AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA

Ficha nº 06 – Funções/Limites e Derivadas - 11º ano 2015 a 2020

11. Seja f uma função de domínio IR. Sabe-se que $f'(2)=6$. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-2x}$?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 ***(2015-esp)***

25. Sejam f e g duas funções de domínio IR^+. Sabe-se que a reta de equação y= −x é assíntota oblíqua do gráfico de f e do gráfico de g. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\times g(x)}{x}$?

(A) $+\infty$ (B) 1 (C) −1 (D) $-\infty$ ***(2017-1ª)***

28. Seja $f:IR^+\to IR^+$ uma função tal que $f'(x)<0$, para qualquer número real positivo x. Considere, num referencial o.n. xOy:

- um ponto P, de abcissa *a*, pertencente ao gráfico de f
- a reta r, tangente ao gráfico de f no ponto P
- o ponto Q, ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox

Sabendo que $\overline{OP}=\overline{PQ}$, determine o valor de $f'(a)+\dfrac{f(a)}{a}$ ***(2017-1ª)***

29. De uma função f, de domínio IR, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio, sabe-se que $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{f(x)-f(2)}=4$. Qual é o valor de f '(2)?

$(A)-\dfrac{1}{2}$ $(B)-\dfrac{1}{4}$ $(C)\dfrac{1}{2}$ $(D)\dfrac{1}{4}$ ***(2017-2ª)***

30. Na Figura 1, está representado o gráfico de uma função f , de domínio [−1,6], e, na Figura 2, está representada parte do gráfico de uma função g , de domínio IR. Tal como as figuras sugerem, em ambas as funções, todos os objetos inteiros têm imagens inteiras.

Quais são os zeros da função $g\circ f$?

(A) 0 e 4 (B) 1 e 5 (C) −1 e 3 (D) 2 e 6 ***(2017-2ª)***

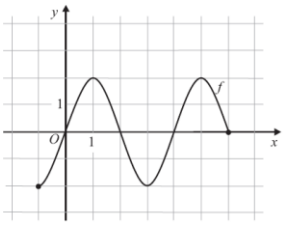


Figura 1

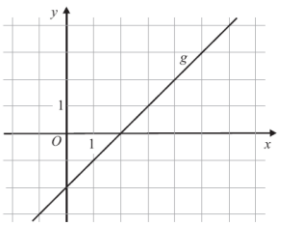


Figura 2

31. Seja f uma função de domínio IR. A tabela de variação de sinal da função f '', segunda derivada de f, está representada ao lado. Seja g a função definida por g(x)= -f(x-5). Em qual dos intervalos seguintes o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo?

x	$-\infty$	-10		0		10	$+\infty$
f''	−	0	+	0	−	0	+

(A)]−15,−5[(B)]0,10[(C)]−5,5[(D)]5,15[***(2017-2ª)***

36. Sejam *f* e *g* duas funções de domínio IR, tais que a função $f-g$ admite inversa.

Sabe-se que $f(3)=4$ e que $(f-g)^{-1}(2)=3$. Qual é o valor de $g(3)$?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 ***(2017-E.Especial)***

43. Seja *f* uma função diferenciável no intervalo $[0,2]$ tal que: $f(0)=1$ e $\forall x\in[0,2],\ 0<f'(x)<9$.

O teorema de Lagrange, aplicado à função *f* em $[0,2]$, permite concluir que:

$(A)\,0<f(2)<18$ $(B)\,1<f(2)<19$ $(C)\,2<f(2)<20$ $(D)\,3<f(2)<21$ **(*2018-1ª fase – Cad 1*)**

52. Seja *g* uma função real, de domínio $[0,1]$. Sabe-se que a função *g* não tem mínimo.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) A função *g* não tem zeros. (B) A função *g* não é limitada.

(C) A função *g* não tem máximo. (D) A função *g* não é contínua. **(*2018-EE - Cad 2*)**

61.

Figura 2

Uma lente de contacto é um meio transparente limitado por duas faces, sendo cada uma delas parte de uma superfície esférica. Na Figura 2, pode observar-se uma lente de contacto. Na Figura 3, está representado um corte longitudinal de duas superfícies esféricas, uma de centro C_1 e raio r_1 e outra de centro C_2 e raio r_2, com $r_2>r_1$, que servem de base à construção de uma lente de contacto, representada a sombreado na figura. Seja $x=\overline{C_1C_2}$. Sabe-se que o diâmetro, *d*, da lente é dado por

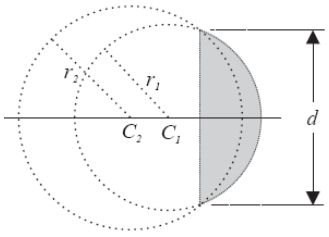


Figura 3

$$\frac{\sqrt{\left[(r_1+r_2)^2-x^2\right]\left[x^2-(r_1-r_2)^2\right]}}{x},\quad com\ \ r_2-r_1<x<\sqrt{r_2^{\,2}-r_1^{\,2}}$$

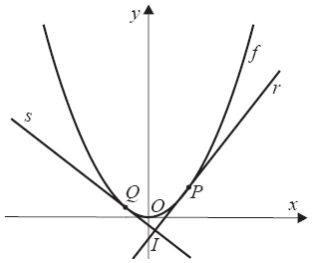
Uma lente de contacto foi obtida a partir de duas superfícies esféricas com 7 mm e 8 mm de raio, respetivamente. O diâmetro dessa lente excede em 9 mm a distância, *x*, entre os centros das duas superfícies esféricas. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de *x*, sabendo-se que esse valor é único no intervalo $\left]r_2-r_1,\sqrt{r_2^{\,2}-r_1^{\,2}}\right[$. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido em milímetros, arredondado às décimas. **(*2019 - 1ª - Cad 1)***

64. Na Figura, está representado o gráfico da função *f*, definida em IR por $f(x)=x^2$

Considere que um ponto *P*, de abcissa positiva, se desloca sobre o gráfico da função *f*. Para cada posição do ponto *P*, seja:

- *r* a reta tangente ao gráfico de *f* nesse ponto;
- *s* a reta perpendicular a *r* e tangente ao gráfico de *f*
- *Q* o ponto de tangência da reta *s* com o gráfico de *f*
- *I* o ponto de intersecção das retas *r* e *s*



Mostre que, qualquer que seja a abcissa do ponto *P*, a ordenada do ponto *I* é sempre igual a $-\frac{1}{4}$. Sugestão: Designe a abcissa do ponto *P* por *a* **(*2019 - 2ª - Cad 2)***

66. Para um certo número real *k*, é contínua em IR a função *f*, definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2+x-2} & se\ x>1\\ k & se\ x\le 1\end{cases}$

Qual é o valor de *k* ?

$(A)\,2$ $(B)\,3$ $(C)\,\frac{1}{3}$ $(D)\,\frac{1}{2}$ **(*2019 - EE - Cad 1)***

67. Sejam *f* e *g* duas funções de domínio IR. Sabe-se que $f(x)=2x+1$ e que $(f\circ g)(x)=7$, para todo o valor real de *x*. Qual das seguintes expressões define a função *g* ?

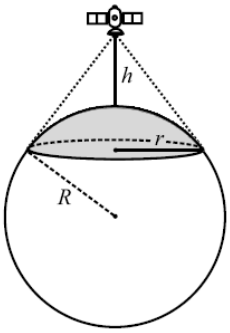
(A) −3 (B) 3 (C) *x* − 3 (D) *x* + 3 **(*2019 - EE - Cad 2)***

74. Seja *f* uma função, de domínio $]0,+\infty[$, cuja derivada, *f ´*, de domínio $]0,+\infty[$, é dada por $f'(x)=\dfrac{2+\ln x}{x}$

b) Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{1-x^2}$?

(A) −2 **(B)** −1 **(C)** 0 **(D)** 2 **(*2020 2ª)***

75. Os satélites artificiais são utilizados para diversos fins e a altitude a que são colocados depende do fim a que se destinam. Admita que a Terra é uma esfera. A Figura apresenta um esquema em que se pode observar a superfície terrestre coberta por um satélite, quando este se encontra numa certa posição. Nesta figura,



- *R* é o raio, em quilómetros, da Terra e *h* é a altitude, em quilómetros, do satélite (*h*>0)
- *r* é o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite (0 < *r* < *R*)
- as grandezas *h* e *r* podem relacionar-se por meio da igualdade $r=\dfrac{R}{h+R}\sqrt{h^2+2hR}$

Sabe-se que, para cada posição do satélite, a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é dada por $50\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}\right)$

a) Qual é a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se o raio da base da calote esférica for igual a $\frac{3}{5}$ do raio da Terra?

(A) 20% **(B)** 15% **(C)** 10% **(D)** 5%

b) Considere que o raio da Terra é 6400 km.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se a altitude deste for igual ao raio da base da respetiva calote esférica. Apresente o resultado arredondado às unidades. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

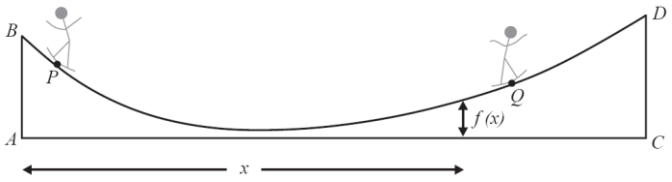
– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;

– apresente o valor pedido arredondado às unidades.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais. **(*2020 2ª)***

76. Um município construiu, num dos seus parques, uma rampa de *skate* entre duas paredes verticais distanciadas 21 metros uma da outra. Na figura ao lado, estão representados um corte longitudinal da rampa e dois jovens, cada um no seu *skate*. Nesta figura, o arco *BD* representa a rampa, os segmentos de reta [*AB*] e [CD] representam as paredes e o segmento de reta [AC] representa o solo. Os pontos *P* e *Q* representam as posições dos dois jovens na rampa. Admita que a distância ao solo, em metros, de um ponto da rampa situado *x* metros à direita da parede representada na figura por [AB] é dada por $f(x) = 0,0001x^4 - 0,005x^3 + 0,11x^2 - x + 3,4 \quad , \quad 0 \le x \le 21$



a) Qual é, em metros, com arredondamento às décimas, o valor absoluto da diferença entre as alturas das duas paredes da rampa de *skate*?

(A) 0,8 **(B)** 0,7 **(C)** 0,5 **(D)** 0,4

b) Num certo instante, os dois jovens estão à mesma distância do solo, um mais próximo da parede representada por [AB] e o outro mais próximo da parede representada por [CD]. O jovem que se encontra mais próximo da parede representada por [AB] está a um metro desta parede. Seja *d* a distância a que se encontra da parede representada por [CD] o jovem que dela está mais próximo. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de *d*, sabendo-se que esse valor existe e é único. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;

– apresente o valor de *d* em metros, arredondado às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais. ***(2020 esp)***

$Sol: (1)B\ (2)A\ (3.a)4,19\ (3.b)25\ (4.a)Não\ tem\ (4.b)\cap em\ \left]\frac{1}{2},1\right[\ ;\cup em\ ]1,+\infty[\ ;PI\ (1,0)\ (4.c)2,41\ (5)D\ (6)A$

$(7.a)\ y=0\ e\ y=1\ (7.b)\ ]-\infty,0[\ \cup\ ]\ln 2,3]\ (7.c)\ y=\frac{3}{4}x-3-\ln 4\ (9.a)11\ (10.a)\ y=0\ (10.b)\ \nearrow em\ [0,2];$

$\searrow em\ [2,+\infty[\ ;\min=0\ para\ x=0;\max=\frac{4}{e}\ para\ x=2\ (10.c)2,92\ (11)A\ (12)C\ (13)C\ (14)B\ (15)D\ (16)B$

$(17.a)\ p=\frac{1}{e};q=-e\ (17.b)\cap em\ ]-2,-1[\ ;\cup em\ ]-\infty,-2[\ e\ em\ ]-1,+\infty[\ ;PI\ para\ x=-2\ e\ para\ x=-1$

$(18.a)x=1\ e\ x=-1\ (19)\ B\ (20)A\ (21.a)Não\ tem\ (21.b)-1,19\ e-0,17\ (22.a)26\ (22.b)\ \frac{600}{n}\ (24)D\ (25)A$

$(26.1)1,5\ (26.2)Não\ (máx=4)\ (27.1)Cont\ em\ x=1\ (27.2)1+\pi\ (27.3)-3,3\ (28)0\ (29)C\ (30)B\ (31)C$

$(32.1)x=0\ e\ y=0\ (32.2)\ \left]\frac{1}{2},1\right[\ (32.3)1\ (33)B\ (34a)\ln 2\ (34b)-35\ (35)A\ (36)B\ (37a)0\ (37b)0,72\ (38)C\ (39)D$

$(40)B\ (42a)50\ (42b)80\ (43)B\ (44)0,075\ (45)D\ (46)[-2,0[\cup[2,+\infty[\ (47a)A\ (47b)sim\ (49)D\ (50)]-1,0]\cup[7,8[$

$(51a)2\ (51b)\ y=0\ e\ y=3\ (51c)C\ (52)D\ (53)C\ (54)PI\ (1,1);\cap em]0,1];\cup em[1,+\infty[\ (55)18,7\ (56)C$

$(57a)\ \nearrow]-\infty,-1]\ \searrow[-1,0[\ e\ em]0,+\infty[;Max=-e\ para\ x=-1\ (57b)B\ (58)C\ (59)D\ (60)C\ (61)1,4\ (62)50$

$(63a)x=1\ e\ y=0\ (63b)\{0;\ln 2\}\ (65)1,8\ (66)C\ (67)B\ (68)C\ (69a)A\ (69b)\ y=-3x+1\ (70a)\ y=x\ (70b)-\ln(e-1)$

$(70c)C\ (71)A\ (72)A\ (73)\ y=1\ (74a)PI\ para\ x=\frac{1}{e};\cap em\left[\frac{1}{e},+\infty\right[\ ;\cup em\ \left]0,\frac{1}{e}\right]\ (74b)B\ (75a)C\ (75b)23\%\ (76a)B$

$(76b)2,7$