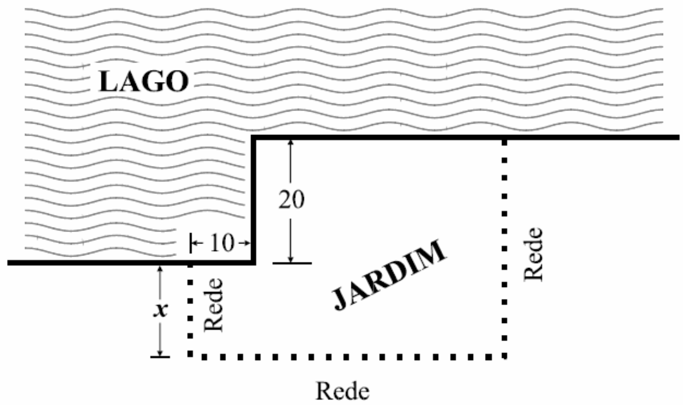
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA

Funções - 10º ano **Exercícios de Consolidação II**

1 Pretende-se construir um jardim junto a um lago, conforme a figura ilustra.
Três lados do jardim confinam com o lago e os outros três ficam definidos por uma rede.
Pretende-se que lados consecutivos do jardim sejam sempre perpendiculares.



As dimensões indicadas na figura estão expressas em metros.
Tal como a figura mostra, x é a medida, em metros, de um dos lados do jardim.
Vão ser utilizados, na sua totalidade, 100 metros de rede.

1.1. Mostre que a área, em m^2, do jardim, é dada, em função de x, por

$$a(x) = -2x^2 + 40x + 1400$$

1.2. **Sem recorrer à calculadora**, determine o valor de x para o qual é máxima a área do jardim e determine essa área máxima.

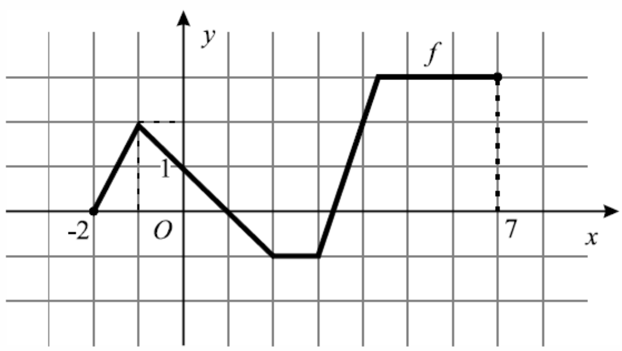
2 Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 14x$
Sabe-se que o gráfico de f intersecta o eixo Ox em apenas dois pontos. Um deles tem abcissa -2.

2.1. Decomponha o polinómio $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 14x$ num produto de três polinómios, sendo dois do primeiro grau e um do segundo grau.

2.2. O contradomínio de f é um intervalo da forma $[a, +\infty[$
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine o valor de a, arredondado às décimas.

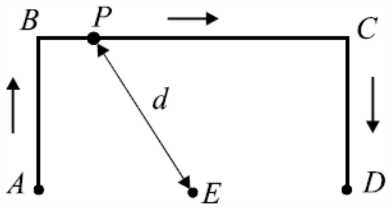
Reproduza, na sua folha de prova, o gráfico de f visualizado na calculadora, depois de ter escolhido uma janela que lhe permita visualizar o ponto relevante para a resolução do problema proposto. Assinale esse ponto no seu gráfico.

3 Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função f, de domínio $[-2, 7]$

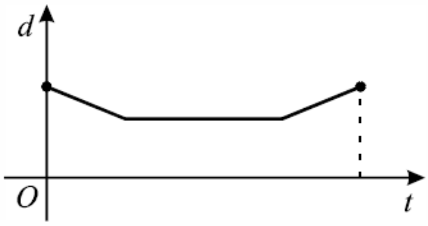


Indique o conjunto solução da condição $f(x) < 2$. Apresente a sua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

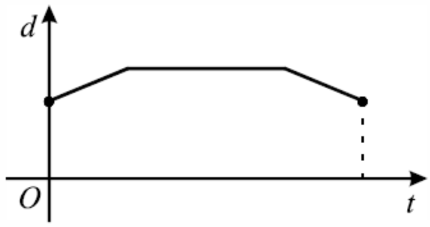
4 Na figura está representado o trajecto de um ponto P.
O ponto P iniciou o seu percurso em A e só parou em D, tendo passado por B e por C.
Para cada posição do ponto P, seja t o tempo decorrido desde o início do percurso e seja d a distância do ponto P ao ponto E.
Qual dos gráficos seguintes pode relacionar correctamente as variáveis t e d ?



(A)

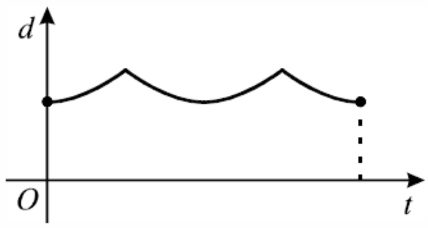


(B)



(C)

(D)



5 Na figura 2 está o gráfico de uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x - a| + b$, em que a e b designam dois números reais.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

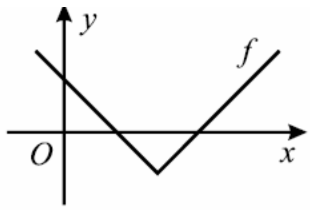


Figura 2

(A) $a > 0 \ \wedge \ b > 0$ **(B)** $a > 0 \ \wedge \ b < 0$

(C) $a < 0 \ \wedge \ b > 0$ **(D)** $a < 0 \ \wedge \ b < 0$

6 Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = |\,x\,| + 7$
Qual das equações seguintes tem duas soluções distintas?

(A) $g(x) = 3$ **(B)** $g(x) = 5$ **(C)** $g(x) = 7$ **(D)** $g(x) = 9$

7 Na figura 3 estão representadas, em referencial o.n. xOy, duas parábolas geometricamente iguais, que são os gráficos de duas funções quadráticas, f e g.

Os vértices das duas parábolas têm a mesma abcissa.

A ordenada de um dos vértices é igual a 3 e a ordenada do outro vértice é igual a 4.

Qual das expressões seguintes define a função g ?

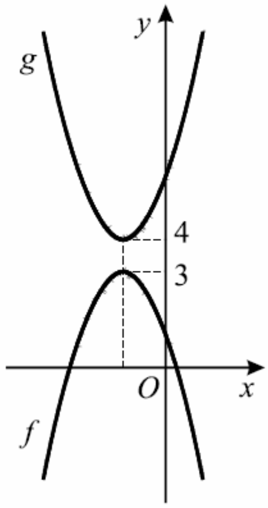


Figura 3

(A) $-f(x)+7$ **(B)** $-f(x)+1$ **(C)** $-[f(x)+1]$ **(D)** $-[f(x)+7]$

8 Uma empresa de telecomunicações anuncia o seguinte plano de preços para as chamadas telefónicas feitas a partir de um telefone registado nessa empresa:

- 12 cêntimos pelo primeiro minuto de conversação (se a chamada durar menos de um minuto, o preço a pagar também é 12 cêntimos);
- 0,1 cêntimos por segundo, a partir do primeiro minuto.

Por exemplo, se uma chamada durar um minuto e meio, o preço a pagar é 15 cêntimos (12 cêntimos pelo primeiro minuto, mais 0,1 cêntimos por cada um dos trinta segundos seguintes).

Qual das expressões seguintes dá o preço a pagar, em cêntimos, por uma chamada feita a partir de um telefone registado nessa empresa, em função do tempo t de duração da chamada, medido em segundos?

(A) $\begin{cases} 12\,t & se\ t \leq 60 \\ 12+0{,}1\,(t-60) & se\ t > 60 \end{cases}$ **(B)** $\begin{cases} 12\,t & se\ t \leq 60 \\ 12+0{,}1\,t & se\ t > 60 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 12 & se\ t \leq 60 \\ 12+0{,}1\,(t-60) & se\ t > 60 \end{cases}$ **(D)** $\begin{cases} 12 & se\ t \leq 60 \\ 12+0{,}1\,t & se\ t > 60 \end{cases}$

9 Em $\mathbb{R}$, qual das condições seguintes é equivalente à inequação $x^2 < 4$?

(A) $x < 2$ **(B)** $x < 4$ **(C)** $|x| < 2$ **(D)** $|x| < 4$

10 Na figura 6 está representado um rectângulo $[ABCD]$

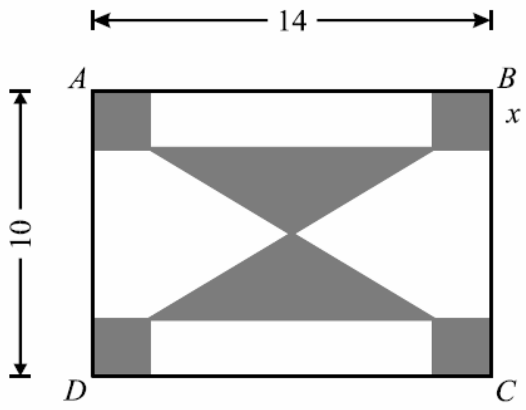


Figura 6

Este rectângulo é o esboço de uma placa decorativa de $14\ cm$ de comprimento por $10\ cm$ de largura e que será constituída por uma parte em metal (representada a cinzento) e por uma parte em madeira (representada a branco).

A parte em metal é formada por dois triângulos iguais e por quatro quadrados também iguais.

Cada triângulo tem um vértice no centro do rectângulo $[ABCD]$

Seja x o lado de cada quadrado, medido em cm $(x \in]0, 5[)$

Sem recorrer à calculadora, resolva os três itens seguintes.

10.1 Mostre que a área, em cm^2, da parte em metal da placa decorativa é dada, em função de x, por

$$A(x) = 6x^2 - 24x + 70$$

10.2 Determine o valor de x para o qual a área da parte em metal é mínima e calcule essa área.

10.3 Determine o valor de x para o qual a área da parte em metal é igual à área da parte em madeira.

11 Sejam a, b e c três números reais.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$

Sabe-se que:

- $a > 0$
- a função f tem um único zero, que é o número real 5

Qual é o contradomínio de f ?

(A) $]-\infty, 0]$ **(B)** $[0, +\infty[$ **(C)** $]-\infty, 5]$ **(D)** $[5, +\infty[$

12 Na figura 5 está representada uma circunferência de centro O e que contém os pontos R, S e T.

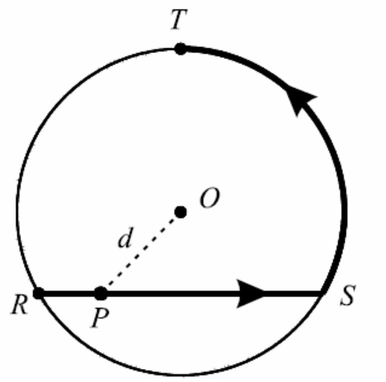
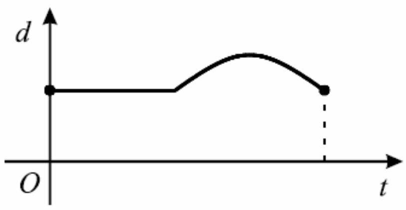


Figura 5

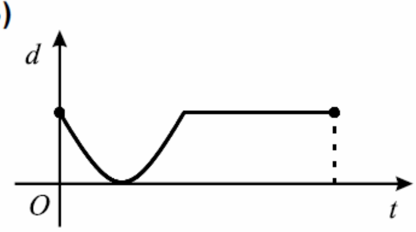
Um ponto P desloca-se ao longo do trajecto que a figura sugere: P inicia o percurso em R e termina-o em T, percorrendo, sucessivamente e sem parar, a corda $[RS]$ e o arco ST. Para cada posição do ponto P, seja t o tempo decorrido desde o início do percurso e seja d a distância do ponto P ao ponto O.

Apenas um dos gráficos a seguir representados pode relacionar correctamente as variáveis t e d

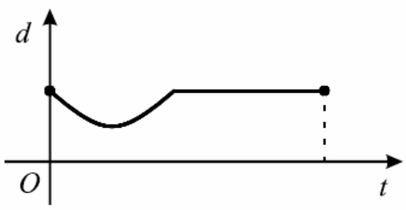
(A)



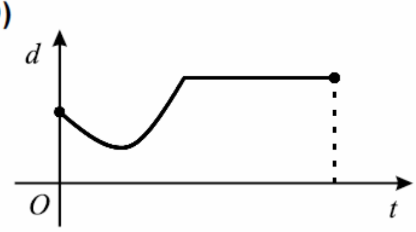
(B)



(C)



(D)



Numa pequena composição, indique o gráfico que pode relacionar correctamente as variáveis t e d e apresente, para cada um dos gráficos rejeitados, uma razão pela qual o considerou incorrecto.

13 Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = |\,x\,| + 3$

Qual das equações seguintes tem duas soluções distintas?

(A) $g(x) = 1$ **(B)** $g(x) = 2$ **(C)** $g(x) = 3$ **(D)** $g(x) = 4$

14 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

14.1 **Sem recorrer à calculadora**, resolva a inequação $f(x) < 0$, sabendo que um dos zeros de f é 4.

Apresente o conjunto solução utilizando a notação de intervalos de números reais.

14.2 Sejam A e B os pontos do gráfico de f cujas abcissas são -3 e 0, respectivamente.

A recta AB intersecta o gráfico de f em mais um ponto. Designemos esse ponto por C.

Determine as coordenadas do ponto C, percorrendo as etapas indicadas a seguir:

- determine a equação reduzida da recta AB
- **recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**, visualize o gráfico de f e a recta AB, escolhendo uma janela que lhe permita visualizar também o ponto C
- reproduza, na sua folha de prova, o que visualiza na calculadora, assinalando também os pontos A, B e C
- recorrendo à ferramenta adequada da calculadora, determine as coordenadas do ponto C e indique-as no gráfico que desenhou (as coordenadas do ponto C são números inteiros).

15 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

15.1 O gráfico da função f intersecta o eixo das abcissas em quatro pontos.

Designemos esses quatro pontos por A, B, C e D, sendo A o que tem menor abcissa e sendo D o que tem maior abcissa.

O ponto A tem abcissa -3 e o ponto C tem abcissa 1

Seja E o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas.

Determine a área do triângulo $[BED]$, **sem recorrer à calculadora**.

15.2 O contradomínio de f é um intervalo da forma $[a, +\infty[$

Determine o valor de a, arredondado às décimas, **recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**.

Obtenha o gráfico de f numa janela que lhe permita visualizar o ponto relevante para a resolução do problema. Reproduza, na sua folha de prova, o gráfico visualizado e assinale, nesse gráfico, o ponto relevante para a resolução do problema.

16 Seja f a função cujo gráfico está representado na figura 1.

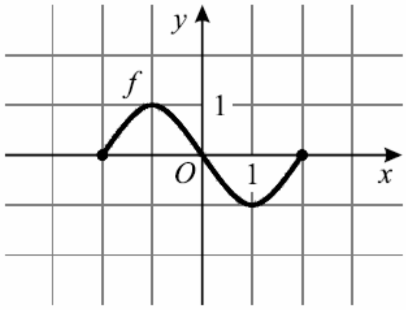
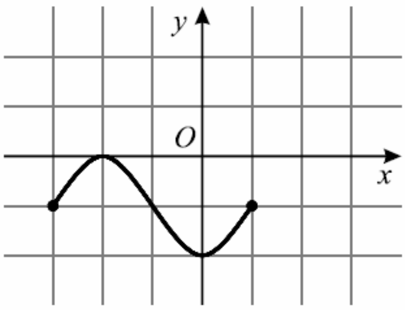


Figura 1

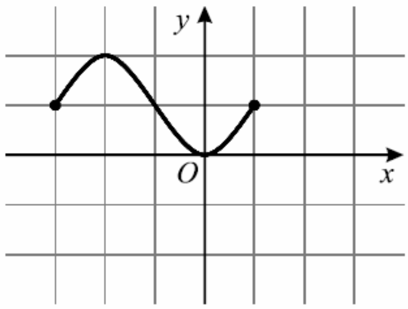
Seja h a função definida por $h(x) = f(x-1) + 1$

Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função h ?

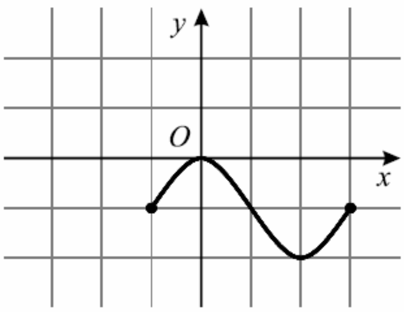
(A)



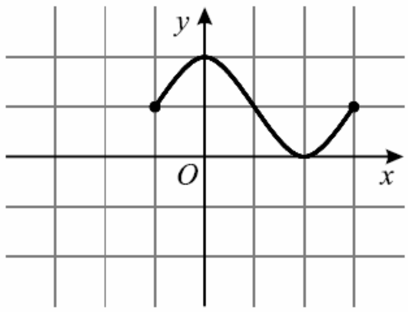
(B)



(C)



(D)



17 Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{6} & se \ \ x \leq 1 \\ x + \dfrac{1}{2} & se \ \ x > 1 \end{cases}$

Qual é o valor de $g\left(\dfrac{2}{3}\right)$?

(A) $\dfrac{1}{3}$ **(B)** $\dfrac{3}{5}$ **(C)** $\dfrac{5}{6}$ **(D)** $\dfrac{7}{6}$

18 A Fernanda e a Gabriela são duas irmãs que frequentam a mesma escola. Certo dia, a Fernanda está em casa e a Gabriela está na escola. Num certo instante, a Fernanda sai de casa e vai para a escola e, no mesmo instante, a Gabriela sai da escola e vai para casa. Há um único caminho que liga a casa e a escola. Ambas fazem o percurso a pé e cada uma delas caminha a uma velocidade constante.

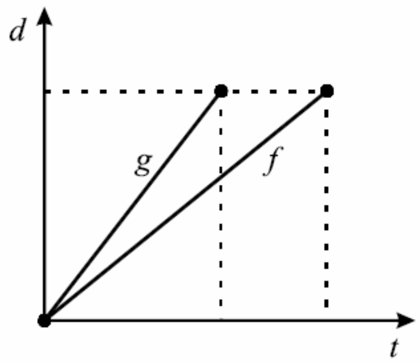
Seja f a função que dá, em metros, a distância percorrida pela Fernanda, t minutos depois de ter saído de casa (a contagem do tempo tem início quando a Fernanda sai de casa e termina quando ela chega à escola).

Seja g a função que dá, em metros, a distância percorrida pela Gabriela, t minutos depois de ter saído da escola (a contagem do tempo tem início quando a Gabriela sai da escola e termina quando ela chega a casa).

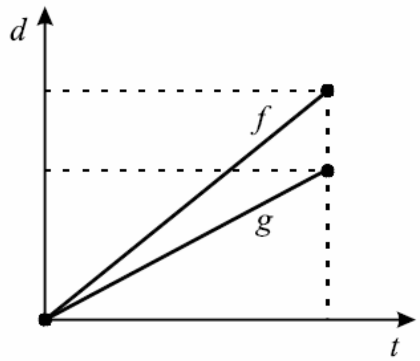
Indique em qual das opções seguintes podem estar representadas graficamente as funções f e g

Numa pequena composição, apresente, para cada uma das outras duas opções, uma razão pela qual a rejeita.

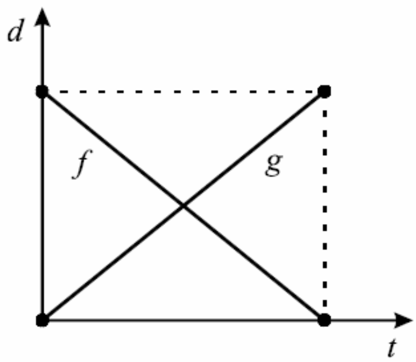
(A)



(B)



(C)



19 A figura 3 representa o projecto de um canteiro com a forma de um triângulo isósceles $\left(\overline{AC} = \overline{BC}\right)$

Nesse triângulo, a base $[AB]$ e a altura relativa a esta base medem ambas 12 metros.

O canteiro vai ter uma zona rectangular, destinada à plantação de flores, e uma zona relvada, representada a sombreado na figura.

O lado $[DG]$ do rectângulo está contido em $[AB]$ e os vértices E e F pertencem, respectivamente, a $[AC]$ e a $[BC]$

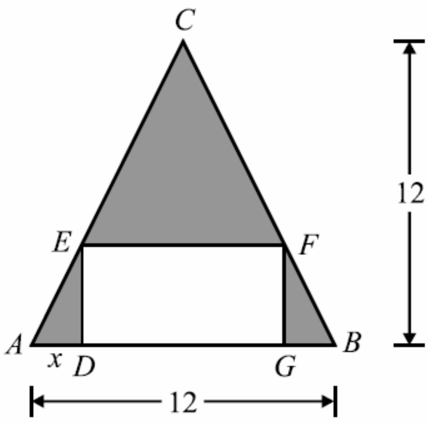


Figura 3

Seja x a distância, em metros, do ponto A ao ponto D $\quad (x \in]0, 6[)$

Resolva os três itens seguintes, **usando exclusivamente métodos analíticos**.

Nota: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos.

19.1 Mostre que a área, em metros quadrados, da zona relvada é dada, em função de x, por

$$S(x) = 4x^2 - 24x + 72$$

19.2 Determine o valor de x para o qual a área da zona relvada é mínima e calcule essa área.

19.3 Determine o conjunto dos valores de x para os quais a área da zona relvada é superior a $40\,m^2$

Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

20 Na Figura 1, está representada uma roda gigante de um parque de diversões.

Um grupo de amigos foi andar nessa roda.

Depois de todos estarem sentados nas cadeiras, a roda começou a girar.

Uma das raparigas, a Beatriz, ficou sentada na cadeira número 1, que estava na posição indicada na Figura 1, quando a roda começou a girar.

A roda gira no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e demora um minuto a dar uma volta completa.

Seja d a função que dá a distância da cadeira 1 ao solo, t segundos após a roda ter começado a girar.

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função d ?

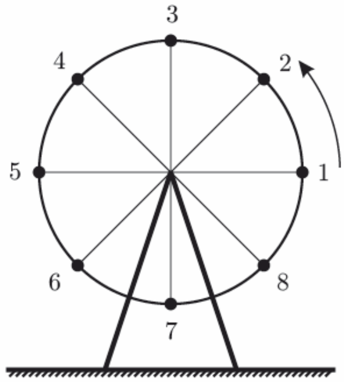
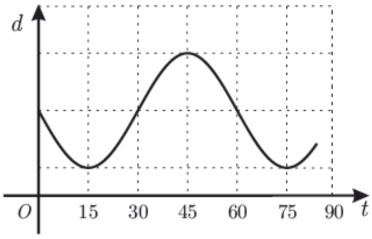
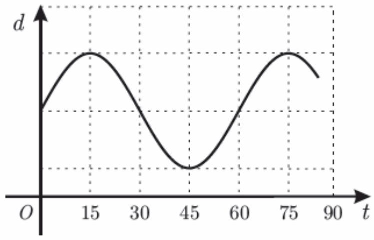


Figura 1

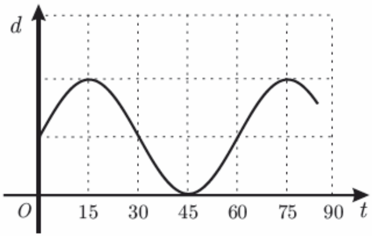
(A)



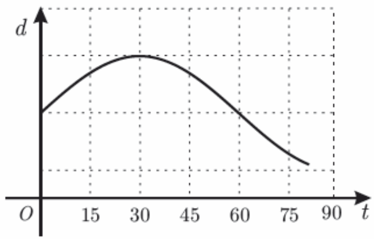
(B)



(C)



(D)



21 Uma piscina tem a forma de um paralelepípedo rectângulo. Essa piscina tem dez metros de comprimento e seis metros de largura.

Num certo dia, às 9 horas da manhã, começou a encher-se a piscina, que estava vazia.

A altura, h , em metros, da água na piscina, t horas depois das 9 horas desse dia, é dada por $h(t) = 0{,}3\,t$

A piscina esteve a encher ininterruptamente até às 14 horas desse dia.

Quantos litros de água havia na piscina às 14 horas?

(A) $72\,000$

(B) $78\,000$

(C) $84\,000$

(D) $90\,000$

22 Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^4 + 2x^3 - 1$

O gráfico da função g, num referencial o.n. xOy, intersecta a recta de equação $y = 3$ em dois pontos. Sejam A e B esses dois pontos, sendo o ponto A o que tem menor abcissa.

Determine a área do triângulo $[AOB]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Na sua resposta deve:

- reproduzir, num referencial, a parte do gráfico da função g que visualizou na sua calculadora;
- representar, no mesmo referencial, o triângulo $[AOB]$
- indicar as abcissas dos pontos A e B, arredondadas às centésimas;
- apresentar a área do triângulo $[AOB]$, com o arredondamento pedido.

23 Na Figura 5, está representada, em referencial o.n. xOy, a recta r, definida pela equação $y = 2x - 2$

Tal como a figura sugere, A e B são os pontos de coordenadas $(1, 0)$ e $(6, 0)$, respectivamente, e C é o ponto da recta r de abcissa 6

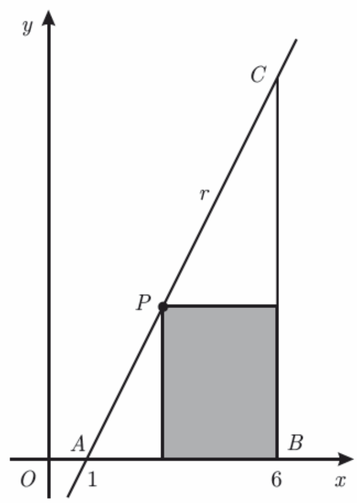


Figura 5

Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento de recta $[AC]$, nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto C

A cada posição do ponto P corresponde um rectângulo em que uma das diagonais é o segmento $[BP]$ e em que um dos lados está contido no eixo Ox

Seja x a abcissa do ponto P $\left(x \in \left]1, 6\right[\right)$

Resolva os dois itens seguintes, **usando exclusivamente métodos analíticos**.

Nota – A calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos.

23.1 Mostre que a área do rectângulo é dada, em função de x, por $S(x) = -2x^2 + 14x - 12$

23.2 Determine os valores de x para os quais a área do rectângulo é inferior a 8

Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

24 Na Figura 4, está representado, em referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função f de domínio $[-5, 6]$

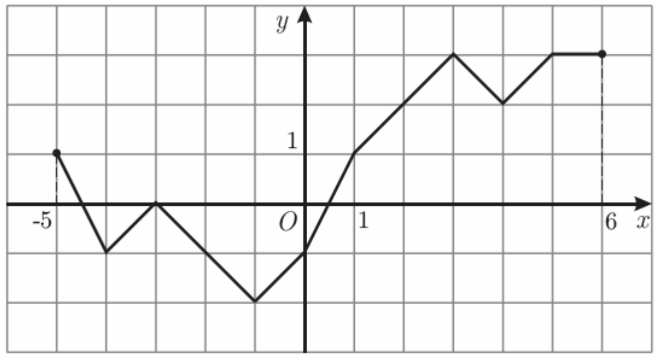


Figura 4

24.1 Qual é o contradomínio de f?

24.2 Indique todos os números reais cujas imagens, por meio de f, são iguais a -1

24.3 Indique o conjunto solução da condição $f(x) > 2$

Apresente a sua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

25. Na Figura 4, está representado, num referencial o. n. xOy, o gráfico de uma função f, de domínio $]-2, 2[$

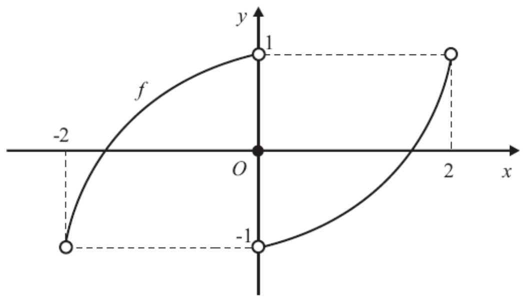


Figura 4

Em qual das opções seguintes estão três afirmações verdadeiras acerca da função f?

(A)
- Tem três zeros.
- Não tem máximos nem mínimos.
- Não é par.

(B)
- Tem exatamente dois zeros.
- Não tem máximos nem mínimos.
- É crescente no seu domínio.

(C)
- Tem máximo e tem mínimo.
- É crescente no seu domínio.
- O contradomínio é $]-1, 1[$

(D)
- É par.
- Tem exatamente dois zeros.
- O contradomínio é $]-1, 1[$

26 Na Figura 2, estão representadas graficamente as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por $f(x) = x^2$ e $g(x) = |x|$

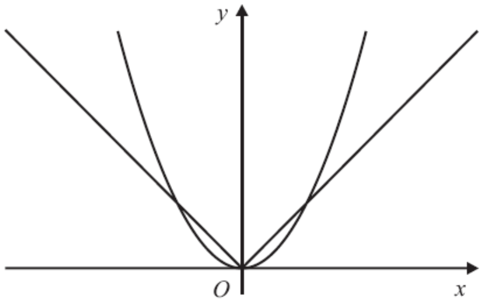


Figura 2

Qual dos conjuntos seguintes é o conjunto solução da inequação $f(x) < g(x)$?

(A) $]-1, 0[\cup]0, 1[$

(B) $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$

(C) $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

(D) $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$

27 Na Figura 9, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da parábola que é o gráfico de uma função f

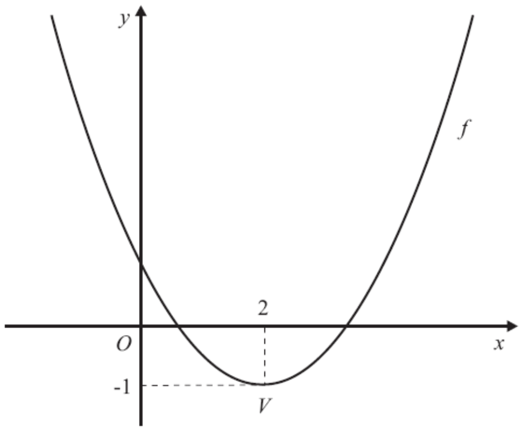


Figura 9

Sabe-se que:

- a parábola intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 1)$
- o ponto V, vértice da parábola, tem coordenadas $(2, -1)$

27.1 Sejam g, h e j as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por
$g(x) = -f(x)$, $h(x) = f(x) + 3$ e $j(x) = f(x-1)$

Indique os contradomínios das funções f, g, h e j

Nota – Não necessita de apresentar cálculos.

27.2 A função f pode ser definida por uma expressão do tipo $f(x) = a(x-h)^2 + k$, onde a, h e k são números reais.

Indique o valor de h e o valor de k, e determine o valor de a

28 Na Figura 10, estão representadas, num referencial o.n. xOy, as retas r e t

Os pontos A e B são, respetivamente, os pontos de intersecção das retas r e t com o eixo Ox

O ponto C é o ponto de intersecção das retas r e t

Sabe-se que:

- a reta r é definida pela equação $x = -1$
- a reta t é definida pela equação $y = -2x + 8$

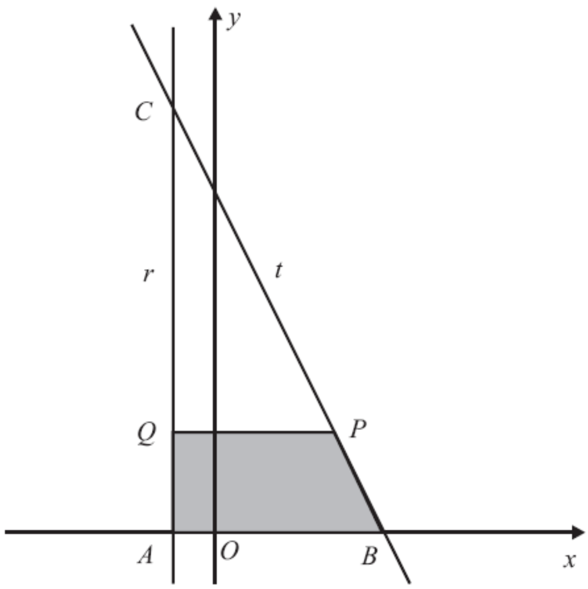


Figura 10

Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta $[BC]$, nunca coincidindo com o ponto B, nem com o ponto C, e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta $[AC]$, acompanhando o movimento do ponto P, de forma que a ordenada do ponto Q seja sempre igual à ordenada do ponto P

Seja x a abcissa do ponto P

Resolva os dois itens seguintes, **usando exclusivamente métodos analíticos**.

28.1 Mostre que a área do trapézio $[ABPQ]$ é dada, em função de x, por

$S(x) = -x^2 - 2x + 24 \quad \left(x \in]-1, 4[\right)$

28.2 Determine os valores de x para os quais a área do trapézio $[ABPQ]$ é superior a 21

Apresente a sua resposta na forma de um intervalo de números reais.

Nota – Tenha em conta que $S(x) = -x^2 - 2x + 24 \quad \left(x \in]-1, 4[\right)$

29. Na Figura 3, estão representadas, num referencial o.n. xOy, duas semirretas de origem no ponto de coordenadas $(-1,\,0)$, cuja união é o gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$

Uma das semirretas intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 1

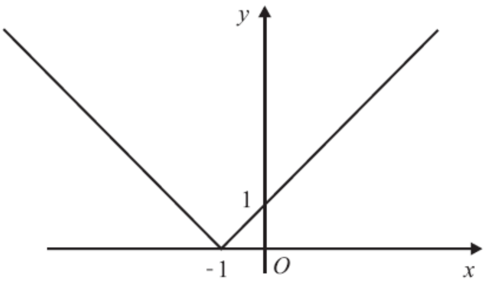


Figura 3

Qual das expressões seguintes pode definir a função h ?

(A) $h(x)=\begin{cases}-x-1 & \text{se } x<0\\ x+1 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

(B) $h(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{se } x<0\\ x-1 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

(C) $h(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{se } x<-1\\ x-1 & \text{se } x\geq -1\end{cases}$

(D) $h(x)=\begin{cases}-x-1 & \text{se } x<-1\\ x+1 & \text{se } x\geq -1\end{cases}$

Soluções: 1.2) 10 *e* 1600; 2.1) $x(x+2)(x^2-5x+7)$; 2.2) $-13,9$; 3) $[-2,-1[\cup]-1,4[$; 4) *D*; 5) *B*;
6) *D*; 7) *A*; 8) *C*; 9) *C*; 10.2) 2 *e* 46; 10.3) 4; 11) *B*; 12) *C*; 13) *D*; 14.1) $]-\infty,-2[\cup]1,4[$; 14.2) $C(6,80)$;
15.1) 9; 15.2) $-12,9$; 16) *D*; 17) *C*; 18) *A*; 19.2) 3 *e* 36; 19.3) $]0,2[\cup]4,6[$; 20) *B*; 21) *D*; 22) 5,1;
23.2) $]1,2[\cup]5,6[$; 24.1) $[-2,3]$; 24.2) $-4,-2,0$; 24.3) $]2,4[\cup]4,6]$; 25) *A*; 26) *A*;
27.1) $[-1,+\infty[$; $]-\infty,1]$; $[2,+\infty[$; $[-1,+\infty[$; 27.2) $h=2$; $k=-1$; $a=0,5$; 28.2) $]-1,1[$; 29) *D*