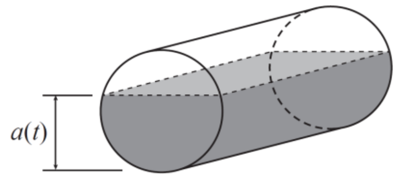
3. A Figura representa um depósito de forma cilíndrica, instalado na horizontal, que contém uma certa quantidade de combustível. Sabe-se que as bases do cilindro têm 1,8 metros de diâmetro. Num certo instante, iniciou-se o vazamento do depósito.



Seja $a(t)$ a altura, em metros, do combustível no depósito, *t* minutos após o início do vazamento. Admita que $a(t)=1{,}8-(0{,}216+0.0039\,t)^{\frac{2}{3}}$

a) Qual é, em metros, a diferença entre a altura do combustível no depósito no início do vazamento e a altura do combustível quando este ocupa metade da capacidade do depósito?

(A) 0,72 (B) 0,54 (C) 0,36 (D) 0,27

b) Decorridos t_1 minutos após o início do vazamento, a altura do combustível no depósito é igual a um certo valor. Sabe-se que, passado igual período de tempo, a altura do combustível no depósito é igual a metade desse valor. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_1, sabendo que esse valor existe e é único. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades). Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

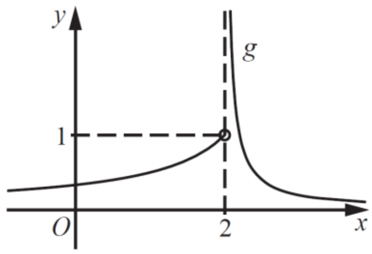
- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas.
  Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

(2021 1ª)

5. Na figura está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $IR\setminus\{2\}$.

A reta de equação $x=2$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função g.

Seja v_n a sucessão de termo geral $v_n=2-\dfrac{5}{n+3}$. A que é igual $\lim g(v_n)$?



$(A)\ 0$ $(B)1$ $(C)\ 2$ $(D)\ +\infty$ ***(2021 2ª)***

6. Seja f a função definida por $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}-3\quad se\ x\geq 0$

Resolva o item a) sem recorrer à calculadora.

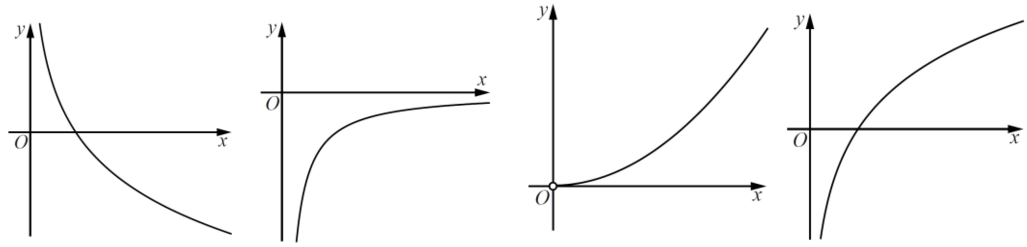
a) Estude a função *f* quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso estas existam, escreva as respetivas equações. ***(2021 2ª adap)***

8. Resolva este item sem recorrer à calculadora. Considere, para um certo número real *k*, a função g, de domínio $IR\setminus\{0\}$, definida por $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{x^2-x}+k & \text{se } x<0\\ 2 & \text{se } x>0\end{cases}$.

Sabe-se que existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$. Determine o valor de k. ***(2021 2ª adap)***

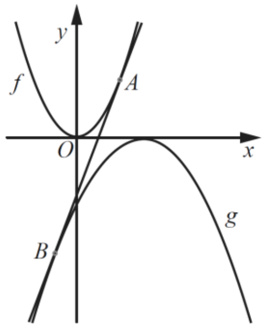
10. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = 2n^2 - n$. Em relação a uma certa função *f*, de domínio IR^+, sabe-se que $\lim f\left(\frac{1}{u_n}\right) = +\infty$. Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função *f* ?

(A) (B) (C) (D)



(2021 esp)

15*. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy, partes dos gráficos das funções *f* e *g*, ambas de domínio *IR*, definidas, respetivamente, por $f(x) = 2x^2$ e $g(x) = -(x-1)^2$ e a única reta não horizontal que é tangente, simultaneamente, ao gráfico de *f* e ao gráfico de *g*.
Seja A o ponto de tangência dessa reta com o gráfico de *f* e seja B o ponto de tangência dessa mesma reta com o gráfico de *g*.
Determine, sem recorrer à calculadora, as abcissas dos pontos A e B. ***(2021 esp)***

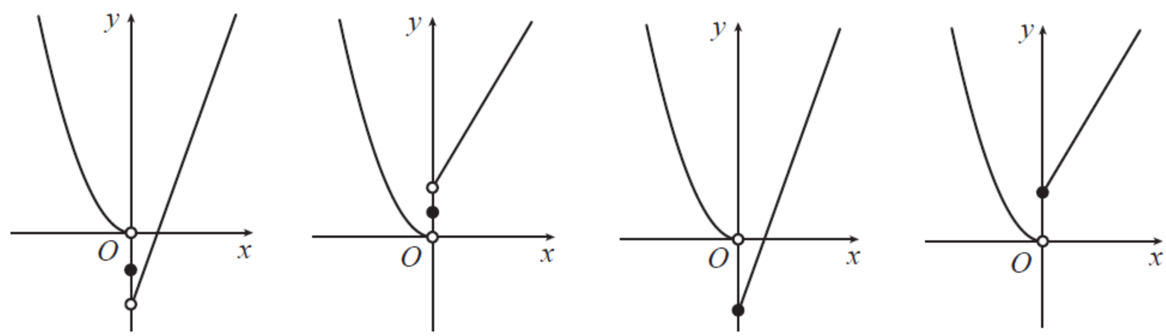


20*. Seja *k* um número real não nulo, e seja *f* a função definida, em IR^+, por $f(x) = \frac{k}{x}$

Considere dois pontos do gráfico de *f*, *A* e *B*, sendo *A* o de menor abcissa. Considere, também, o ponto desse gráfico em que a reta tangente ao gráfico é paralela à reta *AB*. Mostre que, para qualquer valor de *k*, as abcissas dos três pontos são termos consecutivos de uma progressão geométrica. ***(2022 1ª)***

21. Em qual das opções seguintes está representada graficamente, em referencial o.n. *Oxy*, uma função que tem um mínimo em *x* = 0 ?

(A) **(B)** **(C)** **(D)**



(2022 2ª)

24. Um tanque, que inicialmente tinha um certo volume de água salgada, dispõe de duas torneiras, uma de enchimento e outra de vazamento. As duas torneiras são abertas, em simultâneo, sendo vertida água do mar para o tanque até este estar cheio. Admita que a massa de sal, *m* , em quilogramas, no tanque, *t* minutos após a abertura das torneiras, até o tanque estar cheio, é dada por

$$m(t) = \frac{30(1+0{,}006t)^3 - 29}{(1+0{,}006t)^2} \quad , \; com \; t \in [0, 250]$$

a) Qual é, com aproximação às unidades, a percentagem de aumento da massa de sal no tanque, no primeiro minuto após a abertura das torneiras?

(A) 152% **(B)** 52% **(C)** 250% **(D)** 25%

b) Existe um instante a partir do qual, passada meia hora, a massa de sal no tanque triplica. Determine, recorrendo à calculadora, esse instante, sabendo-se que existe e é único. Apresente o resultado em minutos e segundos (com os segundos arredondados às unidades). Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.
Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

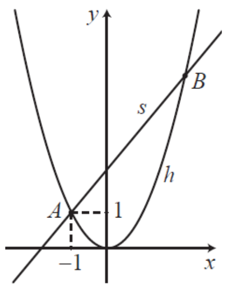
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às centésimas. ***2022 2ª***

25. Seja *a* um número real.

Considere a função polinomial definida, em IR, por $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+a^2x+\sqrt{2}$. Mostre que, para qualquer valor de *a*, a função não tem extremos. ***2022 2ª***

26*. Considere, num referencial o.n. Oxy, o gráfico da função *f*, de domínio IR, definida por $f(x)=x^2$, e uma reta r, não vertical, que passa no ponto de coordenadas (0,1). Sejam A e B os pontos de interseção da reta r com o gráfico da função *f*. Mostre que o ângulo convexo *AOB* é um ângulo reto. ***2022 2ª***

30. Na figura, estão representadas, em referencial o.n. *Oxy*, parte do gráfico de uma função, *h*, e uma reta, *s* . Sabe-se que:



- a função *h* , de domínio IR , é definida por $h(x)=x^2$
- a reta *s* tem declive positivo, *m* , e interseta o gráfico da função *h* nos pontos *A* e *B*
- o ponto *A* tem coordenadas (-1,1)

a) Qual das expressões seguintes representa a ordenada na origem da reta *s* ?

(A) $m+1$ **(B)** $m+2$ **(C)** $(m+1)^2$ **(D)** $(m+2)^2$

b) Sabe-se que as coordenadas do ponto *B* são da forma $\left(m+1,(m+1)^2\right)$. Considere o ponto *C*, projeção ortogonal do ponto *B* sobre o eixo *Oy*. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de *m* para o qual a área do triângulo [*ABC*] é igual a 4, sabendo-se que existe e é único. Apresente o valor de *m* arredondado às centésimas. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.
Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita obter o valor de *m*;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às milésimas.

2022 esp

38. Sejam *f* e *g* funções duas vezes diferenciáveis, de domínios IR e $]0,+\infty[$, respetivamente, e seja *r* a reta de equação $y=2x-1$. Sabe-se que:

- a reta *r* é tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa 1
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x+1\right)=0$
- nos respetivos domínios, o gráfico de *f* tem concavidade voltada para cima e o gráfico de *g* tem concavidade voltada para baixo.

Considere as proposições seguintes.

I. O gráfico da função *f* admite uma assíntota horizontal quando *x* tende para $+\infty$

II. $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=2$

III. $f''(x)<g''(x), \forall x\in]0,+\infty[$

Justifique que as proposições **I**, **II** e **III** são falsas. Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade. ***(2023 1ª)***

39[*]. Sejam a e b números reais, não nulos, tais que a reta de equação $y = ax+b$ é tangente ao gráfico da função f , de domínio R , definida por $f(x) = ax^2+bx$. Determine as coordenadas do ponto de tangência. ***(2023 1ª)***

40. Seja (u_n) uma sucessão tal que lim $u_n = 0$.

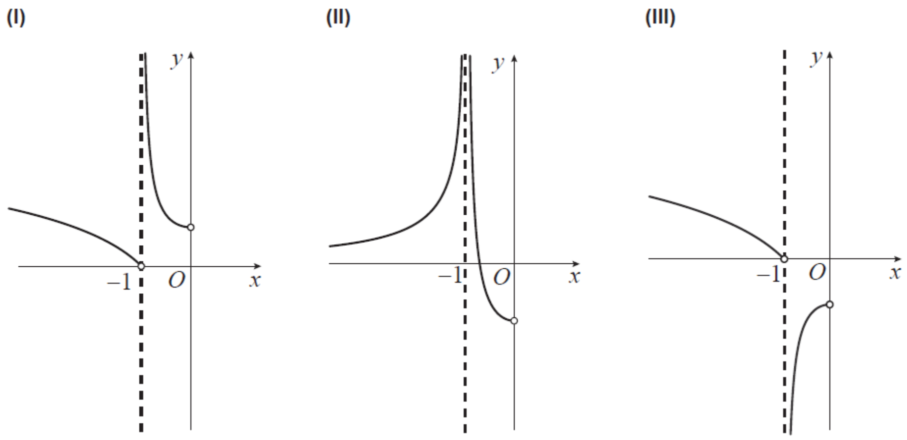
Qual das expressões seguintes pode ser termo geral de (u_n) ?

$(A)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n$ $\qquad (B)-\dfrac{n^2+1}{n}$ $\qquad (C)\dfrac{4n+3}{3n+4}$ $\qquad (D)\dfrac{(-1)^n}{n}$ ***(2023 2ª)***

42. Seja g uma função par, diferenciável, de domínio $IR\setminus\{-1,1\}$, tal que:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$
- $g(0) < 0$
- $g'(x) < 0, \forall x \in]-\infty,-1[$

Em cada um dos referenciais o.n. *Oxy* ao lado, **I**, **II** e **III**, estão representadas parte do gráfico de uma função e a assíntota a esse gráfico, de equação x=-1.



Justifique que em nenhum dos referenciais, **I**, **II** e **III**, pode estar representada parte do gráfico da função g em $]-\infty,0[\setminus\{-1\}$. Na sua resposta, apresente, para cada um dos referenciais, uma razão que justifique a impossibilidade de nele estar representada parte do gráfico da função g em $]-\infty,0[\setminus\{-1\}$. ***(2023 2ª)***

43. Para fazer obras de remodelação das instalações, uma pequena empresa pretende pedir um empréstimo a um banco, a pagar em prestações mensais iguais. De acordo com a proposta do banco, o valor da prestação mensal a pagar, p, em euros, é dado, em função da taxa de juro anual aplicada, j, em percentagem, pela expressão

$$p(j) = \frac{62,5j}{1-\left(1+\dfrac{j}{200}\right)^{-120}} \text{ , com } j>0$$

Sabe-se que, no caso de a taxa de juro anual inicial duplicar, a prestação mensal aumentará 120 euros. Determine, utilizando a calculadora gráfica, a taxa de juro anual inicial. Apresente o resultado em percentagem, arredondado às milésimas. Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação. ***(2023 2ª)***

45[*]. Considere as funções f e g, de domínio $]0,+\infty[$, definidas por $f(x)=\dfrac{k}{x}$ e por $g(x)=-\dfrac{k}{x}$, com k>0.

Considere ainda:

- dois pontos P e Q , com a mesma abcissa, pertencentes, respetivamente, ao gráfico da função f e ao gráfico da função g;
- a reta s, tangente ao gráfico da função f no ponto P;
- a reta t, tangente ao gráfico da função g no ponto Q;
- o ponto R, ponto de interseção das retas s e t.

Mostre que, qualquer que seja a abcissa dos pontos P e Q, a área do triângulo [PQR] é igual a k. ***(2023 2ª)***

46. Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão monótona?

$(A)\left(n-5\right)^2$ $\quad (B)\dfrac{\left(-1\right)^n}{n+3}$ $\quad (C)\left(-2\right)^n$ $\quad (D)\dfrac{1}{n}$ ***(2023 esp)***

51*. Considere uma função, *h*, de domínio IR, definida por $h(x)=ax^2$, com $a\neq 0$, e dois pontos, *A* e *B*, do seu gráfico. Mostre que o ponto de interseção das retas tangentes ao gráfico de *h* nos pontos *A* e *B* pertence à reta vertical que contém o ponto médio do segmento de reta [*AB*]. ***(2023 esp)***

$Sol:(1a)cont(1b)\nearrow\left]0,\frac{1}{e}\right]\searrow\left[\frac{1}{e},1\right[\ \max relat=\frac{1}{e^2}\ para\ x=\frac{1}{e}(2)y=\frac{1}{2}x(3a)B(3b)2h58m(4)1-e(5)B(6a)y=-2(6b)y=-\frac{e^2}{4}x+1$

$(7a)C(7b)28m09s(8)1(9)\left\{\frac{1}{2}\right\}(10)A(11)\nearrow\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\searrow\left[\frac{1}{2},1\right[\ \max relat=-\frac{3}{2}+\ln 2\ para\ x=\frac{1}{2}(12a)D(12b)2h05m(13)y=0;y=1$

$(14)\left[-2;0\right]\cup\left[\ln 4;2\right](15)x_A=\frac{2}{3};x_B=-\frac{1}{3}(16)\nearrow\left]-\infty,-3\right]\searrow\left[-3,-2\right[\max relat=-e^5\ para\ x=-3(17a)A(17b)7,9(18)x=1$

$(19)\left\{0;2\right\}(21)C(22)-\ln 3(23)x=0;y=1(24a)B(24b)10m21s(27)C(28)cont(29a)y=-x;y=0(30a)A(30b)1,17$

$(31)\cup\left]-\infty,\frac{1}{3}\right];\cap\left[\frac{1}{3},+\infty\right[\ PI\ para\ x=\frac{1}{3}(32)\left\{\frac{1}{3}\right\}(33)\left[2-\ln 4;+\infty\right[(34)C(35)\cup em\left]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]e\ em\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[;$

$\cap em\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right];PI\ para\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ e\ para\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}(36a)sim(36b)2(37)1,8(39)(1,0)(40)D(41)3;\ln 2(43)3,281\%(44a)x=0;y=2$

$(44b)\nearrow\left]0,e\right]\searrow\left[e,+\infty\right[;máx\ rel=2+\frac{1}{e}\ para\ x=e(46)D(47a)2(47b)y=x+2+\ln 2(48)B(49a)\nearrow\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\searrow\left[\frac{\pi}{4},\pi\right[;$

$\max relat=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\ para\ x=\frac{\pi}{4};\min relat=1\ para\ x=0(50)\frac{\ln 2}{2}$