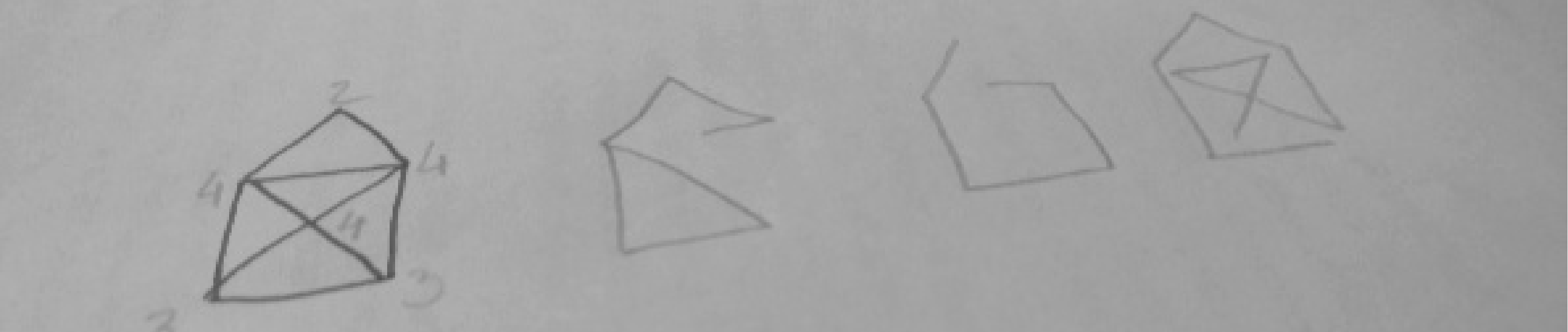


M.A.C.S. (11.º ano)

Teoria de grafos

Exercícios de Provas Nacionais - Propostas de resolução

1. Iniciar e terminar um percurso numa mesma levada, percorrendo todos os troços pedonais, incluindo o novo, sem repetir nenhum deles, corresponde à definição de um circuito de Euler. Tal só será possível se todos os vértices tiverem grau par.

   Assim, analisando as tabelas apresentas e considerando a construção de um novo troço entre as levadas L3 e L7, temos que:

   - Na tabela das opção A e B, existem vértices com grau ímpar que não são alterados com a inclusão da aresta entre os vértices L3 e L7 (o vértice L5 na opção A e os vértices L1 e L5 na opção B), pelo que não é possível definir um circuito de Euler com a inclusão da nova aresta.
   - Na tabela da opção C, todos os vértices têm grau par pelo que com a inclusão da aresta entre os vértices L3 e L7, estes vértices passariam a ter um grau ímpar e não seria possível definir um circuito de Euler.
   - Na tabela da opção D, apenas os vértices L3 e L7 têm grau ímpar pelo que com a inclusão da aresta entre estes vértices, todos passam a ter um grau par o que torna possível definir um circuito de Euler.

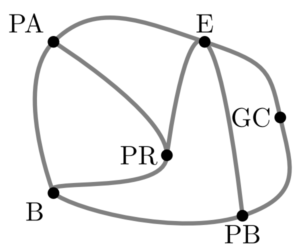
   Resposta: **Opção B**

Exame – 2024, Ép. especial

2. Como a Dora pretende visitar miradouros de altitude superior a 350 metros apenas se consideram os miradouros B, CG, E, PA, PB e PR.

   Assim, o percurso definido pela Dora, foi:

   I - PR (maior altitude). (Alternativas: PA(1818), E(1007) e B(860)).
   II - PA (Alternativas: PR(já visitado), E(1007) e B(860)).
   III - E (Alternativas: PR, PA (já visitados), CG(580) e PB(355)).
   IV - CG (Alternativas: E (já visitado), PB(355)).
   V - PB (Alternativas: E, CG (já visitados)). B(860)).
   VI - B (Alternativas: PR, PA, PB (já visitados)).



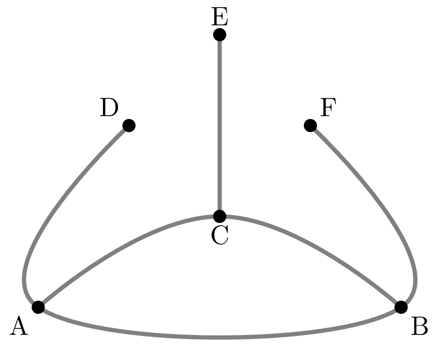
   Desta forma, o percurso definido pela Dora, que lhe permite visitar seis miradouros, é:

$$PR \rightarrow PA \rightarrow E \rightarrow CG \rightarrow PB \rightarrow B$$

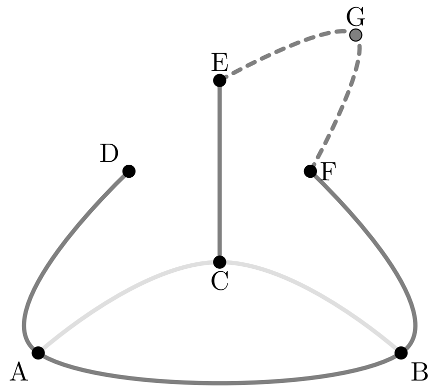
Exame – 2024, Ép. especial

3. De acordo com a observação das cartas da figura, podemos traçar o grafo seguinte:

- Carta A - Conecta com as restantes com número 1 (B e C) e as restantes com círculo (D)
- Carta B - Conecta com as restantes com número 1 (A e C) e as restantes com quadrado (F)
- Carta C - Conecta com as restantes com número 1 (A e B) e as restantes com triângulo (E)
- Carta D - Conecta com as restantes com um círculo (A). Não existem outras com o número 2.
- Carta E - Conecta com as restantes com um triângulo (C). Não existem outras com o número 3.
- Carta F - Conecta com as restantes com um quadrado (B). Não existem outras com o número 4.



Acrescentando ao grafo anterior um vértice que represente a carta G, que ficará conectado ao vértice F, porque sabemos que tem um quadrado, e para averiguar a possibilidade de ter o número 3, deverá ser conectado também com o vértice E,obtemos o grafo da figura ao lado.



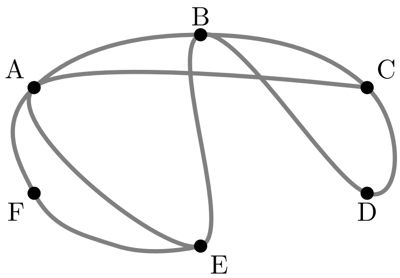
Assim, ignorando as arestas AC e BC, podemos observar que é possível que o algarismo presente na carta G seja o 3, e que, neste caso, um possível empilhamento das sete cartas, de acordo com as condições definidas, é:

$$D \to A \to B \to F \to G \to E \to C$$

(O percurso $D \to A \to B \to C \to E \to G \to F$, também satisfaz as condições do enunciado).

Exame – 2024, 2.ª Fase

4. De acordo as indicações, podemos construir um grafo como o que se representa a seguir, em que cada vértice representa uma letra e cada aresta uma peça:

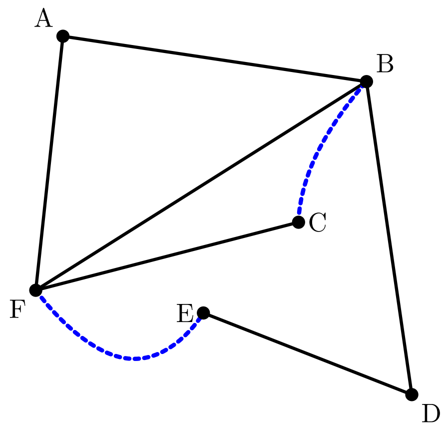


Pela análise do grafo podemos observar que existem dois vértices de grau ímpar, nomeadamente de grau 3 (os vértices C e E). Assim, o jogo só pode ser completado se a sequência começar com a letra C e terminar com a letra E (ou vice-versa), o que não corresponde ao pretendido porque a sequência deveria ser possível independentemente da primeira peça a ser jogada.

Desta forma, se o grafo tiver uma aresta adicional a ligar os vértices C e E, todos os vértices teriam grau par, permitindo criar um circuito de Euler, ou seja percorrer todas as arestas, apenas uma vez, e começando em qualquer vértice, pelo que a peça em falta deve conter as letras C e E.

Exame – 2024, 1.ª Fase

5. A partir do grafo apresentado, analisando o grau de cada de cada vértice, temos:



- A - Grau 2
- B - Grau 3
- C - Grau 1
- D - Grau 2
- E - Grau 1
- F - Grau 3

Iniciar e terminar o circuito de manutenção numa mesma estação, percorrendo todos os troços, incluindo os novos, sem repetir nenhum deles, corresponde à definição de um circuito de Euler. Tal só será possível se todos os vértices tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem quatro vértices com grau ímpar: C e E (grau 1) e F e B (grau 3).

Assim, o número mínimo de troços pedonais a construir é 2, correspondendo a novas arestas no grafo que liguem os vértices de grau ímpar, para que passem a ter grau par e assim para que seja possível definir circuitos de Euler.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2023, 2.ª Fase

6. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas:

   I - Aresta M - S, peso 2h30 (menor peso)

   II - Aresta R - S, peso 2h40

   III - Aresta A - M, peso 2h50

   IV - Aresta A - V, peso 4h40

   (não se considera a aresta M - V, porque três arestas se iriam encontrar no vértice M)

   (não se considera a aresta S - V, porque três arestas se iriam encontrar no vértice S)

   (não se considera a aresta R - V, porque formaria um percurso fechado que não incluia todos os vértices)

   (não se considera a aresta A - S, porque três arestas se iriam encontrar no vértice A)

   (não se considera a aresta M - R, porque três arestas se iriam encontrar no vértice M)

   V - Aresta I - V - peso 14h50

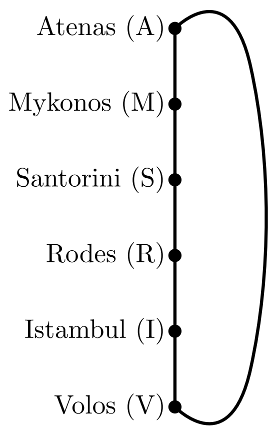
   VI - Aresta I - R - peso 15h30

Desta forma, apresenta-se a seguir um grafo semelhante ao que poderá terá sido construído pela Luísa e um percurso que a Luísa poderá ter definido, com início e fim na cidade de Atenas:

Atenas $\rightarrow$ Mykonos $\rightarrow$ Santorini $\rightarrow$ Rodes $\rightarrow$ Istambul $\rightarrow$ Volos $\rightarrow$ Atenas

(o mesmo percurso em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).

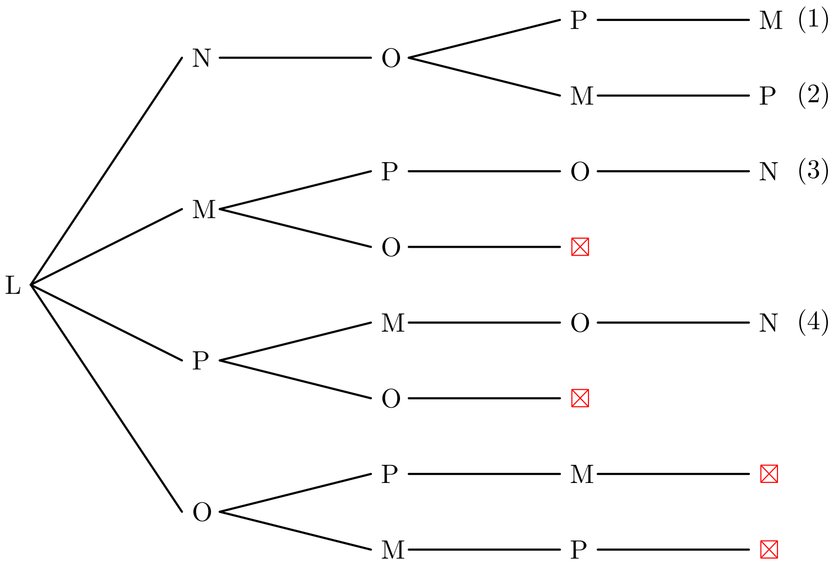
Desta forma é possível verificar que a Luísa não pode visitar os locais pela mesma ordem seguida pelos pais.



Exame – 2023, 2.ª Fase

7.

7.1. Analisando o grafo da figura, e determinando todas as visitas que se podem definir nas condições descritas, através de um diagrama em árvore, temos:



Assim, vem que:

O presidente da junta de freguesia verificou que existem **4** percursos possíveis, mas, se quiser visitar o expositor N depois de visitar o expositor O, apenas existe(m) **2** percurso(s) possível(is).
Verificou também que não poderia visitar o expositor M imediatamente a seguir ao expositor **N** e que, imediatamente a seguir a visitar o expositor N, poderia visitar o expositor **O** .

Logo, as correspondências corretas são:

- **I** → **c)**
- **II** → **b)**
- **III** → **a)**
- **IV** → **b)**

7.2. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, iniciando a verificação no restaurante, $R1$, obtemos a seguinte ordenação dos troços e um grafo ponderado que representa o percurso escolhido pela aplicação do método descrito:

I - $R1$ - P (214 m)

II - P - O (200 m)

III - O - M (255 m)

(não se seleciona o troço O-P porque P já foi visitado)

IV - M - L (284 m)

(O, P e $R1$ já foram visitados)

IV - L - N (401 m)

(todos os restantes já foram visitados.)

Desta forma, o percurso que respeita as condições definidas, é:

$$R1 \rightarrow P \rightarrow O \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow N$$

E a distância, em metros, percorrida pelo Rui, é:

$$214 + 200 + 255 + 284 + 401 = 1354$$

Exame – 2023, 1.ª Fase

8. De acordo com as capacidades indicadas na tabela, e como a comissão decidiu inspecionar apenas os estádios com capacidade superior a 85 000 espectadores, podemos observar que não serão inspecionados os estádios da Austrália e da França.

Assim, não considerando linhas e colunas relativas à Ausrália e França na tabela relativa às durações dos voos e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo da figura,onde as arestas representam os voos e os vértices a localização dos estádios:

I - Aresta Espanha-Inglaterra - duração 1h55 (menor tempo de voo)

II - Aresta Espanha-África do Sul - duração 10h25

III - Aresta Inglaterra- Coreia do Norte - duração 11h16

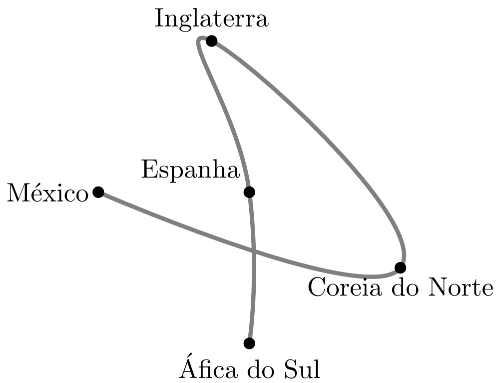
(não se considera a aresta México-Inglaterra, porque já selecionamos uma aresta com Inglaterra)

(não se considera a aresta África do Sul-Inglaterra, porque já selecionamos arestas com estes países)

(não se considera a aresta África do Coreia do Norte-Espanha, porque já selecionamos arestas com estes países)

(não se considera a aresta África do Coreia do Espanha-México, porque já selecionamos duas arestas com Espanha)

IV - Aresta Coreia do Norte-México - duração 15h25



Desta forma, o percurso a efetuar pela comissão, com início na África do Sul, é:

$$\text{África do Sul} \rightarrow \text{Espanha} \rightarrow \text{Inglaterra} \rightarrow \text{Coreia do Norte} \rightarrow \text{México}$$

Exame – 2022, Ép. especial

9. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo da figura:

   I - Aresta A-B - distância 310 (menor comprimento)

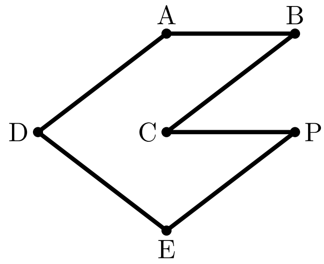
   II - Aresta A-D - distância 365

   III - Aresta C-P - distância 366
   (não se considera a aresta A-P, porque se encontrariam três arestas no vértice A)

   IV - Aresta E-P - distância 380
   (não se considera a aresta B-D, porque se formaria um percurso fechado sem todos os vértices B-D-A-B)

   V - Aresta B-C - distância 550
   (não se considera a aresta A-E, porque se encontrariam três arestas no vértice A)

   VI - Aresta D-E - distância 605



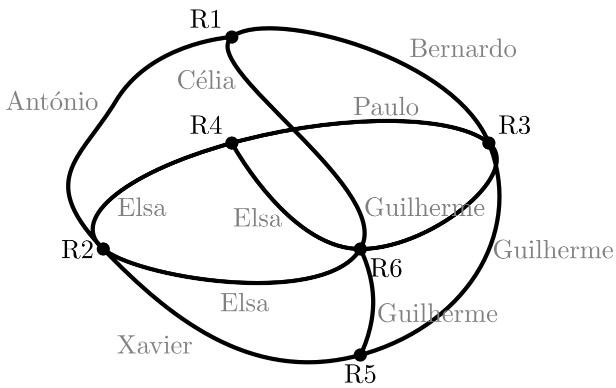
Desta forma, um itinerário, com início e fim no portão do parque, que passe pelos cinco ecopontos, é, por exemplo:

P - E - D - A - B - C - P

(o mesmo itinerário em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).

Exame – 2022, 2.ª Fase

10. De acordo com as informações da tabela podemos desenhar o grafo da figura seguinte, em que cada vértice representa uma reunião e cada aresta representa a impossibilidade de decorrer em simultâneo pela presença de pelo menos uma pessoa em ambas as reuniões.



Assim, podemos verificar que a reunião R6 não pode ocorrer sem simultâneo com qualquer outra, as reuniões R1, R4 e R5 podem decorrer em paralelo, porque não existem arestas entre os respetivos vértices, e, pela mesma razão, as restantes (R2 e R3) também podem ocorrer ao mesmo tempo.

Assim podemos definir os seguintes blocos de reuniões:

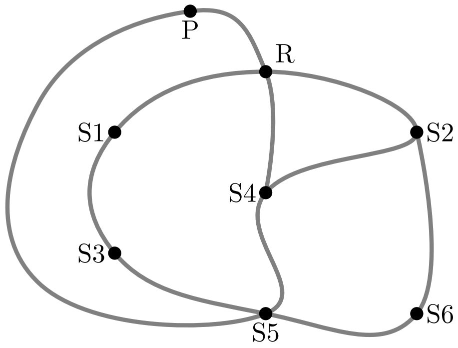
- R6
- R1, R4 e R5
- R2 e R3

Assim, como cada reunião tem a duração de 90 minutos, e são necessários três conjuntos de reuniões, o tempo mínimo necessário para que as seis reuniões se realizem nas condições definidas é de $3 \times 90 = 270$ minutos, a que correspondem $\frac{270}{60} = 4{,}5$ horas.

Exame – 2022, 1.ª Fase

11. De acordo com a planta da rádio, considerando o pátio (P), a receção (R) e as seis salas como vértices e as portas como arestas, obtemos o grafo da figura seguinte, e o grau de cada de cada vértice:

- Pátio - Grau 2
- Receção - Grau 4
- Sala 1 - Grau 2
- Sala 2 - Grau 3
- Sala 3 - Grau 2
- Sala 4 - Grau 3
- Sala 5 - Grau 4
- Sala 6 - Grau 2



Para definir um percurso com início e fim no pátio, cruzando todas as portas e entrando em todos os espaços, sem cruzar nenhuma porta mais de uma vez, seria necessário definir um circuito de Euler, o que apenas seria possível se todos os vértices tivessem grau par.

Assim, como existem vértices de grau ímpar (os vértices correspondentes às salas 2 e 4) não é possível definir um percurso nas condições indicadas.

Exame – 2021, Ép. especial

12. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, escolhendo inicialmente o edifício E1 e aplicando o algoritmo indicado, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo ponderado da figura:

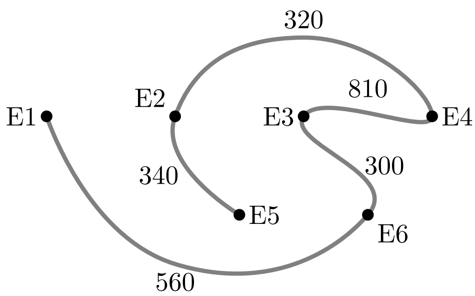
I - Aresta E1-E6 - comprimento 560

II - Aresta E6-E3 - comprimento 300

III - Aresta E3-E4 - comprimento 810
(não se considera a aresta E3-E6, porque o edifício E6 já foi escolhido)

IV - Aresta E4-E2 - comprimento 320

IV - Aresta E2-E5 - comprimento 340
(não se considera a aresta E2-E4, porque o edifício E4 já foi escolhido)



Assim, o comprimento mínimo previsto, em metros, do fio de luzes a instalar, é:

$$560 + 300 + 810 + 320 + 340 = 2330 \text{ m}$$

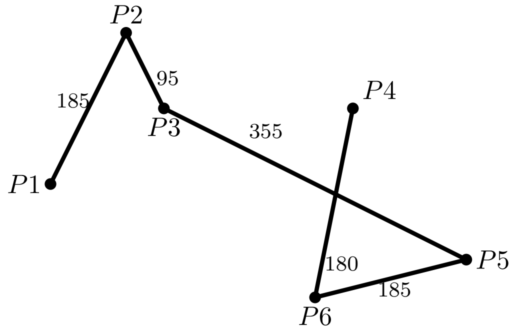
Como a instalação da iluminação decorativa terá um custo de 3,5 euros por cada metro, o custo total desta instalação é:

$$2330 \times 3{,}5 = 8155 \text{ euros}$$

Exame – 2021, 1.ª Fase

13. Pela observação do grafo e de acordo com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação dos postos e grafo da figura:

    I - Posto $P4$ - Posto inicial
    II - Posto $P6$ - distância 180
    III - Posto $P5$ - distância 185
    IV - Posto $P3$ - distância 355
    IV - Posto $P2$ - distância 95
    V - Posto $P1$ - distância 185



Desta forma, a quantidade mínima, em quilómetros, de cabo de fibra ótica a renovar, é:

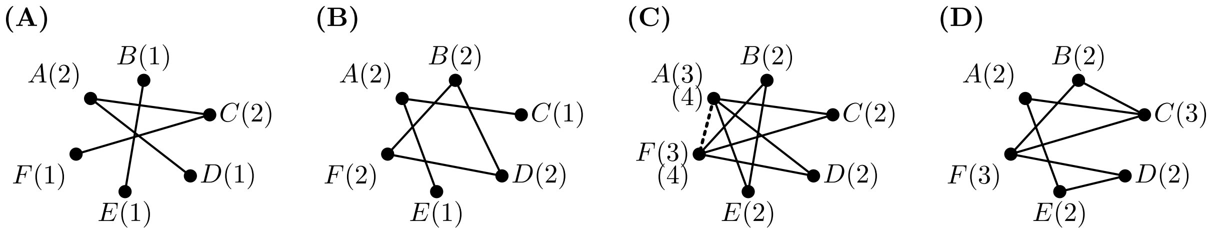
$$180 + 185 + 355 + 95 + 185 = 1000 \text{ km}$$

Exame – 2021, 1.ª Fase

14. Para que seja possível iniciar e terminar um percurso num mesmo canteiro, percorrendo todos os caminhos, incluindo o novo, sem repetir nenhum deles, tem que ser possível definir um circuto euleriano, o que só acontece se todos os vértices tiverem grau par.

    Assim, o único grafo que permite criar um circuito acrescentando uma única aresta, ligando vértices ainda não ligados, é o grafo da opção (C), acrescentando a aresta que liga os vértice A e F, tornado todos os vértices de grau par.

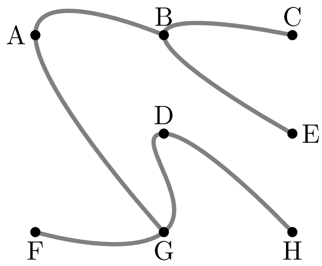
    Na opção (A) acrescentar uma única aresta não permite que todos os vértices tenham grau par, na opção (B) acrescentar uma aresta a ligar os vértices de grau ímpar cria dois circuitos independentes e na opção (D) os vértices de grau ímpar já estão ligados por uma aresta.



Exame – 2020, Ép. especial

15. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo da figura:

I - Aresta F-G - comprimento 412 (menor comprimento)
II - Aresta B-E - comprimento 446
III - Aresta A-B - comprimento 500
IV - Aresta A-G - comprimento 502
IV - Aresta B-C - comprimento 505
V - Aresta D-G - comprimento 721
(não se consideram as aresta A-C e E-F, porque formam ciclos)
VI - Aresta D-H - comprimento 952
(não se consideram as arestas C-G, B-G, A-E e C-E porque formam ciclos)



Desta forma, a soma dos comprimentos da canalização é:

$$412 + 446 + 500 + 502 + 505 + 721 + 952 = 4038 \text{ m}$$

Exame – 2020, Ép. especial

16. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas:

    I - Aresta Munique - Salzburgo, peso 140 (menor peso)
    (não se considera a aresta Milão - Veneza, porque pertencem ao mesmo país)

    II - Aresta Milão - Zurique, peso 280

    III - Aresta Munique - Zurique, peso 340
    (não se considera a aresta Munique - Viena, porque iria interligar Salzburgo e Viena, pertencentes ao mesmo país)
    (não se considera a aresta Salzburgo - Zurique, porque três arestas se iriam ligar no vértice Zurique)
    (não se considera a aresta Salzburgo - Veneza, porque iria interligar Veneza e Milão, pertencentes ao mesmo país)
    (não se considera a aresta Munique - Milão, porque três arestas se iriam ligar no vértice Milão)
    (não se considera a aresta Munique - Veneza, porque três arestas se iriam ligar no vértice Munique)
    (não se considera a aresta Salzburgo - Milão, porque iria fechar um percurso sem incluir o vértice Paris)
    (não se considera a aresta Veneza - Zurique, porque três arestas se iriam ligar no vértice Zurique)
    (não se considera a aresta Viena - Veneza, porque já foram selecionados vértices destes dois países)
    (não se considera a aresta Paris - Zurique, porque três arestas se iriam ligar no vértice Zurique)
    (não se considera a aresta Viena - Zurique, porque três arestas se iriam ligar no vértice Zurique)
    (não se considera a aresta Munique - Paris, porque três arestas se iriam ligar no vértice Munique)

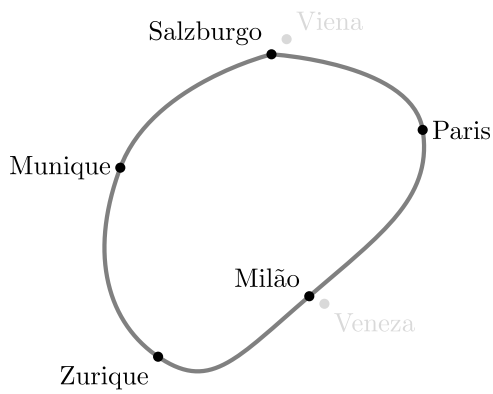
    V - Aresta Paris - Milão - peso 850
    (não se considera a aresta Viena - Milão, porque três arestas se iriam ligar no vértice Milão)

    VI - Aresta Salzburgo - Paris, peso 980

    Desta forma, um percurso que Mariana poderá ter definido, com início e fim na cidade de Paris, é:

    Paris $\rightarrow$ Milão $\rightarrow$ Zurique $\rightarrow$ Munique $\rightarrow$ Salzburgo $\rightarrow$ Paris

    (o mesmo percurso em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).



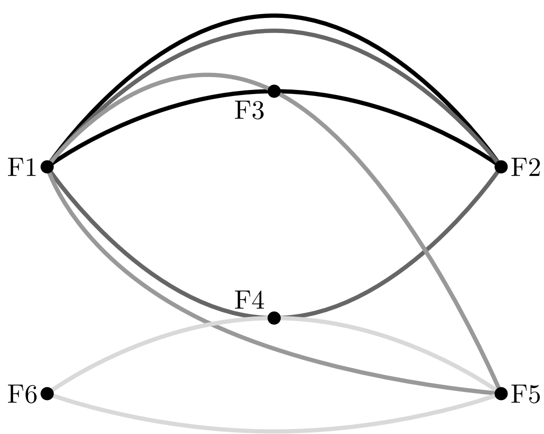
Exame – 2020, 2.ª Fase

17. De acordo com as informações da tabela podemos desenhar o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa um festival e cada aresta representa a presença de um dos jovens nos dois festivais relacionados .

    Assim podemos verificar que a inexistência de arestas entre:

    - os vértices F1 e F6
    - os vértices F3 e F4
    - os vértices F2 e F5

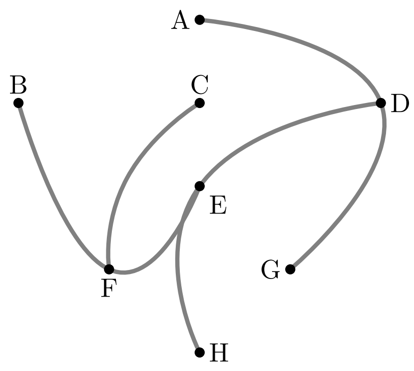
    evidencia que estes 3 pares de festivais podem ter decorrido em simultâneo, pelo que o número mínimo de fins de semana em que os festivais podem ter decorrido é 3.



Exame – 2020, 1.ª Fase

18. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo da figura:

   I - Aresta B-F - comprimento 14 (menor comprimento)
   II - Aresta C-F - comprimento 15
   III - Aresta E-F - comprimento 16
   IV - Aresta D-G - comprimento 18
   (não se considera a aresta B-E, porque forma um ciclo)
   V - Aresta A-D - comprimento 20
   VI - Aresta D-E - comprimento 22
   (não se considera a aresta A-B, porque forma um ciclo)(não se considera a aresta B-C, porque forma um ciclo)
   VII - Aresta E-H - comprimento 30



Desta forma, a soma dos comprimentos das ligações é:

$$14 + 15 + 16 + 18 + 20 + 22 + 30 = 135 \text{ m}$$

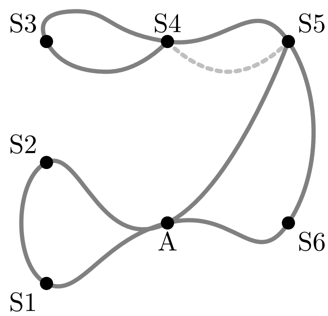
Como a substituição de cada metro de ligação interna tem o custo de 12 euros, o custo total da substituição é:

$$135 \times 12 = 1620 \text{ euros}$$

Exame – 2019, Ép. especial

19. De acordo com a planta do espaço, considerando o átrio (A) e as seis salas como vértices e as portas como arestas, obtemos o grafo da figura seguinte (ignorando a aresta a tracejado), e o grau de cada de cada vértice:

- Átrio - Grau 4
- Sala 1 - Grau 2
- Sala 2 - Grau 2
- Sala 3 - Grau 2
- Sala 4 - Grau 3
- Sala 5 - Grau 3
- Sala 6 - Grau 2

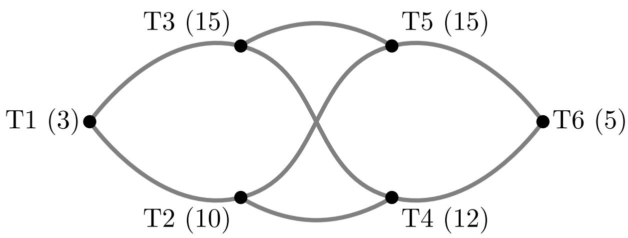


O presidente do Clube pretendia definir um percurso, com início e fim no Átrio, cruzando todas as portas e entrando em todas as salas, sem cruzar nenhuma porta mais de uma vez, o que corresponde à definição de um circuito de Euler. Tal só será possível se todos os vértices tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem dois vértices com grau ímpar: S4 (grau 3) e S5 (grau 3).

Assim, para tornar viável a pretensão inicial do presidente, a remodelação deverá acrescentar uma porta entre as sala 4 e 5 - assinalada no grafo pela aresta a tracejado. Desta forma os vértices S4 e S5 passariam a ter grau 4, o que significaria que todos os vértices teriam grau par e seria possível definir circuitos de Euler.

Exame – 2019, 2.ª Fase

20. De acordo com as informações da tabela podemos desenhar o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa uma tarefa e cada aresta representa uma relação de precedência. A ponderação de cada vértice representa o tempo necessário para a execução da tarefa.



Assim podemos verificar que podem ocorrem quatro sequências de tarefas:

- T1 → T2 → T4 → T6, com um tempo associado de $3 + 10 + 12 + 5 = 30$ min
- T1 → T2 → T5 → T6, com um tempo associado de $3 + 10 + 15 + 5 = 33$ min
- T1 → T3 → T4 → T6, com um tempo associado de $3 + 15 + 12 + 5 = 35$ min
- T1 → T3 → T5 → T6, com um tempo associado de $3 + 15 + 15 + 5 = 38$ min

Como, em cada uma das sequências de tarefas as tarefas não referidas podem decorrer simultaneamente, o tempo mínimo, em minutos, necessário para realizar todas as tarefas que compõem a montagem da banca é 38 minutos, correspondente ao tempo necessário para a concretização da sequência com maior duração.

Exame – 2019, 1.ª Fase

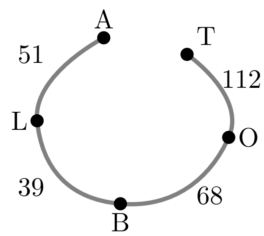
21. De acordo com a tabela, considerando as arestas por ordem crescente de ponderação, e desenhando um grafo que resulta da aplicação do algoritmo, temos:

I- Aresta BL - ponderação 39

II- Aresta LA - ponderação 51
(não se considera a aresta BA, porque forma um circuito)

III- Aresta BO - ponderação 68
(não se considera a aresta LO, porque forma um circuito)

IV- Aresta OT - ponderação 112



Observando o grafo, temos que:

- Número de vértices: 5
- Número de arestas: 4=5-1
- Ponderação total: $39 + 51 + 68 + 112 = 270$

Desta forma, nas condições do enunciado, o projeto de iluminação deve contemplar na sua fase inicial 270 km de estrada.

Exame – 2018, Ép. especial