seja, proporção de turistas que ficariam no máximo três dias na ilha, é o ponto médio do intervalo de confiança para a proporção, temos que:

$$\hat{p} = \frac{0{,}306 + 0{,}494}{2} = \frac{0{,}8}{2} = 0{,}4$$

   Sabemos ainda que, designado por k o número de turistas que responderam que ficariam exatamente três dias na ilha, a proporção correspondente é $\frac{18+k}{105}$ (considerando os turistas que ficaram 2 ou 3 dias na ilha), pelo que, podemos calcular obter o valor de k através da equação:

$$\hat{p} = \frac{18+k}{105} \Leftrightarrow 0{,}4 = \frac{18+k}{105} \Leftrightarrow 0{,}4 \times 105 = 18 + k \Leftrightarrow 42 - 18 = k \Leftrightarrow 24 = k$$

Exame – 2024, Ép. especial

2. O número de pessoas que reponderam sobre as suas preferências, ou seja, a dimensão da amostra, é:

$$n = 900$$

Calculando a proporção de pessoas que preferem o jogo C, temos:

$$\hat{p} = \frac{324}{900} = \frac{400}{625} = 0{,}36$$

Considerando o intervalo de confiança para a proporção $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \, , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, temos que a amplitude é:

$$\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) = \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Assim, igualando a expressão da amplitude ao valor dado, substituindo os valores da proporção ($\hat{p}$) e de n, e resolvendo a equação, temos:

$$2z\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{900}} = 0{,}06272 \Leftrightarrow z = \frac{0{,}06272}{2 \times \sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{900}}} \Rightarrow z \approx 1{,}96$$

Assim, temos que o nível de confiança associado ao valor $z \approx 1{,}06$, ou seja o nível de confiança do intervalo, é 95% .

Exame – 2024, 2.ª Fase

3. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:
   - A dimensão da amostra: $n = 225$
   - A média amostral: $\overline{x} = 4{,}5$
   - O desvio padrão amostral: $s = 1{,}2$
   - O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

   Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} \, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às décimas, temos:

$$\left] 4{,}5 - 2{,}576 \times \frac{1{,}2}{\sqrt{225}} \; ; \; 4{,}5 + 2{,}576 \times \frac{1{,}2}{\sqrt{225}} \right[\approx]4{,}29; 4{,}71[$$

   Pela observação do intervalo de confiança, podemos concluir com um nível de confiança de 99% que o número médio de etapas é inferior a 4,71, ou seja, menor que 6, pelo que o Fred tinha razão para duvidar da afirmação.

Exame – 2024, 1.ª Fase

4. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores relativos à marca de classe de cada uma das classes do histograma, e noutra lista os valores correspondentes às respetivas frequências absolutas absolutas simples, temos:

Marca de classe	**Freq. absoluta simples**
15	28
25	36
35	77
45	89
55	26

Calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos o valor da média e do desvio padrão da amostra, arredondados às décimas:

$$\overline{x} \approx 36{,}9 \textbf{ e } s \approx 11{,}4$$

Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, considerando ainda:

- A dimensão da amostra: $n = 256$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança para o tempo necessário para o embarque $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} \, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às décimas, temos:

$$\left] 36{,}9 - 1{,}960 \times \frac{11{,}4}{\sqrt{256}} \, ; \, 36{,}9 + 1{,}960 \times \frac{11{,}4}{\sqrt{256}} \right[\approx]35{,}5 \, ; \, 38{,}3[$$

Exame – 2023, 2.ª Fase

5. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 90 + 420 + 210 + 180 = 900$
- A proporção amostral do número de visitantes que visitaram a Festa da Freguesia pela primeira vez: $\hat{p} = \frac{90}{900} = 0{,}1$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \, , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left] 0{,}1 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{900}} \, ; \, 0{,}1 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{900}} \right[\approx]0{,}08; 0{,}12[$$

Exame – 2023, 1.ª Fase

6. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:
   - A dimensão da amostra: $n = 225$
   - A proporção amostral de espectadores que adquiriram *online* o ingresso para o jogo: $\hat{p} = \frac{81}{225} = 0{,}36$
   - O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

   Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança, para estimar a proporção de espectadores que adquiriram *online* o ingresso para o jogo $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \, , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left] 0{,}36 - 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{225}} \; ; \; 0{,}36 + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{225}} \right[\approx]0{,}28; 0{,}44[$$

Exame – 2022, Ép. especial

7. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, considerando o valor n para a dimensão da amostra e os valores:
   - A média amostral: $\overline{x}$
   - O desvio padrão amostral: $s \approx 5{,}5$
   - O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

   Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} \, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, temos:

$$\left] \overline{x} - 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} \, , \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} \right[$$

   E assim, a amplitude do intervalo, em função de n, é:

$$\overline{x} + 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} - \left(\overline{x} - 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} \right) = \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} - \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} = 2 \times 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} = \frac{18{,}095}{\sqrt{n}}$$

   Como a amplitude do intervalo de confiança é 0,3619, temos que a a dimensão da amostra correspondente é a solução da equação

$$\frac{18{,}095}{\sqrt{n}} = 0{,}3619$$

   Inserindo na calculadora gráfica a expressão $y = \frac{18{,}095}{\sqrt{x}}$, e visualizando a tabela de valores da função, reproduzida na figura ao lado, podemos identificar o valor de x que verifica a condição anterior, ou seja, a solução da equação, isto é, $x = 2500$

X	Y1
2497	0,36211
2498	0,36204
2499	0,36197
2500	0,3619
2501	0,36182
2502	0,36176
2503	0,36168

   Logo, podemos concluir que a dimensão da amostra, para verificar as condições do enunciado é:

$$n = 2500$$

Exame – 2022, 2.ª Fase

8. Calculando a proporção de clientes da Ir&Voltar que indicam o Dubai como destino favorito relativa a esta amostra, temos:

$$\hat{p} = \frac{400}{125 + 400 + 100} = \frac{400}{625} = 0{,}64$$

E o número de inquiridos, ou seja, a dimensão da amostra é:

$$n = 125 + 400 + 100 = 625$$

Considerando o intervalo de confiança para a proporção $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \, , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, temos que a amplitude é:

$$\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) = \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Assim, igualando a expressão da amplitude ao valor dado, substituindo os valores da proporção ($\hat{p}$) e de n, e resolvendo a equação, temos:

$$2z\sqrt{\frac{0{,}64(1-0{,}64)}{625}} = 0{,}075264 \Leftrightarrow z = \frac{0{,}075264}{2 \times \sqrt{\frac{0{,}64(1-0{,}64)}{625}}} \Rightarrow z \approx 1{,}96$$

Assim, temos que o nível de confiança associado ao valor $z \approx 1{,}06$, ou seja o nível de confiança do intervalo, é 95% .

Exame – 2022, 1.ª Fase

9.

9.1. A margem de erro do intervalo do intervalo de confiança é metade da amplitude do intervalo, ou seja:

$$\frac{14{,}56 - 13{,}86}{2} = \frac{0{,}64}{2} = 0{,}32$$

Resposta: **Opção D**

9.2. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 100$
- A média amostral: $\overline{x} = 12$
- O desvio padrão amostral: $s = 2{,}1$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} \, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às décimas, temos:

$$\left] 12 - 1{,}645 \times \frac{2{,}1}{\sqrt{100}} \, ; \, 12 + 1{,}645 \times \frac{2{,}1}{\sqrt{100}} \right[\approx]11{,}7; 12{,}3[$$

Exame – 2021, Ép. especial

10. Observando que 21 meses corresponde a 1 ano e 9 meses e que 9 meses representa $\frac{9}{12} = 0{,}75$ anos, temos que o desvio padrão da amostra, em anos é 1,75.

Como a amostra dos alunos que participaram no programa Erasmus+ em 2019 tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 324$
- A média amostral: $\overline{x} = 20{,}16$ anos
- O desvio padrão amostral: $s = 1{,}75$ horas
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança para o atraso médio $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left] 20{,}16 - 2{,}576 \times \frac{1{,}75}{\sqrt{324}} \,;\, 20{,}16 + 2{,}576 \times \frac{1{,}75}{\sqrt{324}} \right[\approx \left]19{,}91; 20{,}41\right[$$

Exame – 2021, 2.ª Fase

11. Observando a tabela podemos verificar que dos 625 utilizadores da ParaPagarApp, o número dos que na última compra, usaram a aplicação, pagaram mais de 20 euros e, no máximo, pagaram 60 euros, é:

$$81 + 44 = 125$$

Assim, como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 625$
- A proporção amostral dos clientes que consideram as obras necessárias: $\hat{p} = \frac{125}{625} = 0{,}2$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left] 0{,}2 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}2(1-0{,}2)}{625}} \,;\, 0{,}2 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}2(1-0{,}2)}{625}} \right[\approx \left]0{,}17; 0{,}23\right[$$

Exame – 2021, 1.ª Fase

12. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores dos números alugueres efetuados pela Paula, e noutra lista o número de semanas, e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da média de idas ao cinema e o desvio padrão para a variável≪número de alugueres das BEA efetuados pela Paula, em cada semana≫:

N.º de alugueres	**N.º de semanas**
0	5
1	6
3	16
4	9

$$\overline{x} = 2{,}5 \text{ e } s \approx 1{,}4$$

Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 36$
- A média amostral: $\overline{x} = 2{,}5$
- O desvio padrão amostral: $s \approx 1{,}4$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores às décimas, temos:

$$\left]2{,}5 - 1{,}645 \times \frac{1{,}4}{\sqrt{36}}\, ;\, 2{,}5 + 1{,}645 \times \frac{1{,}4}{\sqrt{36}}\right[\approx]2{,}1; 2{,}9[$$

Exame – 2020, Ép. especial

13. Como a dimensão da amostra das pessoas que realizaram apenas um *Interrail* em 2019, tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 256$
- A média amostral: $\overline{x} = 5$ horas
- O desvio padrão amostral: $s = 3{,}9$ horas
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança para o atraso médio $\left(\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores com três casas decimais, temos:

$$\left]5 - 2{,}576 \times \frac{3{,}9}{\sqrt{256}}\, ;\, 5 + 2{,}576 \times \frac{3{,}9}{\sqrt{256}}\right[\approx]4{,}372; 5{,}628[$$

Assim, a margem de erro do intervalo, ou seja, metade da amplitude do intervalo de confiança, arredondada às centésimas, é:

$$\frac{\overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} - \left(\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}{2} \approx \frac{5{,}628 - 4{,}372}{2} \approx 0{,}63$$

Exame – 2020, 2.ª Fase

14. Calculando a proporção de pessoas inquiridas que têm intenção de acampar na zona Z1, temos:

$$\hat{p} = \frac{125}{125+250+150+100} = \frac{125}{625} = 0{,}2$$

E o número de inquiridos é:

$$n = 125+250+150+100 = 625$$

Considerando o intervalo de confiança para a proporção $\left(\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, temos que a amplitude é:

$$\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Assim, igualando a expressão da amplitude ao valor dado, substituindo os valores da proporção ($\hat{p}$) e de n, e resolvendo a equação, temos:

$$2z\sqrt{\frac{0{,}2(1-0{,}2)}{625}} = 0{,}05264 \Leftrightarrow z = \frac{0{,}05264}{2 \times \sqrt{\frac{0{,}2(1-0{,}2)}{625}}} \Rightarrow z \approx 1{,}645$$

Assim, temos que o nível de confiança associado ao valor $z \approx 1{,}645$, ou seja o nível de confiança do intervalo, é de 90%

Exame – 2020, 1.ª Fase

15. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:
   - A dimensão da amostra: $n = 500$
   - A proporção amostral dos clientes que consideram as obras necessárias: $\hat{p} = \frac{150}{500} = 0{,}3$
   - O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

   Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left]0{,}3 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}3(1-0{,}3)}{500}} \, ; \, 0{,}3 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}3(1-0{,}3)}{500}}\right[\approx]0{,}27; 0{,}33[$$

Exame – 2019, Ép. especial

16. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:
    - A dimensão da amostra: $n = 200$
    - A proporção amostral de coleccionares presentes no encontro: $\hat{p} = \dfrac{45}{200} = 0{,}225$
    - O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

    Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \, , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores com quatro casas decimais, temos:

    $$\left] 0{,}225 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}225(1-0{,}225)}{200}} \; ; \; 0{,}225 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}225(1-0{,}225)}{200}} \right[\approx]0{,}1764; 0{,}2736[$$

    Assim, o intervalo de confiança a 90% para a proporção de colecionadores de jogos de tabuleiro presentes no encontro, em percentagem, arredondados às décimas, é: $]\,17{,}6\,\%\,;\,27{,}4\,\%\,[$

Exame – 2019, 2.ª Fase

17. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, considerando o valor n para a dimensão da amostra e os valores:
    - O desvio padrão amostral: $s \approx 10$
    - O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

    Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \overline{x} - z\dfrac{s}{\sqrt{n}} \, , \overline{x} + z\dfrac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, temos:

    $$\left] \overline{x} - 1{,}645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \, , \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \right[$$

    E assim, a amplitude do intervalo, em função de n, é:

    $$\overline{x} + 1{,}645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} - \left(\overline{x} - 1{,}645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \right) = \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} - \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 2 \times 1{,}645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = \frac{32{,}9}{\sqrt{n}}$$

    Como a amplitude do intervalo de confiança é 0,658, temos que a a dimensão da amostra correspondente é a solução da equação

    $$\frac{32{,}9}{\sqrt{n}} = 0{,}658$$

    Inserindo na calculadora gráfica a expressão $y = \dfrac{32{,}9}{\sqrt{x}}$, e visualizando a tabela de valores da função, reproduzida na figura ao lado, podemos identificar o valor de x que verifica a condição anterior, ou seja, a solução da equação, isto é, $x = 2500$

X	Y1
2497	0,65840
2498	0,65826
2499	0,65813
2500	0,658
2501	0,65768
2502	0,65774
2503	0,65761

    Logo, podemos concluir que a dimensão da amostra, para verificar as condições do enunciado é:

    $$n = 2500$$

Exame – 2019, 1.ª Fase