

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA
Teoria de Grafos - Exames 2019 a 2022
11º ano – MACS

1. Com o intuito de avaliar as condições de segurança de alguns estádios de futebol, uma comissão vai proceder à sua inspeção.

Na tabela seguinte, para cada um dos sete estádios passíveis de inspeção, estão indicados o país onde o estádio se localiza e a sua capacidade.

País onde o estádio se localiza	Capacidade do estádio
África do Sul	94 736
Austrália	83 500
Coreia do Norte	114 000
Espanha	99 354
França	81 338
Inglaterra	90 000
México	87 000

A comissão decidiu inspecionar apenas os estádios com capacidade superior a 85 000 espectadores.

De modo a definir um percurso, considerou a duração do voo entre os diferentes países que se apresentam na tabela seguinte.

	Austrália	Coreia do Norte	Espanha	França	México	Inglaterra
África do Sul	14h13	15h57	10h25	11h22	18h38	11h46
Austrália		11h50	21h52	21h35	16h38	21h38
Coreia do Norte			12h12	11h24	15h26	11h16
Espanha				1h32	12h18	1h55
França					11h56	5h24
México						11h36

O percurso será definido atendendo ao método seguinte:

- escolher o menor tempo de voo, qualquer que ele seja;
- escolher, sucessivamente, os menores tempos de voo, garantindo que não são selecionados mais de dois voos que partam do mesmo país ou que cheguem ao mesmo país, e terminar depois de serem selecionados todos os países onde se localizam os estádios a inspecionar.

Apresente o percurso a efetuar pela comissão, com início na África do Sul.

Na sua resposta, apresente:

- um grafo que resulte da aplicação do algoritmo descrito;
- a ordem pela qual a comissão visitará os estádios.

2. No parque de campismo de Dujal, existem cinco ecopontos: A, B, C, D e E.

No final de cada dia, um funcionário recolhe o conteúdo dos ecopontos. De modo a tornar mais eficiente o seu trabalho, o funcionário definiu um itinerário, com início e fim no portão do parque (P), para a recolha do conteúdo dos cinco ecopontos.

O itinerário definido resultou de um grafo construído com o algoritmo seguinte:

- escolher a aresta do grafo com menor peso, qualquer que ela seja;
- escolher, sucessivamente, as arestas com menor peso, garantindo que três arestas do grafo que está a ser definido não se encontram num mesmo vértice e não permitindo que se formem quaisquer percursos fechados que não incluam todos os vértices.

As distâncias mínimas, em metros, entre cada dois ecopontos e entre o portão e cada um dos cinco ecopontos estão registadas na tabela seguinte.

	B	C	D	E	P
A	310	730	365	600	395
B		550	400	790	710
C			800	610	366
D				605	615
E					380

Apresente um possível itinerário, definido pelo funcionário, com início e fim no portão.

Na sua resposta, apresente:

- a ordenação das arestas selecionadas pelo algoritmo descrito;
- um grafo semelhante ao que terá sido construído pelo funcionário.

3. Na agência de viagens Ir&Voltar, realizam-se, ao longo da primeira segunda-feira de cada trimestre, seis reuniões de trabalho, R1, R2, R3, R4, R5 e R6. Cada reunião tem um tema diferente e dura 90 minutos. De modo a planificar o dia das reuniões, é solicitada a cada funcionário a inscrição em uma ou mais reuniões, de acordo com os seus interesses. Para que todos os funcionários possam assistir às reuniões em que se inscrevem, é criado um horário com blocos de reuniões que possam ocorrer em simultâneo.

Na tabela seguinte, apresentam-se as inscrições dos funcionários em cada uma das reuniões a realizar na primeira segunda-feira do terceiro trimestre de 2022.

R1	R2	R3	R4	R5	R6
António	António	Bernardo	Diamantino	Ana	Célia
Bernardo	Diamantino	Fausto	Elsa	Guilherme	Elsa
Célia	Elsa	Guilherme	Fausto	Ilda	Guilherme
Célia	Elsa	Guilherme	Fausto	Ilda	Guilherme
Zulmira	Xavier	Paulo	Paulo	Xavier	Tomás

Com o propósito de determinar o tempo mínimo necessário para que as seis reuniões decorram nas condições definidas, a diretora de planeamento da Ir&Voltar começou por construir um grafo que modelava a situação.

Indique, em horas, o tempo mínimo necessário para que as seis reuniões se realizem nas condições definidas.

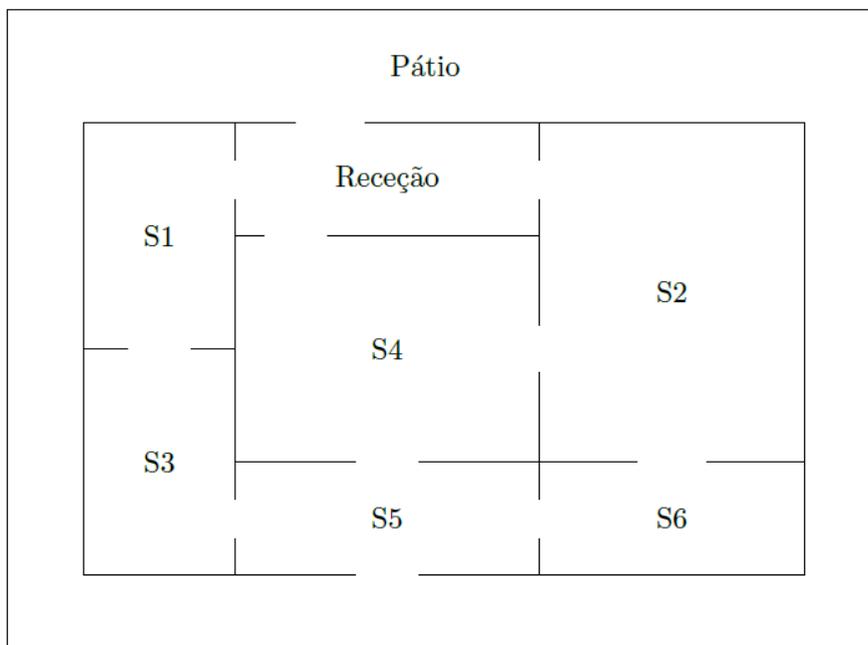
Na sua resposta:

- apresente um grafo que a diretora de planeamento pudesse ter construído;
- identifique a constituição de cada bloco de reuniões.

4. A rádio OnOff é uma rádio local que transmite através da Internet, com recurso a tecnologia de transmissão de áudio e de vídeo em tempo real.

De modo a garantir o isolamento acústico entre os diferentes espaços onde funciona a rádio OnOff, cada uma das portas de ligação irá ser calafetada.

Na figura seguinte, apresenta-se uma planta em que estão representados os diferentes espaços onde funciona a rádio OnOff: um pátio, uma receção e seis salas (S1, S2, S3, S4, S5 e S6).



O responsável pela calafetagem das portas pretende definir um percurso com início e fim no pátio, cruzando todas as portas e entrando em todos os espaços, sem cruzar nenhuma porta mais de uma vez.

Justifique se é possível definir um percurso nas condições indicadas.

Na sua resposta, apresente um grafo que modele a situação descrita.

5. Num *campus* universitário, pretende-se instalar uma iluminação decorativa, constituída por um fio de luzes suspenso entre seis edifícios, E1, E2, E3, E4, E5 e E6.

A tabela seguinte apresenta o comprimento previsto, em metros, do fio de luzes que seria necessário instalar entre cada par de edifícios.

	E1	E2	E3	E4	E5	E6
E1		1550	850	1420	1260	560
E2	1550		1000	320	340	1250
E3	850	1000		810	820	300
E4	1420	320	810		350	1050
E5	1260	340	820	350		1050
E6	560	1250	300	1050	1050	

De modo a minimizar o custo da instalação da iluminação decorativa, construiu-se um grafo que resulta do método que a seguir se descreve.

- Escolhe-se, ao acaso, um dos seis edifícios e, de seguida, de entre os restantes, seleciona-se aquele que, por se encontrar a uma menor distância do primeiro, implique um menor comprimento do fio de luzes previsto.
- Seleciona-se outro edifício que ainda não tenha sido escolhido e que, por se encontrar a uma menor distância dos edifícios anteriormente escolhidos, implique um menor comprimento do fio de luzes previsto.
- Repete-se o ponto anterior até todos os edifícios terem sido selecionados.

Admita que a instalação da iluminação decorativa terá um custo de 3,5 euros por cada metro de fio de luzes previsto.

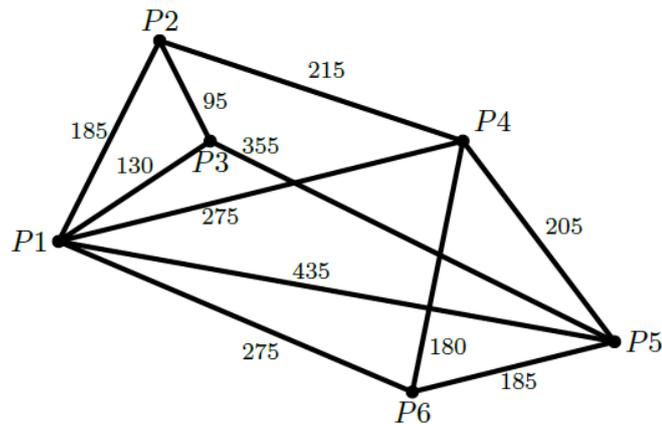
Determine o custo total desta instalação.

Na sua resposta, apresente:

- um grafo ponderado que resulte da aplicação do método descrito;
- o comprimento mínimo previsto, em metros, do fio de luzes a instalar.

6. A ParaPagar pretende renovar a rede de cabo de fibra ótica em algumas das ligações existentes entre seis postos de comunicação, $P1$, $P2$, $P3$, $P4$, $P5$ e $P6$.

Na figura seguinte, apresenta-se um esquema simplificado dessas ligações, no qual se indica, junto de cada segmento de reta, o comprimento, em quilómetros, de cada ligação.



Com vista à minimização de custos, optou-se por começar a renovação no posto de comunicação $P4$ e aplicar o método que a seguir se descreve.

- Seleciona-se o posto seguinte, tendo em conta que:
 - deverá corresponder ao posto mais próximo;
 - se houver dois postos à mesma distância, a seleção é aleatória.
- Proceda-se como foi indicado no ponto anterior, partindo do último posto selecionado, não se repetindo nenhum e terminando depois de todos os postos serem incluídos.

Determine a quantidade mínima, em quilómetros, de cabo de fibra ótica a renovar.

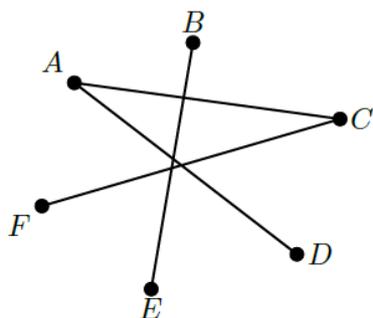
Na sua resposta, apresente um grafo que resulte do método descrito e que permita identificar as ligações a renovar.

7. Em cada uma das opções, A, B, C e D, apresenta-se um esquema, sob a forma de grafo, que representa um jardim. Em cada grafo, os vértices representam canteiros, e as arestas representam os caminhos existentes entre eles.

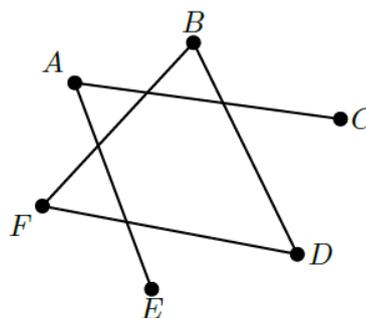
No jardim onde o Rui trabalha, foi construído um novo caminho entre dois canteiros que ainda não estavam ligados. Graças a este novo caminho, é agora possível iniciar e terminar um percurso num mesmo canteiro, percorrendo todos os caminhos, incluindo o novo, sem repetir nenhum deles.

Qual das opções representa o jardim onde trabalha o Rui, antes da construção do novo caminho?

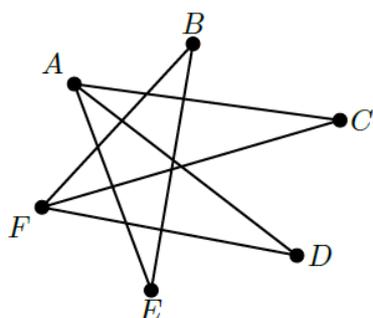
(A)



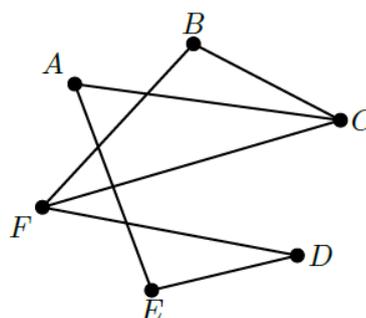
(B)



(C)



(D)



8. No parque municipal de Avelares, vão ser instalados oito bebedouros em locais previamente selecionados, designados por A, B, C, D, E, F, G e H, que serão interligados através de uma canalização.

Na tabela seguinte, apresenta-se o comprimento, em metros, das ligações que é possível estabelecer entre os diversos locais.

	B	C	D	E	F	G	H
A	500	620	—	840	—	502	—
B		505	—	446	—	800	—
C			1140	850	—	754	—
D				—	976	721	952
E					700	—	—
F						412	1310
G							1360

De modo a minimizar o custo da canalização, construiu-se um grafo, aplicando o método que a seguir se descreve.

- Seleciona-se a ligação de menor comprimento (se houver mais do que uma, escolhe-se ao acaso uma delas).
- Em seguida, seleciona-se, de entre as ligações restantes, a de menor comprimento, desde que esta não leve à formação de um ciclo.
- Termina-se quando todos os locais onde serão instalados bebedouros estiverem ligados.

Determine o comprimento total da canalização.

Na sua resposta, apresente o grafo que resulta da aplicação do método descrito.

9. A Elsa, que em 2018 fez um *Interrail*, relatou à Maria a sua viagem, explicando-lhe também algumas dificuldades na sua organização.

Uma das dificuldades foi decidir que países visitariam e, em cada país, a quantas cidades iriam.

O grupo de amigos da Elsa acabou por decidir que visitariam a Alemanha, a Áustria, a França, a Itália e a Suíça e que, em cada país, iriam apenas a uma cidade.

Na tabela seguinte, apresentam-se as distâncias, em quilómetros, entre as cidades que o grupo considerou mais atrativas e os países a que pertencem.

		Cidades	Viena	Salzburgo	Paris	Milão	Veneza	Zurique
Países	Alemanha	Munique	430	140	800	500	520	340
	Áustria	Viena		290	1230	860	600	740
		Salzburgo			980	530	460	450
	França	Paris				850	1100	650
	Itália	Milão					270	280
		Veneza						540
Suíça	Zurique							

Os amigos acordaram que o percurso a realizar seria definido partindo de um grafo no qual duas cidades são interligadas se não pertencerem ao mesmo país, selecionando-se apenas uma cidade de cada país e atendendo ao seguinte algoritmo:

- escolher a aresta do grafo com menor peso, qualquer que ela seja;
- escolher, sucessivamente, as arestas de menor peso, garantindo que três arestas do percurso que está a ser definido não se encontram num mesmo vértice e não permitindo que se fechem percursos sem que todos os vértices sejam incluídos.

Apresente um percurso possível, definido pelo grupo de amigos da Elsa, com início e fim na cidade de Paris.

Na sua resposta, apresente:

- a ordenação das arestas selecionadas pelo algoritmo descrito;
- um grafo que resulte da aplicação do algoritmo;
- um percurso que o grupo de amigos da Elsa poderá ter definido.

10. Num determinado verão, decorreram os festivais F1, F2, F3, F4, F5 e F6. Estes festivais realizaram-se ao fim de semana e tiveram, cada um, a duração de dois dias (sábado e domingo).

Na tabela seguinte, apresentam-se os festivais a que quatro jovens assistiram. Cada jovem assistiu, sempre, a ambos os dias de cada um dos festivais.

Jovens	Festivais
Elsa	F1, F2, F3
Filipe	F1, F2, F4
Gaspar	F1, F3, F5
Manuel	F4, F5, F6

Indique o número mínimo de fins de semana em que os festivais podem ter decorrido.

Na sua resposta:

- apresente um grafo que modele a situação descrita;
- identifique os festivais que decorreram em simultâneo.

Exame – 2020, 1.^a Fase

11. Numa das alas do Centro Comercial Futuro existem 8 pontos de vigilância, designados A, B, C, D, E, F, G e H, nos quais estão instaladas câmaras de vigilância.

Pretende-se encontrar a solução mais económica para a substituição das ligações internas entre as câmaras.

A tabela seguinte apresenta o comprimento, em metros, das ligações existentes entre os pontos de vigilância.

	B	C	D	E	F	G	H
A	23		20				
B		25		19	14		
C					15		45
D				22		18	
E					16		30
G							50

De modo a minimizar os custos da intervenção, construiu-se um grafo, adotando-se o procedimento seguinte:

- seleciona-se a ligação de menor comprimento (se houver mais do que uma, escolhe-se ao acaso uma delas);
- em seguida, seleciona-se, de entre as ligações restantes, a de menor comprimento, desde que esta não leve à formação de um ciclo;
- termina-se quando todos os pontos de vigilância pertencerem a alguma das ligações selecionadas no grafo.

Admita que a substituição de cada metro de ligação interna tem o custo de 12 euros.

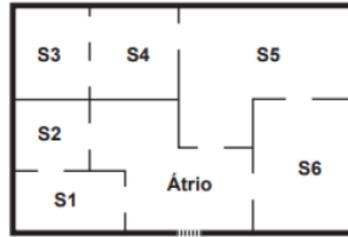
Determine o custo total da substituição.

Na sua resposta, apresente o grafo que resulta da aplicação do método descrito.

Exame – 2019, Ép. especial

12. O Clube de Colecionadores possui um espaço próprio para exposições.

Na figura seguinte, apresenta-se uma planta simplificada do referido espaço, que é composto por um Átrio e seis salas: S1, S2, S3, S4, S5 e S6.



O presidente do Clube pretendia inicialmente definir um percurso, com início e fim no Átrio, cruzando todas as portas e entrando em todas as salas, sem cruzar nenhuma porta mais de uma vez.

Tendo verificado que o seu objetivo não podia ser posto em prática, e como o espaço será alvo de remodelação, o presidente decidiu que uma das intervenções a levar a cabo seria eliminar uma das portas existentes ou acrescentar uma nova porta para viabilizar o seu objetivo.

Indique, justificando, qual terá sido a intervenção decidida pelo presidente (se eliminou uma porta ou acrescentou uma porta, e entre que salas).

Na sua resposta, apresente um grafo que modele a situação descrita.

Exame – 2019, 2.^a Fase

13. Uma empresa foi convidada a participar num certame. Para expor os seus produtos, terá de montar uma banca, sendo necessário levar a cabo diversas tarefas. O diretor de operações da empresa fez a lista dessas tarefas, desde que se inicia a montagem da banca até tudo estar concluído.

A tabela seguinte apresenta o tempo necessário para executar cada tarefa (Duração), em minutos, e, quando é o caso, quais as tarefas que devem ser previamente concluídas (Tarefas precedentes).

Tarefa	Duração (minutos)	Tarefas precedentes
T1	3	—
T2	10	T1
T3	15	T1
T4	12	T2 T3
T5	15	T2 T3
T6	5	T4 T5

Determine o tempo mínimo necessário, em minutos, para executar todas as tarefas que compõem a montagem da banca.

Na sua resposta, apresente um grafo que modele a situação descrita.

Exame – 2019, 1.^a Fase