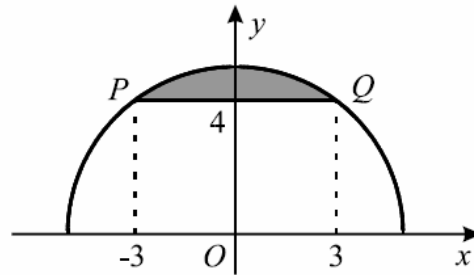


**AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA**  
**Geometria - 10º ano**                      **Exercícios de Consolidação II**

- 1** Na figura está representada, em referencial o.n.  $xOy$ , uma semicircunferência de centro na origem e que passa nos pontos  $P$  e  $Q$ .  
 O ponto  $P$  tem coordenadas  $(-3, 4)$  e o ponto  $Q$  tem coordenadas  $(3, 4)$ .  
 Na figura está também representado o segmento de recta  $[PQ]$ .



Qual das condições seguintes define o domínio plano sombreado?

- (A)  $x^2 + y^2 \leq 25 \wedge -3 \leq x \leq 3$   
 (B)  $x^2 + y^2 \leq 25 \wedge y \geq 4$   
 (C)  $x^2 + y^2 \leq 16 \wedge -3 \leq x \leq 3$   
 (D)  $x^2 + y^2 \leq 16 \wedge y \geq 4$
- 2** Considere, em referencial o.n.  $xOy$ , a recta  $r$  que intersecta o eixo  $Ox$  no ponto de abscissa 2 e que intersecta o eixo  $Oy$  no ponto de ordenada 6.  
 Qual é a equação reduzida da recta  $r$ ?

- (A)  $y = -3x + 6$     (B)  $y = 3x + 6$   
 (C)  $y = -2x + 3$     (D)  $y = 2x + 3$

- 3** Em referencial o.n.  $Oxyz$ , considere:
- a esfera  $E$  definida pela condição  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$
  - a recta  $r$  de equação vectorial  $(x, y, z) = (0, 0, 2) + k(0, 1, 0)$ ,  $k \in \mathbb{R}$
- A intersecção da esfera  $E$  com a recta  $r$  é

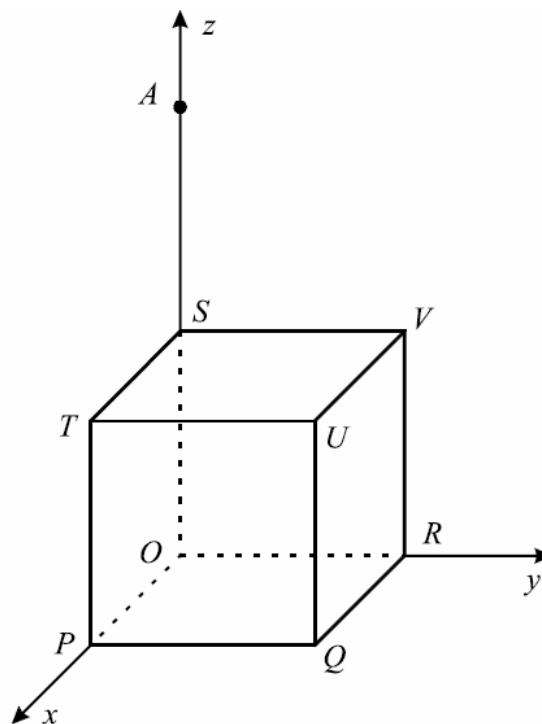
- (A) um segmento de recta de comprimento 2  
 (B) um segmento de recta de comprimento 4  
 (C) um ponto  
 (D) o conjunto vazio

- 4 Na figura está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , um cubo  $[OPQRSTUV]$

A aresta  $[OP]$  está contida no semieixo positivo  $Ox$ , a aresta  $[OR]$  está contida no semieixo positivo  $Oy$  e a aresta  $[OS]$  está contida no semieixo positivo  $Oz$ .

O ponto  $U$  tem coordenadas  $(2, 2, 2)$

No eixo  $Oz$  está representado um ponto  $A$ , cuja cota é 4



4.1 Defina, por meio de uma condição, a aresta  $[UQ]$

4.2 Averigúe se o ponto  $T$  pertence ao plano mediador do segmento  $[AV]$

4.3 Na figura acima **desenhe**, a lápis, a secção produzida no cubo pelo plano  $PQA$  e, na sua folha de prova, **determine** o seu perímetro.

- 5 Qual das condições seguintes define, em referencial o.n.  $Oxyz$ , uma recta paralela ao eixo  $Oz$ ?

(A)  $(x, y, z) = (7, 0, 0) + k(1, 1, 0)$ ,  $k \in \mathbb{R}$

(B)  $(x, y, z) = (1, 1, 0) + k(0, 0, 7)$ ,  $k \in \mathbb{R}$

(C)  $(x, y, z) = (1, 1, 0) + k(7, 0, 0)$ ,  $k \in \mathbb{R}$

(D)  $(x, y, z) = (0, 0, 7) + k(1, 1, 0)$ ,  $k \in \mathbb{R}$

- 6 Num referencial o.n.  $Oxyz$ , a condição  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4$  define uma esfera. Qual das equações seguintes define um plano que divide essa esfera em dois sólidos com o mesmo volume?

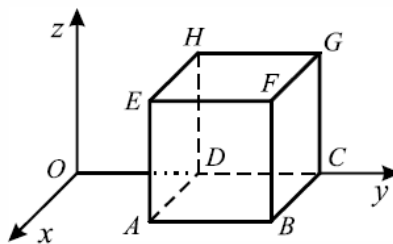
(A)  $x = 0$

(B)  $x = 1$

(C)  $x = 2$

(D)  $x = 3$

- 7 Na figura está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , um cubo de aresta 2.



Sabe-se que:

- a face  $[ABCD]$  está contida no plano  $xOy$
- a aresta  $[DC]$  está contida no eixo  $Oy$
- o ponto  $D$  tem coordenadas  $(0, 2, 0)$

Os pontos de coordenadas  $(2, 2, 0)$  e  $(0, 4, 0)$  são vértices do cubo.

Qual é o plano mediador do segmento de recta cujos extremos são estes dois vértices?

- (A)  $ABC$                       (B)  $ACG$                       (C)  $BDH$                       (D)  $BCF$

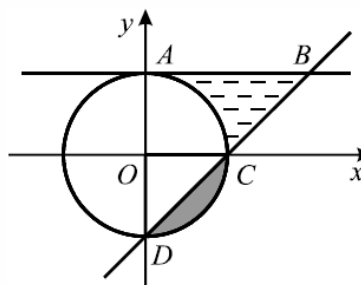
- 8 Num certo prisma, cada uma das bases tem  $n$  vértices.

Quantas faces e quantas arestas tem esse prisma?

- (A)  $2n$  faces e  $2n$  arestas                      (B)  $2n$  faces e  $3n$  arestas  
(C)  $n + 2$  faces e  $2n$  arestas                      (D)  $n + 2$  faces e  $3n$  arestas

- 9 Na figura estão representados, em referencial o.n.  $xOy$ :

- os pontos  $A$  e  $D$ , pertencentes ao eixo  $Oy$
- o ponto  $C$ , pertencente ao eixo  $Ox$
- a circunferência de centro na origem do referencial e raio 3, que contém os pontos  $A$ ,  $C$  e  $D$
- a recta  $BD$ , que contém o ponto  $C$
- a recta  $AB$ , paralela ao eixo  $Ox$



O ponto  $B$  tem coordenadas  $(6, 3)$

Estão assinaladas na figura duas regiões:

- uma, tracejada, no primeiro quadrante
- outra, sombreada, no quarto quadrante

9.1 Mostre que uma equação da mediatriz do segmento  $[BC]$  é  $y = -x + 6$

9.2 Defina, por meio de uma condição, a região **sombreada**, incluindo a fronteira.

9.3 Determine a área da região **tracejada**. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

- 10 Na figura 1, está representada, num referencial o.n.  $xOy$ , a recta  $r$ , que intersecta o eixo  $Ox$  no ponto de abscissa 2 e o eixo  $Oy$  no ponto de ordenada 2

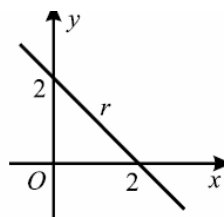


Figura 1

- Qual é a equação reduzida da recta  $r$  ?
- (A)  $y = 2x + 2$                       (B)  $y = -2x + 2$   
(C)  $y = -x + 2$                       (D)  $y = x + 2$

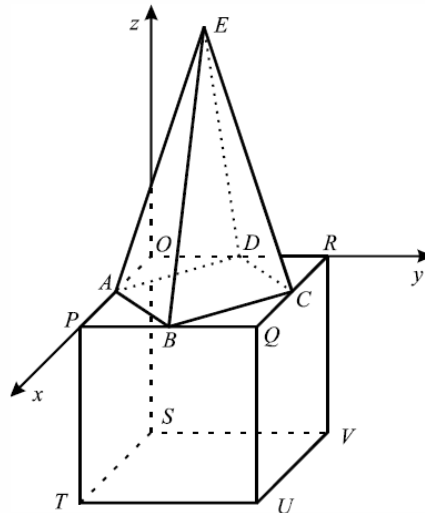
- 11** Na figura está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , um sólido que pode ser decomposto num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

A origem do referencial é um dos vértices do cubo, o vértice  $P$  pertence ao eixo  $Ox$  e o vértice  $R$  pertence ao eixo  $Oy$ .

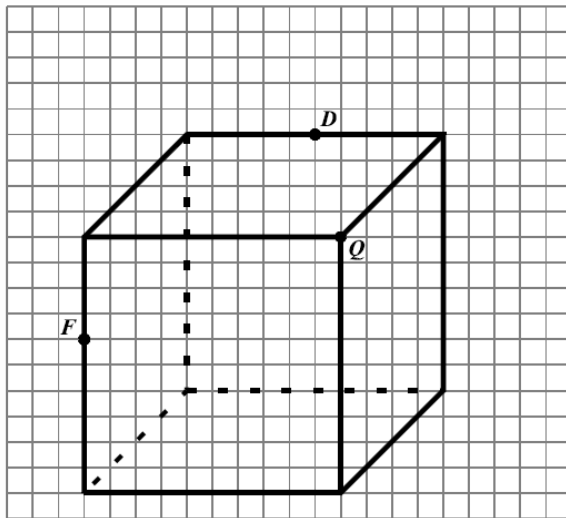
Os vértices da base da pirâmide são os pontos médios dos lados do quadrado  $[OPQR]$ .

O ponto  $Q$  tem coordenadas  $(2, 2, 0)$ .

O volume do sólido é igual a 10.



- 11.1** Determine a cota do ponto  $E$ .
- 11.2** Determine uma equação da superfície esférica que tem centro no ponto  $T$  e que contém o ponto  $C$ .
- 11.3** Na figura abaixo está representado o cubo, em papel quadriculado. Nesta figura, desenhe, a lápis, a secção produzida no cubo pelo plano  $FQD$ . Em seguida, assinale com um X a opção correcta, quanto à forma da secção.



A secção obtida é um

- triângulo
- rectângulo
- losango
- trapézio
- pentágono
- hexágono

- 12** Na figura 1 está representada, em referencial o.n.  $xOy$ , uma circunferência de centro no ponto  $P(2, -1)$

Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

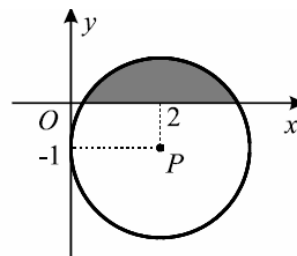
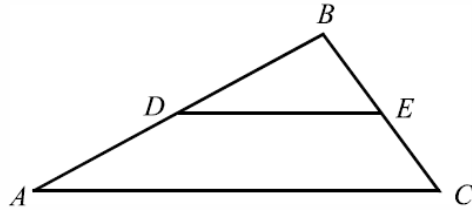


Figura 1

- (A)  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 4 \wedge x \geq 0$
- (B)  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 4 \wedge y \geq 0$
- (C)  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 4 \wedge y \geq 0$
- (D)  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 4 \wedge x \geq 0$

- 13** Na figura está representado um triângulo  $[ABC]$ . Os pontos  $D$  e  $E$  são os pontos médios dos lados  $[AB]$  e  $[BC]$ , respectivamente.



Utilizando cálculo vectorial, prove que as rectas  $AC$  e  $DE$  são paralelas.

**Sugestão**

Percorra as seguintes etapas:

- Exprima o vector  $\overrightarrow{AC}$  à custa dos vectores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BC}$
- Relacione o vector  $\overrightarrow{AB}$  com o vector  $\overrightarrow{DB}$
- Relacione o vector  $\overrightarrow{BC}$  com o vector  $\overrightarrow{BE}$
- Mostre que  $\overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{DE}$
- Utilize a igualdade anterior para justificar que as rectas  $AC$  e  $DE$  são paralelas

- 14** Na figura 4 está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , o prisma triangular não regular  $[ABCDEF]$

Sabe-se que:

- as bases são triângulos isósceles ( $\overline{AB} = \overline{AC}$  e  $\overline{DE} = \overline{DF}$ )
- a base  $[ABC]$  está contida no plano  $xOy$
- as arestas laterais do prisma são perpendiculares às bases
- o ponto  $A$  tem coordenadas  $(4, 0, 0)$
- o ponto  $E$  tem coordenadas  $(0, 3, 8)$
- o ponto  $F$  é o simétrico do ponto  $E$ , relativamente ao plano  $xOz$

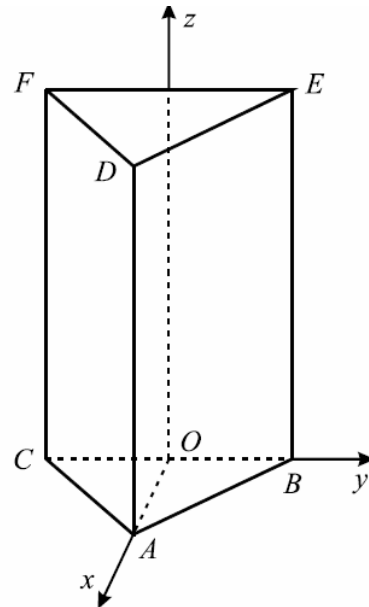


Figura 4

- 14.1** Determine uma equação vectorial da recta  $DF$

- 14.2** Determine a área lateral do prisma.

15 Considere, num referencial o.n.  $xOy$ , a circunferência de equação

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

Qual das equações seguintes define uma recta tangente a esta circunferência?

- (A)  $x = -3$       (B)  $x = 1$       (C)  $y = -4$       (D)  $y = 1$

16 Uma pirâmide tem 31 vértices. Quantas arestas tem?

- (A) 30      (B) 40      (C) 50      (D) 60

17 Na figura 2, está representada uma planificação de um cubo.

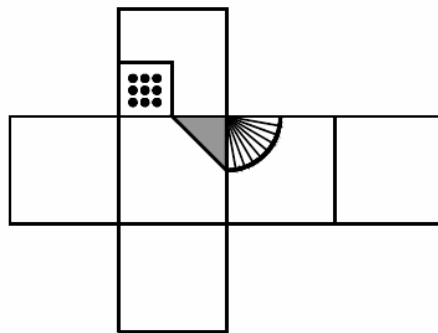
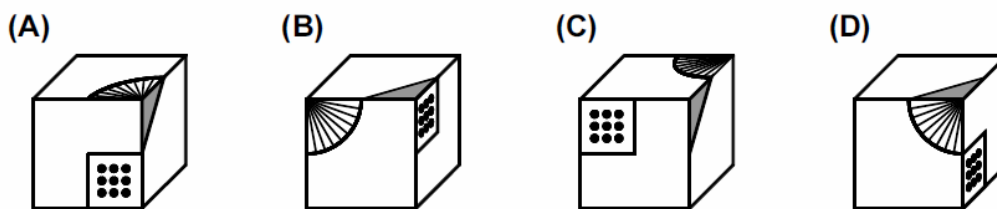


Figura 2

Em qual das opções seguintes pode estar representado esse cubo?



18 Na figura 3, estão representados um triângulo isósceles  $[ABC]$  e um quadrado inscrito nesse triângulo.

A altura relativa à base  $[AB]$  é o segmento de recta  $[CD]$ , representado a tracejado.

Sabe-se que  $\overline{AB} = 4\text{ cm}$  e que  $\overline{CD} = 8\text{ cm}$

Quanto mede, em centímetros, o lado do quadrado?

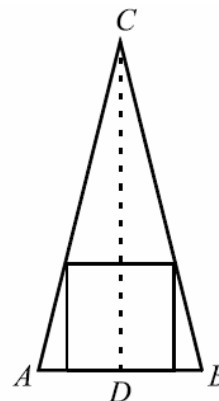


Figura 3

- (A)  $\frac{9}{4}$       (B)  $\frac{5}{2}$       (C)  $\frac{8}{3}$       (D)  $\frac{11}{4}$

- 19 Na figura 4, está representada, num referencial o.n.  $xOy$ , a circunferência que tem centro no ponto  $A(4, 7)$  e que contém o ponto  $D(8, 10)$

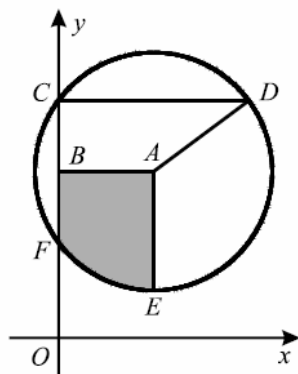


Figura 4

Sabe-se que:

- $[CF]$  é a corda da circunferência contida no eixo  $Oy$
- $[CD]$  é uma corda da circunferência, paralela ao eixo  $Ox$
- $[AE]$  é um raio da circunferência, paralelo ao eixo  $Oy$
- $[ABCD]$  é um trapézio rectângulo.

19.1 Determine a área do trapézio  $[ABCD]$

19.2 Determine a equação reduzida da mediatriz do segmento  $[AD]$

19.3 Defina, por uma condição, a região sombreada, incluindo a fronteira.

- 20 Na Figura 3, está representado um sólido que se pode decompor no cubo  $[ABCDEFGH]$  e na pirâmide triangular não regular  $[GIJK]$

Sabe-se que:

- o cubo tem aresta 6
- o ponto  $I$  é o ponto de intersecção do segmento  $[BK]$  com a aresta  $[GF]$
- o ponto  $J$  é o ponto de intersecção do segmento  $[DK]$  com a aresta  $[GH]$
- o ponto  $G$  é o ponto médio do segmento  $[CK]$

Qual é o valor do volume da pirâmide  $[GIJK]$  ?

- (A) 36                      (B) 27                      (C) 18                      (D) 9

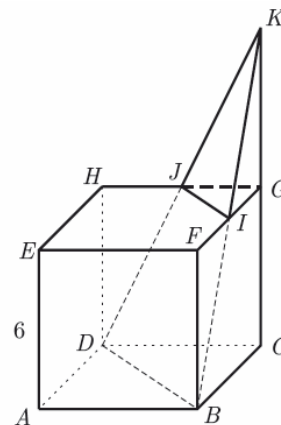


Figura 3

- 21** Na figura 5, está representado, num referencial o.n.  $Oxyz$ , o cubo  $[ABCDEFGH]$  (o ponto  $H$  não está representado na figura).

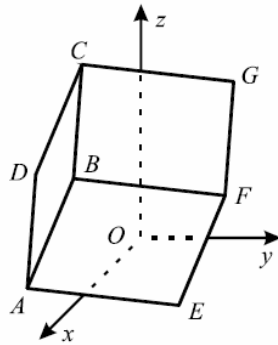


Figura 5

- 21.1** Preencha cada um dos espaços seguintes, utilizando a designação de um ponto ou de um vector, de modo a obter afirmações verdadeiras.

Copie as afirmações obtidas para a sua folha de respostas.

$$\dots\dots\dots + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AC}$$

$$F + \overrightarrow{CD} = \dots\dots\dots$$

$$D + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = \dots\dots\dots$$

- 21.2** Admita agora que:

- o ponto  $A$  tem coordenadas  $(11, -1, 2)$
- o ponto  $B$  tem coordenadas  $(13, 2, 8)$
- o ponto  $E$  tem coordenadas  $(8, 5, 0)$

- 21.2.1** Determine a área da secção produzida no cubo pelo plano  $ABG$

- 21.2.2** Defina, por uma condição, a recta que contém o ponto  $F$  e é paralela ao eixo  $Oz$

- 22** Considere, num referencial o.n.  $xOy$ , a recta  $r$  que intersecta o eixo  $Ox$  no ponto de abcissa 2 e que intersecta o eixo  $Oy$  no ponto de ordenada 8

Qual é a equação reduzida da recta  $r$  ?

- |                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| <b>(A)</b> $y = -4x + 8$ | <b>(B)</b> $y = 4x + 8$ |
| <b>(C)</b> $y = -2x + 4$ | <b>(D)</b> $y = 2x + 4$ |

**23** Na figura 2, estão representados, num referencial o.n.  $Oxyz$ , um prisma quadrangular regular e uma pirâmide.

A base da pirâmide,  $[OPQR]$ , está contida no plano  $xOy$  e coincide com a base inferior do prisma.

O ponto  $W$ , vértice da pirâmide, coincide com o centro da base superior,  $[STUV]$ , do prisma.

O ponto  $P$  tem coordenadas  $(5, 0, 0)$

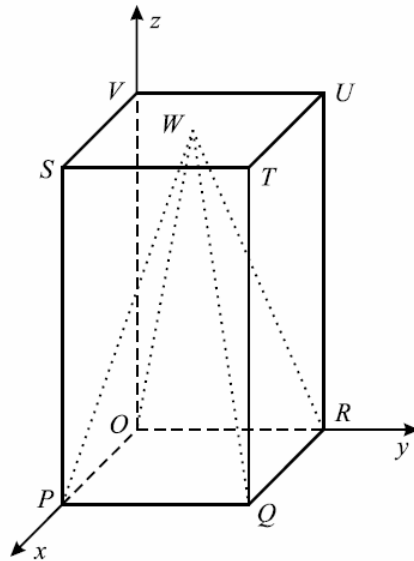


Figura 2

**23.1** Defina, por uma condição, a superfície esférica de centro no ponto  $Q$  e que passa no ponto  $O$

**23.2** Sabe-se que o volume da **pirâmide** é igual a 75

Determine as coordenadas do ponto  $W$ , vértice da pirâmide.

**24** Na Figura 7, está representado um cilindro de altura  $h$  e raio da base  $r$ .  
Sejam  $A$  e  $B$  os centros das bases do cilindro.

Considere que um ponto  $P$  se desloca ao longo do segmento  $[AB]$ , nunca coincidindo com o ponto  $A$ , nem com o ponto  $B$

Cada posição do ponto  $P$  determina dois cones cujos vértices coincidem com o ponto  $P$  e cujas bases coincidem com as bases do cilindro.

Mostre que a soma dos volumes dos dois cones é constante, isto é, não depende da posição do ponto  $P$

**Sugestão** – Designe por  $a$  a altura de um dos cones.

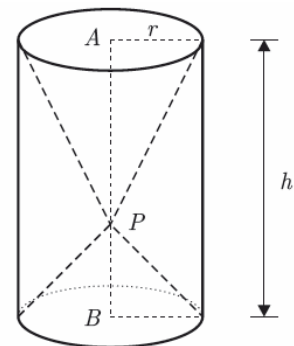


Figura 7

25

Na Figura 2, está representado um cubo de aresta 4  
 Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são vértices da mesma face do cubo.  
 O ponto  $D$  pertence a uma das arestas do cubo e  $\overline{DC} = 3$

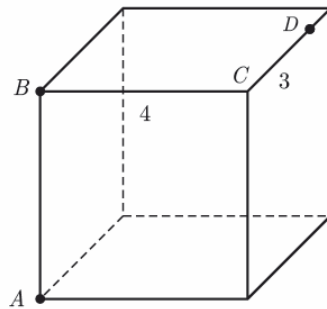


Figura 2

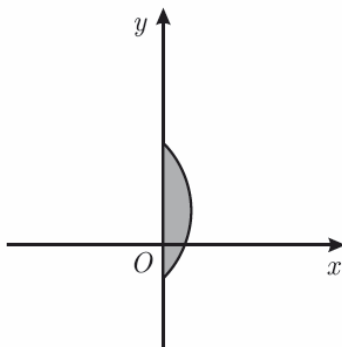
Qual é o valor da área da secção produzida no cubo pelo plano  $ABD$  ?

- (A) 10
- (B) 12
- (C) 20
- (D) 25

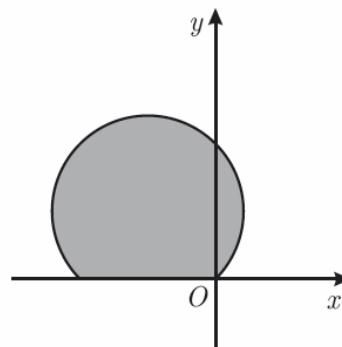
26 Considere a condição  $(x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \wedge x \geq 0$

Em qual das opções seguintes está representado, em referencial o.n.  $xOy$ , o conjunto de pontos definido por esta condição?

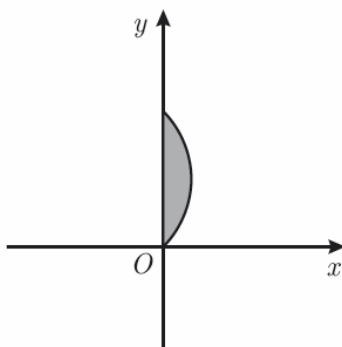
(A)



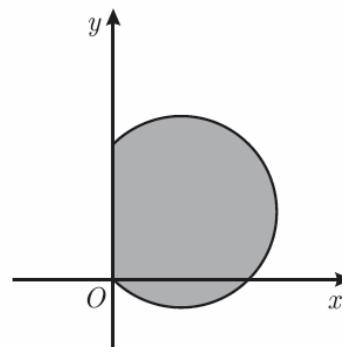
(B)



(C)



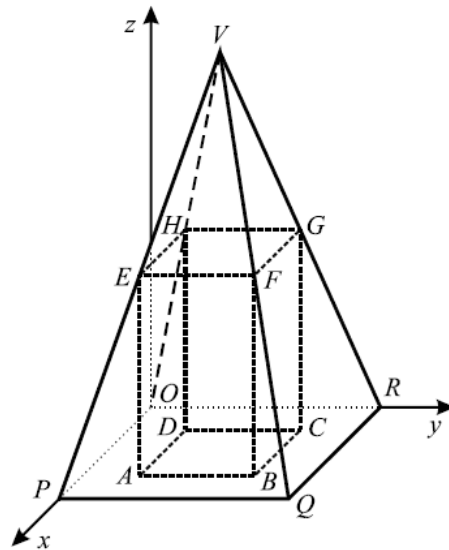
(D)



**27** Na figura 6, estão representados, num referencial o.n.  $Oxyz$ , a pirâmide quadrangular regular  $[VOPQR]$  e o prisma quadrangular regular  $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- os vértices  $P$  e  $R$  da pirâmide pertencem aos eixos coordenados  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente;
- uma das bases do prisma está contida na base da pirâmide e cada vértice da outra base pertence a uma aresta da pirâmide.



**27.1** Preencha cada um dos espaços seguintes, de modo a obter afirmações verdadeiras quanto à posição relativa das rectas e/ou dos planos.

Copie as afirmações obtidas para a sua folha de respostas.

*As rectas  $DQ$  e  $VF$  são .....*

*As rectas  $EH$  e ..... são não complanares.*

*A recta  $PQ$  e o plano  $HGB$  são .....*

*A recta  $FQ$  e o plano  $ADH$  são .....*

*Os planos  $BQV$  e ..... são perpendiculares.*

**27.2** Sabe-se que  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 8z = 0$  é uma equação da superfície esférica que tem centro no ponto  $V$  e que contém os quatro vértices da base da pirâmide  $[VOPQR]$

Calcule o volume da pirâmide  $[VOPQR]$

**28** Na Figura 6, está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , o prisma quadrangular regular  $[ABCDEFGH]$

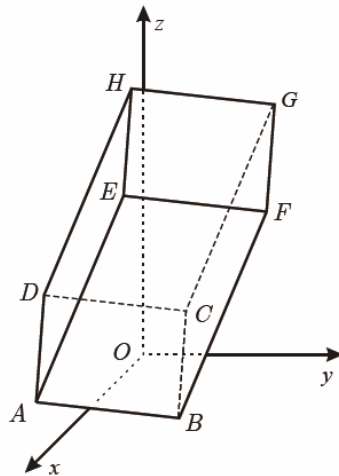


Figura 6

As coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $G$  são  $(11, -1, 2)$ ,  $(8, 5, 0)$  e  $(6, 9, 15)$ , respectivamente.

**28.1** Determine as coordenadas do ponto  $H$

**28.2** Escreva uma equação que defina a superfície esférica com centro no ponto  $A$  e que passa no ponto  $B$

**28.3** Escreva uma condição que defina a recta que passa no ponto  $G$  e que é paralela ao eixo  $Oy$

**29** Na Figura 1, está representado, num referencial o.n.  $Oxyz$ , o cubo  $[OPQRSTU]$  de aresta 2. Os pontos,  $P$ ,  $R$  e  $T$  pertencem aos semieixos positivos.

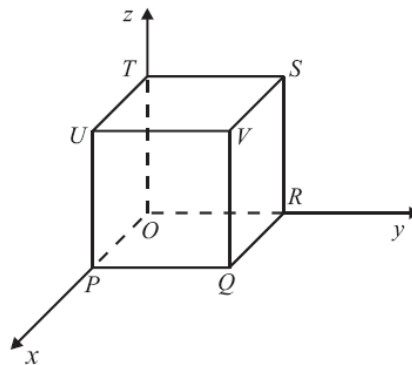


Figura 1

Numa das opções seguintes estão as coordenadas de um ponto pertencente a uma das arestas do cubo.

Em qual?

- (A)  $(1, 1, 2)$       (B)  $(1, 2, 0)$       (C)  $(0, 1, 1)$       (D)  $(1, 1, 1)$



- b) Na Figura 8, está representada uma pirâmide quadrangular regular  $[IJKLV]$  cuja base tem  $45 \text{ dm}^2$  de área e cuja altura é  $12 \text{ dm}$

Sobre esta pirâmide deixou-se descair a peça metálica representada na Figura 7, de tal modo que esta peça ficou paralela à base da pirâmide e os vértices do quadrado  $[EFGH]$  ficaram sobre as arestas laterais da pirâmide.

Determine a distância,  $d$ , em  $\text{dm}$ , entre a peça metálica e a base da pirâmide.

Nota – Admita que a espessura da peça metálica é desprezável e tenha em conta que a área do quadrado  $[EFGH]$  é  $5 \text{ dm}^2$

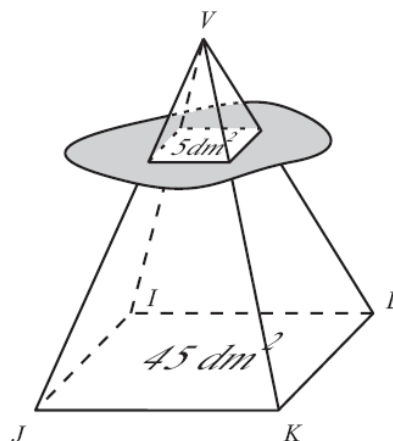


Figura 8

*Soluções:* 1)B; 2)A; 3)C; 4.1) $x = 2 \wedge y = 2 \wedge 0 \leq z \leq 2$ ; 4.2)sim; 4.3) $4 + 2\sqrt{5}$ ; 5)B; 6)A; 7)C; 8)D;  
 9.2) $x^2 + y^2 \leq 9 \wedge y \leq x - 3$ ; 9.3)6, 43; 10)C; 11.1)3; 11.2) $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 9$ ; 12)B;  
 14.1) $(x, y, z) = (4, 0, 8) + k(-4, -3, 0) \quad k \in \mathbb{R}$ ; 14.2)128; 15)A; 16)D; 17)A; 18)C; 19.1)18;  
 19.2) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{33}{2}$ ; 19.3) $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 \leq 25 \wedge x \leq 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \leq 7$ ; 20)D; 21.1) $\overline{AB}, E, F$ ;  
 21.2.1) $49\sqrt{2}$ ; 21.2.2) $(x, y, z) = (10, 8, 6) + k(0, 0, 1) \quad k \in \mathbb{R}$ ; 22)A; 23.1) $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 + z^2 = 50$ ;  
 23.2) $W\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 9\right)$ ; 25)C; 26)C; 27.1)conc, VF, est paral, conc, PQR; 27.2) $\frac{16}{3}$ ; 28.1)(9, 3, 17);  
 28.2) $(x - 11)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 49$ ; 28.3) $(x, y, z) = (6, 9, 15) + k(0, 1, 0) \quad k \in \mathbb{R}$ ; 29)B; 30)C;  
 31a) $(x, y) = (0, -1) + k(1, 2); \quad k \in \mathbb{R}$ ; b) $y = 2x - 2$ ; c) $x^2 + (y + 2)^2 \leq 4 \wedge y \leq 2x - 1 \wedge x \geq 0$ ; 32b)8

