M.A.C.S. (11.º ano)

Inferência estatística (intervalos de confiança)

Exercícios de Provas Nacionais - Propostas de resolução

1. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:
   - A dimensão da amostra: $n = 225$
   - A proporção amostral de espectadores que adquiriram *online* o ingresso para o jogo: $\hat{p} = \dfrac{81}{225} = 0{,}36$
   - O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

   Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança, para estimar a proporção de espectadores que adquiriram *online* o ingresso para o jogo $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \, , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left] 0{,}36 - 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{225}} \; ; \; 0{,}36 + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{225}} \right[\approx \left] 0{,}28 ; 0{,}44 \right[$$

Exame – 2022, Ép. especial

2. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, considerando o valor n para a dimensão da amostra e os valores:

   - A média amostral: $\overline{x}$
   - O desvio padrão amostral: $s \approx 5{,}5$
   - O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

   Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} \,, \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, temos:

   $$\left]\overline{x} - 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} \,, \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}}\right[$$

   E assim, a amplitude do intervalo, em função de n, é:

   $$\overline{x} + 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} - \left(\overline{x} - 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}}\right) = \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} - \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} = 2 \times 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} = \frac{18{,}095}{\sqrt{n}}$$

   Como a amplitude do intervalo de confiança é 0,3619, temos que a a dimensão da amostra correspondente é a solução da equação

   $$\frac{18{,}095}{\sqrt{n}} = 0{,}3619$$

   Inserindo na calculadora gráfica a expressão $y = \frac{18{,}095}{\sqrt{x}}$, e visualizando a tabela de valores da função, reproduzida na figura ao lado, podemos identificar o valor de x que verifica a condição anterior, ou seja, a solução da equação, isto é, $x = 2500$

X	Y1
2497	0,36211
2498	0,36204
2499	0,36197
2500	0,3619
2501	0,36182
2502	0,36176
2503	0,36168

   Logo, podemos concluir que a dimensão da amostra, para verificar as condições do enunciado é:

   $$n = 2500$$

Exame – 2022, 2.ª Fase

3. Calculando a proporção de clientes da Ir&Voltar que indicam o Dubai como destino favorito relativa a esta amostra, temos:

$$\hat{p} = \frac{400}{125 + 400 + 100} = \frac{400}{625} = 0{,}64$$

E o número de inquiridos, ou seja, a dimensão da amostra é:

$$n = 125 + 400 + 100 = 625$$

Considerando o intervalo de confiança para a proporção $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \, , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, temos que a amplitude é:

$$\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) = \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Assim, igualando a expressão da amplitude ao valor dado, substituindo os valores da proporção ($\hat{p}$) e de n, e resolvendo a equação, temos:

$$2z\sqrt{\frac{0{,}64(1-0{,}64)}{625}} = 0{,}075264 \Leftrightarrow z = \frac{0{,}075264}{2 \times \sqrt{\frac{0{,}64(1-0{,}64)}{625}}} \Rightarrow z \approx 1{,}96$$

Assim, temos que o nível de confiança associado ao valor $z \approx 1{,}06$, ou seja o nível de confiança do intervalo, é 95% .

Exame – 2022, 1.ª Fase

4.

4.1. A margem de erro do intervalo do intervalo de confiança é metade da amplitude do intervalo, ou seja:

$$\frac{14{,}56 - 13{,}86}{2} = \frac{0{,}64}{2} = 0{,}32$$

Resposta: **Opção D**

4.2. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 100$
- A média amostral: $\overline{x} = 12$
- O desvio padrão amostral: $s = 2{,}1$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} \, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às décimas, temos:

$$\left] 12 - 1{,}645 \times \frac{2{,}1}{\sqrt{100}} \; ; \; 12 + 1{,}645 \times \frac{2{,}1}{\sqrt{100}} \right[\approx \left] 11{,}7; 12{,}3 \right[$$

Exame – 2021, Ép. especial

5. Observando que 21 meses corresponde a 1 ano e 9 meses e que 9 meses representa $\frac{9}{12} = 0{,}75$ anos, temos que o desvio padrão da amostra, em anos é 1,75.

   Como a amostra dos alunos que participaram no programa Erasmus+ em 2019 tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

   - A dimensão da amostra: $n = 324$
   - A média amostral: $\overline{x} = 20{,}16$ anos
   - O desvio padrão amostral: $s = 1{,}75$ horas
   - O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

   Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança para o atraso médio $\left(\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left]20{,}16 - 2{,}576 \times \frac{1{,}75}{\sqrt{324}}\ ;\ 20{,}16 + 2{,}576 \times \frac{1{,}75}{\sqrt{324}}\right[\approx \left]19{,}91; 20{,}41\right[$$

Exame – 2021, 2.ª Fase

6. Observando a tabela podemos verificar que dos 625 utilizadores da ParaPagarApp, o número dos que na última compra, usaram a aplicação, pagaram mais de 20 euros e, no máximo, pagaram 60 euros, é:

$$81 + 44 = 125$$

   Assim, como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

   - A dimensão da amostra: $n = 625$
   - A proporção amostral dos clientes que consideram as obras necessárias: $\hat{p} = \frac{125}{625} = 0{,}2$
   - O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

   Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\, , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left]0{,}2 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}2(1-0{,}2)}{625}}\ ;\ 0{,}2 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}2(1-0{,}2)}{625}}\right[\approx \left]0{,}17; 0{,}23\right[$$

Exame – 2021, 1.ª Fase

7. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores dos números alugueres efetuados pela Paula, e noutra lista o número de semanas, e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da média de idas ao cinema e o desvio padrão para a variável≪número de alugueres das BEA efetuados pela Paula, em cada semana≫:

N.º de alugueres	**N.º de semanas**
0	5
1	6
3	16
4	9

$$\overline{x} = 2{,}5 \text{ e } s \approx 1{,}4$$

Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 36$
- A média amostral: $\overline{x} = 2{,}5$
- O desvio padrão amostral: $s \approx 1{,}4$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores às décimas, temos:

$$\left]2{,}5 - 1{,}645 \times \frac{1{,}4}{\sqrt{36}}\, ;\, 2{,}5 + 1{,}645 \times \frac{1{,}4}{\sqrt{36}}\right[\approx]2{,}1; 2{,}9[$$

Exame – 2020, Ép. especial

8. Como a dimensão da amostra das pessoas que realizaram apenas um *Interrail* em 2019, tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 256$
- A média amostral: $\overline{x} = 5$ horas
- O desvio padrão amostral: $s = 3{,}9$ horas
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança para o atraso médio $\left(\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores com três casas decimais, temos:

$$\left]5 - 2{,}576 \times \frac{3{,}9}{\sqrt{256}}\, ;\, 5 + 2{,}576 \times \frac{3{,}9}{\sqrt{256}}\right[\approx]4{,}372; 5{,}628[$$

Assim, a margem de erro do intervalo, ou seja, metade da amplitude do intervalo de confiança, arredondada às centésimas, é:

$$\frac{\overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} - \left(\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}{2} \approx \frac{5{,}628 - 4{,}372}{2} \approx 0{,}63$$

Exame – 2020, 2.ª Fase

9. Calculando a proporção de pessoas inquiridas que têm intenção de acampar na zona Z1, temos:

$$\hat{p} = \frac{125}{125 + 250 + 150 + 100} = \frac{125}{625} = 0{,}2$$

E o número de inquiridos é:

$$n = 125 + 250 + 150 + 100 = 625$$

Considerando o intervalo de confiança para a proporção $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, temos que a amplitude é:

$$\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) = \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Assim, igualando a expressão da amplitude ao valor dado, substituindo os valores da proporção ($\hat{p}$) e de n, e resolvendo a equação, temos:

$$2z\sqrt{\frac{0{,}2(1-0{,}2)}{625}} = 0{,}05264 \Leftrightarrow z = \frac{0{,}05264}{2 \times \sqrt{\frac{0{,}2(1-0{,}2)}{625}}} \Rightarrow z \approx 1{,}645$$

Assim, temos que o nível de confiança associado ao valor $z \approx 1{,}645$, ou seja o nível de confiança do intervalo, é de 90%

Exame – 2020, 1.ª Fase

10. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:
    - A dimensão da amostra: $n = 500$
    - A proporção amostral dos clientes que consideram as obras necessárias: $\hat{p} = \frac{150}{500} = 0{,}3$
    - O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left] 0{,}3 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}3(1-0{,}3)}{500}} \, ; \, 0{,}3 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}3(1-0{,}3)}{500}} \right[\approx]0{,}27; 0{,}33[$$

Exame – 2019, Ép. especial

11. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:
    - A dimensão da amostra: $n = 200$
    - A proporção amostral de coleccionares presentes no encontro: $\hat{p} = \frac{45}{200} = 0{,}225$
    - O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

    Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \, , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores com quatro casas decimais, temos:

$$\left] 0{,}225 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}225(1-0{,}225)}{200}} \; ; \; 0{,}225 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}225(1-0{,}225)}{200}} \right[\approx \left]0{,}1764; 0{,}2736\right[$$

    Assim, o intervalo de confiança a 90% para a proporção de colecionadores de jogos de tabuleiro presentes no encontro, em percentagem, arredondados às décimas, é: $]\,17{,}6\%\,;\,27{,}4\%\,[$

Exame – 2019, 2.ª Fase

12. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, considerando o valor n para a dimensão da amostra e os valores:
    - O desvio padrão amostral: $s \approx 10$
    - O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

    Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} \, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, temos:

$$\left] \overline{x} - 1{,}645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \, , \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \right[$$

    E assim, a amplitude do intervalo, em função de n, é:

$$\overline{x} + 1{,}645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} - \left(\overline{x} - 1{,}645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \right) = \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} - \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 2 \times 1{,}645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = \frac{32{,}9}{\sqrt{n}}$$

    Como a amplitude do intervalo de confiança é 0,658, temos que a a dimensão da amostra correspondente é a solução da equação

$$\frac{32{,}9}{\sqrt{n}} = 0{,}658$$

    Inserindo na calculadora gráfica a expressão $y = \frac{32{,}9}{\sqrt{x}}$, e visualizando a tabela de valores da função, reproduzida na figura ao lado, podemos identificar o valor de x que verifica a condição anterior, ou seja, a solução da equação, isto é, $x = 2500$

X	Y1
2497	0,65840
2498	0,65826
2499	0,65813
2500	0,658
2501	0,65768
2502	0,65774
2503	0,65761

    Logo, podemos concluir que a dimensão da amostra, para verificar as condições do enunciado é:

$$n = 2500$$

Exame – 2019, 1.ª Fase

13\.

13.1. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 324$
- A proporção amostral das pessoas satisfeitas, arredondado às centésimas: $\hat{p} = \frac{235}{342} \approx 0{,}73$
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \, , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores com quatro casas decimais, temos:

$$\left]0{,}73 - 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}73(1-0{,}73)}{324}} \; ; \; 0{,}73 + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}73(1-0{,}73)}{324}}\right[\approx \left]0{,}6665; 0{,}7935\right[$$

Assim, o intervalo de confiança a 99% para a percentagem de pessoas satisfeitas, com os valores dos extremos do intervalo em percentagem, arredondados às unidades, é: $]\,67\%\,;\,79\%\,[$

Desta forma, a equipa não pode afirmar que a festa não foi um êxito, porque 75% do total da população terá ficado satisfeita, uma vez que esta percentagem pertence ao intervalo de confiança construído para a proporção de pessoas satisfeitas.

13.2. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o desvio padrão populacional (σ), sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 324$
- A média amostral: $\overline{x} = 56$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$
- $\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 55$, ou, em alternativa, $\overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 57$

Assim, temos:

$$56 + 1{,}960 \times \frac{\sigma}{\sqrt{324}} = 57 \Leftrightarrow 1{,}960 \times \frac{\sigma}{\sqrt{324}} = 57 - 56 \Leftrightarrow \sigma = \frac{1 \times \sqrt{324}}{1{,}960} \Rightarrow \sigma \approx 9{,}18$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2018, Ép. especial

14\. Como o valor médio do intervalo de confiança é a média amostral, temos que o valor médio das receitas de bilheteira por sessão ($\overline{x}$), é:

$$\overline{x} = \frac{4449{,}691 + 5214{,}309}{2} = 4832$$

Considerando o extremo superior do intervalo de confiança, temos que: $\overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} = 5214{,}309$, e como a dimensão da amostra é $n = 50$ e ainda $z = 1{,}960$ (associado a um nível de confiança de 95%), logo o valor do desvio padrão amostral (s), com arredondamento às unidades, é:

$$4832 + 1{,}960 \times \frac{s}{\sqrt{50}} = 5214{,}309 \Leftrightarrow 1{,}960 \times \frac{s}{\sqrt{50}} = 5214{,}309 - 4832 \Leftrightarrow s = \frac{382{,}309 \times \sqrt{50}}{1{,}960} \Rightarrow s \approx 1379$$

Exame – 2018, 2.ª Fase

15.

15.1. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 100$
- A proporção amostral dos clientes que gastaram mais de 1000 euros: $\hat{p} = \frac{58}{100} = 0{,}58$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança, para a proporção dos clientes da agência que gastaram, nesse mês, mais de 1000 euros, $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left] 0{,}58 - 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}58(1-0{,}58)}{100}} \ ; \ 0{,}58 + 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}58(1-0{,}58)}{100}} \right[\approx \left]0{,}48; 0{,}68\right[$$

15.2. De acordo com o Teorema do Limite Central uma amostra de dimensão de dimensão superior a 30, é bem aproximada por uma distribuição normal com valor médio igual ao da população, e desvio padrão igual $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (sendo σ o desvio padrão da população e o n a dimensão da amostra).

Assim temos que:

$$\frac{a}{\sqrt{100}} = 8 \Leftrightarrow a = 8 \times \sqrt{100} \Leftrightarrow a = 80$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2018, 1.ª Fase

16. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 800$
- A proporção amostral das pessoas recetivas à proposta apresentada, arredondada às centésimas: $\hat{p} = \frac{250}{800} = 0{,}3125$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores com cinco casas decimais, temos:

$$\left] 0{,}3125 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}3125(1-0{,}3125)}{800}} \ ; \ 0{,}3125 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}3125(1-0{,}3125)}{800}} \right[\approx \left]0{,}28554; 0{,}33946\right[$$

Logo, a amplitude do intervalo de confiança a 90%, para estimar a proporção de espectadores interessados em adquirir o passe de ingresso no CineJov, em percentagem, arredondados às unidades, é:

$$33{,}946 - 28{,}554 \approx 5\%$$

Exame – 2017, Ép. especial

17. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores dos números de idas aos cinemas, e noutra lista o número de jovens correspondentes, ou seja, para cada valor a soma dos rapazes e das raparigas:

N.º de idas ao cinema	N.º de jovens
0	$32 + 10 = 42$
1	$46 + 17 = 63$
2	$63 + 42 = 105$
3	$106 + 34 = 140$
4	$60 + 25 = 85$
5	$43 + 22 = 65$

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da média de idas ao cinema e o desvio padrão para a amostra dos 500 alunos:

$$\overline{x} \approx 2{,}72 \text{ e } s \approx 1{,}44$$

Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 500$
- A média amostral: $\overline{x} \approx 2{,}72$
- O desvio padrão amostral: $s \approx 1{,}44$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às décimas, temos:

$$\left] 2{,}72 - 1{,}960 \times \frac{1{,}44}{\sqrt{500}}\, ;\, 2{,}72 + 1{,}960 \times \frac{1{,}44}{\sqrt{500}} \right[\approx]2{,}6; 2{,}8[$$

Exame – 2017, 2.ª Fase

18. Calculando a proporção dos utilizadores do número de utilizadores da diversão aos sábados e domingos, nas duas primeiras semanas de agosto, e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$\hat{p} = \frac{328 + 312 + 344 + 288}{184 + 224 + 232 + 240 + 280 + 328 + 312 + 208 + 200 + 256 + 264 + 280 + 344 + 288} = \frac{1272}{3640} \approx 0{,}35$$

Considerando o intervalo de confiança para a proporção $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\, , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, temos que a amplitude é:

$$\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) = \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Assim, igualando a expressão da amplitude ao valor dado, substituindo os valores da proporção ($\hat{p}$) e de n ($n = 3640$), e resolvendo a equação, temos:

$$2z\sqrt{\frac{0{,}35(1-0{,}35)}{3640}} = 0{,}0407301 \Leftrightarrow z \times 0{,}0079057 \approx \frac{0{,}0407301}{2} \Leftrightarrow z \approx \frac{0{,}0407301}{2 \times 0{,}0079057} \Leftrightarrow z \approx 2{,}576$$

Assim, temos que o nível de confiança associado ao valor $z \approx 2{,}576$, ou seja o nível de confiança do intervalo, é de 99%

Exame – 2017, 1.ª Fase

19. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, considerando o valor n para a dimensão da amostra e os valores:

- A proporção amostral dos trabalhadores com, pelo menos, 75 quilogramas: $\hat{p} \approx 0{,}15$
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, temos:

$$\left] 0{,}15 - 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}15(1-0{,}15)}{n}} \; ; \; 0{,}15 + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}15(1-0{,}15)}{n}} \right[$$

E assim, a amplitude do intervalo, em função de n, é:

$$0{,}15 + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}15(1-0{,}15)}{n}} - \left(0{,}15 - 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}15(1-0{,}15)}{n}} \right) = 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}1275}{n}} + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}1275}{n}} =$$

$$= 2 \times 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}1275}{n}} = 5{,}152\sqrt{\frac{0{,}1275}{n}}$$

Assim, a dimensão mínima da amostra, de modo que o intervalo de confiança, tenha uma amplitude inferior a 0,2, é o menor valor de n que satisfaz a condição seguinte:

$$5{,}152\sqrt{\frac{0{,}1275}{n}} < 0{,}2$$

Inserindo na calculadora gráfica a expressão $y = 5{,}152\sqrt{\frac{0{,}1275}{x}}$, e visualizando a tabela de valores da função, reproduzida na figura ao lado, podemos identificar o menor valor de x que verifica a condição anterior, ou seja, que está associado a um valor numérico da função inferior a 0,2, é $x = 85$

X	Y1
80	0,20568
81	0,20440
82	0,20315
83	0,20193
84	0,20072
85	0,19954
86	0,19837

Logo, podemos concluir que a dimensão mínima da amostra, para verificar as condições do enunciado é:

$$n = 85$$

Exame – 2016, Ép. especial

20. Como a dimensão da amostra recolhida pela Eduarda tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:
   - A dimensão da amostra: $n = 300$
   - A média amostral: $\overline{x} = 3$ horas, ou seja $3 \times 60 = 180$ minutos
   - O desvio padrão amostral: $s = 45$ minutos
   - O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

   Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores com três casas decimais, temos:

   $$\left] 180 - 2{,}576 \times \frac{45}{\sqrt{300}} \,;\, 180 + 2{,}576 \times \frac{45}{\sqrt{300}} \right[\approx]173{,}307; 186{,}693[$$

   Assim, como 3 horas e 15 minutos correspondem a $3 \times 60 + 15 = 195$ minutos, podemos verificar que este valor não pertence ao intervalo de confiança para o valor médio do tempo de duração da maratona.

   Assim podemos afirmar com 99% de confiança que o tempo médio da duração foi inferior a 3 horas e 15 minutos, ou seja, que a Eduarda tinha razão para duvidar da afirmação do bloguista.

   Exame – 2016, 2.ª Fase

21. Como a amostra (pessoas presentes na tenda Chill) tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:
   - A dimensão da amostra: $n = 840 + 680 = 1520$
   - A proporção amostral de mulheres, arredondada com cinco casas decimais: $\hat{p} = \frac{250}{800} = 0{,}44737$
   - O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

   Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores com cinco casas decimais, temos:

   $$\left] 0{,}44737 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}44737(1-0{,}44737)}{1520}} \,;\, 0{,}44737 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}44737(1-0{,}44737)}{1520}} \right[\approx]0{,}42639; 0{,}46835[$$

   Logo, o intervalo de confiança a 90%, para a proporção de mulheres presentes, por dia, na tenda Chill, no decurso do festival com os valores dos extremos do intervalo em percentagem, arredondados às unidades, é] 43% ; 47% [

   Exame – 2016, 1.ª Fase

22. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 220$
- A proporção amostral das viagens com um tempo de voo menor ou igual a 45 minutos: $\hat{p} = \frac{11}{220} = 0{,}05$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança, para estimar a proporção de viagens com um tempo de voo menor ou igual a 45 minutos, nas ligações Lisboa-Faro $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \, , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às milésimas, temos:

$$\left] 0{,}05 - 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}05(1-0{,}05)}{220}} \; ; \; 0{,}05 + 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}05(1-0{,}05)}{220}} \right[\approx \,]0{,}021; 0{,}079[$$

Exame – 2015, Ép. especial

23. Como a dimensão da amostra dos contratos da PTM tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 40$
- A média amostral: $\overline{x} = 6$ horas
- O desvio padrão amostral: $s = 0{,}5$ horas
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança para o atraso médio $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} \, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores com três casas decimais, temos:

$$\left] 6 - 1{,}960 \times \frac{0{,}5}{\sqrt{40}} \; ; \; 6 + 1{,}960 \times \frac{0{,}5}{\sqrt{40}} \right[\approx \,]5{,}845; 6{,}155[$$

Assim, a margem de erro do intervalo, ou seja, metade da amplitude do intervalo de confiança, arredondada às milésimas, é:

$$\frac{\overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} - \left(\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} \right)}{2} \approx \frac{6{,}155 - 5{,}845}{2} \approx 0{,}155$$

Exame – 2015, 2.ª Fase

24. Como a dimensão da amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 200$
- A média amostral: $\overline{x} = 30{,}2$ horas
- O desvio padrão amostral: $s = 3{,}4$ horas
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança para o número médio de horas que os encartados dedicam à preparação do exame de condução $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} \, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores dos extremos às décimas, temos:

$$\left] 30{,}2 - 1{,}960 \times \frac{3{,}4}{\sqrt{200}} \; ; \; 30{,}2 + 1{,}960 \times \frac{3{,}4}{\sqrt{200}} \right[\approx \,]29{,}7; 30{,}7[$$

Exame – 2015, 1.ª Fase

25. Pretendemos determinar a dimensão da amostra (admitindo que é superior a 30) para um intervalo de confiança , do qual conhecemos:
    - A proporção de pacotes de açúcar, de uma caixa de 6 quilogramas que têm 8 ou mais gramas (52%): $\hat{p} = 0{,}52$
    - O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$
    - A amplitude do intervalo: 0,20

    Assim, como a amplitude do intervalo de confiança $\left(\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\, , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[\right)$, é:

$$\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Substituindo os valores conhecidos podemos determinar o valor de n:

$$2(1{,}960)\sqrt{\frac{0{,}52(1-0{,}52)}{n}} = 0{,}20 \Leftrightarrow 3{,}92 \times \sqrt{\frac{0{,}2496}{n}} = 0{,}20$$

Inserindo na calculadora gráfica a expressão $y = 3{,}92 \times \sqrt{\frac{0{,}2496}{x}}$, e visualizando a tabela de valores da função, reproduzida na figura ao lado, podemos identificar o valor de x a que corresponde o valor mais próximo de 0,20, ou seja, $x = 96$

X	Y1
92	0,2042
93	0,2031
94	0,2020
95	0,2009
96	0,1998
97	0,1986
98	0,1978

Logo, podemos concluir que a dimensão da amostra, para que a amplitude do intervalo seja aproximadamente 0,20 é:

$$n = 96$$

Exame – 2014, 2.ª Fase

26. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os dados relativos à amostra de 40 dias, ou seja, os valores

0,1,2,2,2,1,3,2,1,1,3,4,1,3,3,0,1,5,4,2,0,4,1,3,4,4,2,4,5,3,3,1,2,4,8,5,0,1,8,4

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista obtemos os valores da média e do desvio padrão da amostra:
- $\overline{x} = 2{,}675$ cafés por dia
- $s \approx 1{,}9267$ cafés por dia

Como a dimensão da amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo ainda:
- A dimensão da amostra: $n = 40$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança o número médio de cafés bebidos, em cada dia,pelo Manuel $\left(\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores dos extremos às milésimas, temos:

$$\left]2{,}675 - 1{,}960 \times \frac{1{,}9267}{\sqrt{40}}\ ;\ 2{,}675 + 1{,}960 \times \frac{1{,}9267}{\sqrt{40}}\right[\approx \left]2{,}078; 3{,}272\right[$$

Exame – 2014, 1.ª Fase

27. Como a dimensão da amostra recolhida pelo diretor tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:
    - A dimensão da amostra: $n = 210$
    - A média amostral: $\overline{x} = 1{,}80$ euros
    - O desvio padrão amostral: $s = 1{,}10$ euros
    - O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

    Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores com três casas decimais, temos:

    $$\left]1{,}8 - 2{,}576 \times \frac{1{,}1}{\sqrt{210}}\ ;\ 1{,}8 + 2{,}576 \times \frac{1{,}1}{\sqrt{210}}\right[\approx]1{,}60; 2{,}00[$$

    Assim, podemos afirmar que não há razão para duvidar do funcionário do bufete, uma vez o valor apontado por ele para o valor médio dos pedidos (1,90 euros) pertence ao intervalo de confiança determinado, ou seja, está compreendido entre 1,60 euros e 2 euros.

    Exame – 2013, Ép. especial

28. Como o valor médio do intervalo de confiança é a média amostral, temos que o valor médio de habitantes por ponto de acesso ($\overline{x}$), é:

    $$\overline{x} = \frac{546 + 554}{2} = 550$$

    Considerando o extremo superior do intervalo de confiança, temos que: $\overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} = 554$, e como a dimensão da amostra é $n = 200$ e ainda $z = 1{,}645$ (associado a um nível de confiança de 90%), logo o valor do desvio padrão amostral (s), com arredondamento às unidades, é:

    $$550 + 1{,}645 \times \frac{s}{\sqrt{200}} = 554 \Leftrightarrow 1{,}645 \times \frac{s}{\sqrt{200}} = 554 - 550 \Leftrightarrow s = \frac{4 \times \sqrt{200}}{1{,}645} \Rightarrow s \approx 34$$

    Exame – 2013, 2.ª Fase

29. Determinando a proporção amostral dos sócios que têm pelos 3 filhos, ou seja, a proporção de sócios que têm 3, 4 ou 5 filhos, temos:

    $$\hat{p} = \frac{38 + 38 + 12}{200} = 0{,}44$$

    Considerando o intervalo de confiança para a proporção $\left(\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\, , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[\right)$, nomeadamente o limite superior (0,530426), temos que:

    $$\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}530426$$

    Assim, substituindo os valores da proporção ($\hat{p}$) e de n ($n = 200$), e resolvendo a equação, temos que:

    $$0{,}44 + z \times \sqrt{\frac{0{,}44(1 - 0{,}44)}{200}} = 0{,}530426 \Leftrightarrow z \times 0{,}035100 \approx 0{,}530426 - 0{,}44 \Leftrightarrow$$

    $$\Leftrightarrow z \approx \frac{0{,}090426}{0{,}035100} \Leftrightarrow z \approx 2{,}576239$$

    Assim, temos que o nível de confiança associado ao valor $z \approx 2{,}576$, ou seja o nível de confiança do intervalo, é de 99%

    Exame – 2013, 1.ª Fase

30. Como o valor médio do intervalo de confiança é a média amostral, temos que o valor médio das alturas dos alunos da amostra ($\overline{x}$), é:

$$\overline{x} = \frac{160 + 178}{2} = 169 \text{ cm}$$

Assim, como a dimensão da amostra recolhida pela direção tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 40$
- A média amostral: $\overline{x} = 169$ cm
- O desvio padrão amostral: $s = 29$ cm
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores dos extremos às unidades, temos:

$$\left]169 - 2{,}576 \times \frac{29}{\sqrt{40}}\ ;\ 169 + 2{,}576 \times \frac{29}{\sqrt{40}}\right[\approx]157; 181[$$

Exame – 2012, 2.ª Fase

31. Pretendemos determinar a dimensão da amostra (admitindo que é superior a 30) para um intervalo de confiança , do qual conhecemos:

- O desvio padrão populacional: $s = 3$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$
- A amplitude do intervalo: 2

Assim, como a amplitude do intervalo de confiança $\left(\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, é:

$$\overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} - \left(\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} - \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} = 2z\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Substituindo os valores conhecidos podemos determinar o valor de n:

$$2(1{,}960)\frac{3}{\sqrt{n}} = 2 \Leftrightarrow \frac{11{,}76}{\sqrt{n}} = 2$$

Inserindo na calculadora gráfica a expressão $y = \dfrac{11{,}76}{\sqrt{x}}$, e visualizando a tabela de valores da função, reproduzida na figura ao lado, podemos identificar o menor valor de x a que corresponde um valor inferior ou igual a 2, ou seja, $x = 35$

X	Y1
30	2,1471
31	2,1122
32	2,0789
33	2,0472
34	2,0168
35	1,9878
36	1,9600

Logo, podemos concluir que a dimensão da amostra, para que a amplitude do intervalo seja, no máximo, 2 é:

$$n = 35$$

Exame – 2012, 1.ª Fase

32. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:
    - A dimensão da amostra: $n = 1000$
    - A proporção amostral de habitações com 2 televisores: $\hat{p} = \frac{450}{1000} = 0{,}45$
    - O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

    Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores às milésimas, temos:

$$\left]0{,}45 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}45(1-0{,}45)}{1000}} \ ; \ 0{,}45 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}45(1-0{,}45)}{1000}}\right[\approx]0{,}424; 0{,}476[$$

    Assim, podemos concluir que, em 2009, o número de habitações em 2009 será superior a 42,4%, com probabilidade de 90%, ou seja, uma proporção maior que 12%, registada em 2001, pelo que não haverá razão para duvidar do aumento da percentagem de habitações portuguesas com 2 televisores, entre 2001 e 2009.

Exame – 2011, 2.ª Fase

33. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:
    - A dimensão da amostra: $n = 500$
    - A proporção amostral dos livros produzidos com defeito: $\hat{p} = \frac{8}{500} = 0{,}016$
    - O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

    Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança de 95% $\left(\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[\right)$, para a proporção de livros produzidos com defeito, diariamente, na gráfica SOS-Livros, e arredondando os valores com três casas decimais, temos:

$$\left]0{,}016 - 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}016(1-0{,}016)}{500}} \ ; \ 0{,}016 + 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}016(1-0{,}016)}{500}}\right[\approx]0{,}005; 0{,}027[$$

Exame – 2011, 1.ª Fase

34. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:
    - A dimensão da amostra: $n = 5000$
    - A proporção amostral de dadores de sangue com o grupo sanguíneo O: $\hat{p} = 0{,}35 + 0{,}06 = 0{,}41$
    - O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

    Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[\right)$, para a proporção de dadores com o grupo sanguíneo O, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left]0{,}41 - 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}41(1-0{,}41)}{5000}} \ ; \ 0{,}41 + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}41(1-0{,}41)}{5000}}\right[\approx]0{,}39; 0{,}43[$$

Exame – 2010, 2.ª Fase

35. Como a dimensão da amostra das faturas recolhida pelo contabilista tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 500$
- A média amostral: $\overline{x} = 830$ €
- O desvio padrão amostral: $s = 220$ €
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left] 830 - 2{,}576 \times \frac{220}{\sqrt{500}} \,;\, 830 + 2{,}576 \times \frac{220}{\sqrt{500}} \right[\approx \left] 804{,}66; 855{,}34 \right[$$

Assim, como existem razões para duvidar da afirmação do gerente, porque com probabilidade de 99%, o valor médio das faturas da empresa é superior a 804 €, ou seja, um valor acima do estimado pelo gerente (800 €).

Exame – 2010, 1.ª Fase

36. Como a amostra das mensagens tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 250$
- A proporção amostral das mensagens com 30 caracteres: $\hat{p} = \frac{125}{250} = 0{,}5$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, para estimar a proporção de mensagens com a extensão de 30 caracteres recebidas no telemóvel pelos alunos da escola da Marta, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left] 0{,}5 - 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}5(1-0{,}5)}{250}} \,;\, 0{,}5 + 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}5(1-0{,}5)}{250}} \right[\approx \left] 0{,}44; 0{,}56 \right[$$

Exame – 2009, 2.ª Fase

37. Como a dimensão da amostra dos agregados familiares de Monte daa Azinha tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 50$
- A média amostral: $\overline{x} = 270$ €
- O desvio padrão amostral: $s = 100$ €
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança para estimar o valor médio das despesas com a alimentação dos agregados familiares $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left] 270 - 1{,}960 \times \frac{100}{\sqrt{50}} \,;\, 270 + 1{,}960 \times \frac{100}{\sqrt{50}} \right[\approx \left] 242{,}28; 297{,}72 \right[$$

Exame – 2009, 1.ª Fase

38. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:
    - A dimensão da amostra: $n = 4738 - 25 = 4713$
    - A proporção amostral dos estudantes do ensino secundário que se identificam como sendo apaixonados pela leitura: $\hat{p} = \dfrac{221}{4713} \approx 0{,}0469$
    - O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

    Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança, para a proporção de estudantes do ensino secundário, do Continente, que se identificam como sendo apaixonados pela leitura $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \,, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às milésimas, temos:

$$\left] 0{,}0469 - 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}0469(1-0{,}0469)}{4713}} \,;\, 0{,}0469 + 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}0469(1-0{,}0469)}{4713}} \right[\approx \left]0{,}041; 0{,}053\right[$$

Exame – 2008, 2.ª Fase

39. Como a amostra dos inquéritos tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:
    - A dimensão da amostra: $n = 300$
    - A proporção amostral dos inquiridos que desejam prosseguir estudos: $\hat{p} = \dfrac{220}{300} \approx 0{,}7333$
    - O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

    Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \,, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, para a proporção de jovens dessa região que desejam prosseguir estudos e arredondando os valores às milésimas, temos:

$$\left] 0{,}7333 - 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}7333(1-0{,}7333)}{300}} \,;\, 0{,}7333 + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}7333(1-0{,}7333)}{300}} \right[\approx \left]0{,}668; 0{,}799\right[$$

Exame – 2008, 1.ª Fase

40. Como o quadrado do desvio padrão é a variância, podemos determinar o valor do desvio padrão amostral, calculando a raiz quadrada da variância e como a dimensão da amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:
    - A dimensão da amostra: $n = 100$
    - A média amostral: $\overline{x} = 5{,}5$ cm
    - O desvio padrão amostral: $s = \sqrt{0{,}043} \approx 0{,}207$ cm
    - O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

    Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança para o comprimento médio dos parafusos produzidos pela máquina $\left(\left] \overline{x} - z\dfrac{s}{\sqrt{n}} \,, \overline{x} + z\dfrac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores dos extremos às centésimas, temos:

$$\left] 5{,}5 - 1{,}960 \times \frac{0{,}207}{\sqrt{100}} \,;\, 5{,}5 + 1{,}960 \times \frac{0{,}207}{\sqrt{100}} \right[\approx \left]5{,}46; 5{,}54\right[$$

Exame – 2007, 2.ª Fase

41.

41.1. A especialista tem razão.

Como o inquérito foi feito aos frequentadores que estavam na sala, deixou de fora todos aqueles que não conseguiram entrar após uma, ou mais tentativas, e desistiram.

Se a amostra incluísse todos os jogadores que tentaram aceder ao site, incluindo os que desistiram após uma ou mais tentativas sem sucesso, a percentagem de entradas na primeira tentativa seria menor, porque estes jogadores - que ficaram excluídos da amostra - teriam todos reportado uma tentativa mal sucedida de entrar à primeira tentativa, o que significaria um valor menor para a probabilidade referida daquele que foi encontrado com a amostra escolhida.

41.2. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 50$
- A proporção amostral dos inquiridos que desejam prosseguir estudos: $\hat{p} = \frac{39}{50} = 0{,}78$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \, , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, para a proporção de pessoas que, efetivamente, conseguiram entrar à primeira tentativa e arredondando os valores às milésimas, temos:

$$\left] 0{,}78 - 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}78(1-0{,}78)}{50}} \; ; \; 0{,}78 + 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}78(1-0{,}78)}{50}} \right[\approx \left] 0{,}665; 0{,}895 \right[$$

Exame – 2007, 1.ª Fase

42.

42.1. Como a diferença entre as estimativas pontuais para a votação dos dois partidos é $41 - 39 = 2\%$, e, por isso inferior à margem de erro (6%), podemos afirmar que, de acordo com a sondagem, os dois partidos estavam em ≪*empate técnico*≫.

42.2. Como a margem de erro da sondagem era de 6% e o nível de confiança de 95%, a sondagem previu que com 95% de probabilidade a votação no partido X estaria compreendida entre $39 - 6 = 33\%$ e $39 + 6 = 45\%$.
Da mesma forma a sondagem previu com a mesma probabilidade que a votação no partido Y estaria compreendida entre $41 - 6 = 35\%$ e $41 + 6 = 47\%$.
Assim, o facto do partido X ter saído vencedor é compatível com a previsão da sondagem, porque a previsão da votação nos dois partidos não implicam que o partido X tivesse obtido um valor inferior à votação do partido Y (por exemplo, de acordo com a sondagem, o partido X poderia ter obtido uma votação até 45% e o partido Y uma votação de 35%).
Desta forma não existem motivos para se concluir que a sondagem estava mal feita.

42.3. A margem de erro do intervalo, ou seja, metade da amplitude do intervalo de confiança, é dado por:

$$\frac{\hat{p}+z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}-\left(\hat{p}-z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)}{2}=\frac{\hat{p}+z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}-\hat{p}+z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}{2}=$$

$$=\frac{2z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}{2}=z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Como a proporção da amostra, ou seja a estimativa pontual, no caso do partido X é $\hat{p}=0{,}39$ e o valor de z para um nível de confiança de 95% é $z=1{,}960$, temos que a margem de erro, em função da dimensão da amostra, será de 0,06 (6%), se:

$$1{,}960\sqrt{\frac{0{,}39(1-0{,}39)}{n}}=0{,}06$$

Inserindo na calculadora gráfica a expressão $y=1{,}960\sqrt{\frac{0{,}39(1-0{,}39)}{x}}$, e visualizando a tabela de valores da função, reproduzida na figura ao lado, podemos identificar o menor valor de x a que corresponde um valor aproximado de 0,03, ou seja, $x=35$

Logo, podemos concluir que a dimensão da amostra, para que a margem de erro seja aproximadamente 0,06 é um valor próximo de:

$$n=254$$

X	Y1
252	0,06022
253	0,06010
254	0,05998
255	0,05987
256	0,05975
257	0,05963
258	0,05952

Ainda recorrendo à tabela, podemos verificar que o valor da margem de erro que correspondente à duplicação da dimensão da amostra, ou seja, $n=2\times 254=508$, será aproximadamente 4%, pelo que não é verdade que a duplicação da dimensão da amostra implique a redução da margem de erro para metade, ou seja, a afirmação é falsa.

Exame – 2006, 2.ª Fase

43.

43.1. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n=15\,800$
- A proporção amostral de cidadãos que se avaliaram no nível 1: $\hat{p}=0{,}10$ (correspondente a 10%)
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z=2{,}576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\hat{p}-z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\,,\hat{p}+z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[\right)$, para a proporção de cidadãos da UE, com 15 ou mais anos, que consideram não saber nada (nível 1) sobre as políticas e instituições da UE, e arredondando os valores às milésimas, temos:

$$\left]0{,}1-2{,}576\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{15\,800}}\,;\,0{,}1+2{,}576\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{15\,800}}\right[\approx\left]0{,}094;0{,}106\right[$$

43.2. A margem de erro do intervalo é metade da amplitude do intervalo de confiança.
Assim, considerando $\hat{p} = 0{,}5$ e $n = 100$ o intervalo, com um nível de confiança de 95% a que corresponde o valor $z = 1{,}960$, o intervalo de confiança para a proporção p, é:

$$\left]0{,}5 - 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}5(1-0{,}5)}{100}}\ ;\ 0{,}5 + 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}5(1-0{,}5)}{100}}\right[=]0{,}402; 0{,}598[$$

Desta forma, para este intervalo, a margem de erro é: $\frac{0{,}598 - 0{,}402}{2} = 0{,}098$

Mantendo os mesmos valores para $\hat{p}$ e z, e variando a dimensão da amostra, obtemos os seguintes intervalos de confiança e as respetivas margens de erro:

Dimensão da amostra n	**Intervalo de confiança** $\hat{p} = 0{,}5$ e $z = 1{,}960$	**Margem de erro**
100	$]0{,}402; 0{,}598[$	0,098
500	$]0{,}456; 0{,}544[$	0,044
1000	$]0{,}469; 0{,}531[$	0,031
10 000	$]0{,}490; 0{,}510[$	0,01

Desta forma, podemos observar que, mantendo a confiança a margem de erro diminui com o aumento da dimensão da amostra.

Exame – 2006, 1.ª Fase