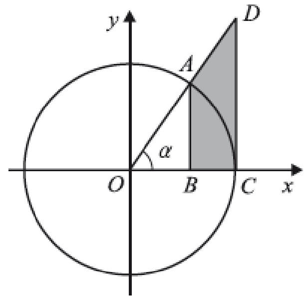
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA

Ficha de Trabalho nº 5 - Trigonometria - 12º ano   2015 a 2024

1. Na figura, está representado o círculo trigonométrico. Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
- o ponto B pertence ao eixo Ox;
- o ponto C tem coordenadas (1, 0);
- o ponto D pertence à semirreta $\dot{O}A$;
- os segmentos de reta [AB] e [DC] são paralelos ao eixo Oy.



Seja α a amplitude do ângulo COD $\left(\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$. Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero [ABCD], representado a sombreado, em função de α ?

$(A)\frac{tg\alpha}{2}-\frac{\sin(2\alpha)}{2}$ $(B)\frac{tg\alpha}{2}-\frac{\sin(2\alpha)}{4}$ $(C)tg\alpha-\frac{\sin(2\alpha)}{4}$ $(D)tg\alpha-\frac{\sin(2\alpha)}{2}$ ***(2015-1ª)***

2. Sejam *f* e *g* as funções, de domínio *IR*, definidas, respetivamente, por $f(x)=1-\cos(3x)$ e $g(x)=sen(3x)$.

Seja *a* um número real pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$. Considere as retas *r* e *s* tais que:

- a reta *r* é tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa *a*;
- a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $a+\frac{\pi}{6}$.

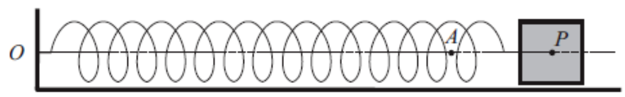
Sabe-se que as retas *r* e *s* são perpendiculares. Mostre que $\sin(3a)=-\frac{1}{3}$.   ***(2015-1ª)***

3. Seja *f* a função, de domínio *IR*, definida por $f(x)=3\sin^2(x)$. Qual das expressões seguintes define a função *f* ´´, segunda derivada de *f*?

$(A)6\text{sen}(2x)\cos(x)$ $(B)6\text{sen}(x)\cos(2x)$ ***(2015-2ª)***

$(C)6\cos(2x)$ $(D)6\text{sen}(2x)$

4. Um cubo encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica exercida por uma mola. A Figura esquematiza esta situação. Nesta figura, os pontos O e A são pontos fixos. O ponto P representa o centro do cubo e desloca-se sobre a semirreta $\dot{O}A$. Admita que não existe qualquer resistência ao movimento. Sabe-se que a distância, em metros, do ponto P ao ponto O é dada por $d(t)=1+\frac{1}{2}sen\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$. A variável *t* designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo $\left(t\in\left[0,+\infty\right[\right)$.



Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.

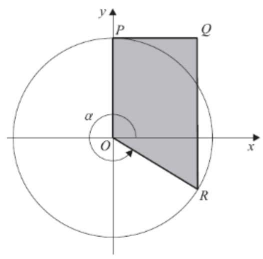
a) No instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto P coincidia com o ponto A. Durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A mais do que uma vez. Determine os instantes, diferentes do inicial, em que tal aconteceu. Apresente os valores exatos das soluções, em segundos.

b) Justifique, recorrendo ao teorema de Bolzano, que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a 1,1 metros.   ***(2015-2ª)***

5. Seja *a* um número real. Considere a função *f*, de domínio *IR*, definida por $f(x)=a\,sen(x)$. Seja *r* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa $\frac{2\pi}{3}$. Sabe-se que a inclinação da reta *r* é igual a $\frac{\pi}{6}$ radianos. Determine o valor de *a*.

(2015-Especial)

6. Na figura, estão representados o círculo trigonométrico e um trapézio retângulo [OPQR]. Sabe-se que:



- o ponto *P* tem coordenadas (0,1)
- o ponto *R* pertence ao quarto quadrante e à circunferência.

Seja α a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo *Ox* e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}R$. Qual das expressões seguintes dá a área do trapézio [OPQR], em função de α ?

$(A)\frac{\cos\alpha}{2}+sen\alpha\cos\alpha$ $(B)\frac{\cos\alpha}{2}-sen\alpha\cos\alpha$ $(C)\cos\alpha+\frac{sen\alpha\cos\alpha}{2}$ $(D)\cos\alpha-\frac{sen\alpha\cos\alpha}{2}$ ***(2016-1ª)***

7. Num dia de vento, são observadas oscilações no tabuleiro de uma ponte suspensa, construída sobre um vale. Mediu-se a oscilação do tabuleiro da ponte durante um minuto. Admita que, durante esse minuto, a distância de um ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale é dada, em metros, por

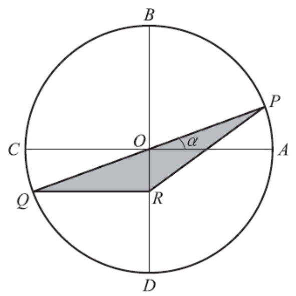
$h(t)=20+\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)+tsen(2\pi t)$ (t é medido em minutos e pertence a [0,1])

a) Sejam M e m, respetivamente, o máximo e o mínimo absolutos da função h no intervalo [0,1]. A amplitude A da oscilação do tabuleiro da ponte, neste intervalo, é dada por A=M-m. Determine o valor de A, recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos. Apresente o resultado em metros.

b) Em [0,1], o conjunto solução da inequação h(t)<19,5 é um intervalo da forma]a,b[. Determine o valor de b-a arredondado às centésimas, recorrendo à calculadora gráfica, e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita. Na sua resposta:

- reproduza o gráfico da função h visualizado na calculadora (sugere-se que, na janela de visualização, considere $y\in[19,21]$) ;
- apresente o valor de a e o valor de b arredondados às milésimas;
- apresente o valor de b-a arredondado às centésimas;
- interprete o valor obtido no contexto da situação descrita. ***(2016-1ª)***

8. Na figura, está representada uma circunferência de centro no ponto *O* e raio 1. Sabe-se que:



- os diâmetros [AC] e [BD] são perpendiculares;
- o ponto *P* pertence ao arco *AB*
- [PQ] é um diâmetro da circunferência;
- o ponto *R* pertence a [OD] e é tal que [QR] é paralelo a [AC]

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo *AOP* $\left(\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$. Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo [PQR], representado a sombreado, em função de α ?

$(A)\frac{\cos(2\alpha)}{4}$ $(B)\frac{sen(2\alpha)}{4}$ $(C)\frac{\cos(2\alpha)}{2}$ $(D)\frac{sen(2\alpha)}{2}$ ***(2016-2ª)***

9. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$, definida por $f(x)=\begin{cases}\frac{2+senx}{\cos x} & se\ -\frac{\pi}{2}<x\leq 0\\ x-\ln x & se\ x>0\end{cases}$

Resolva os itens 9.a. e 9.b. recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntota oblíqua do seu gráfico.

b) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$

c) Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$. Além do ponto de tangência, a reta r intersecta o gráfico de f em mais dois pontos, A e B, cujas abcissas pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ (considere que o ponto A é o de menor abcissa). Determine analiticamente a equação reduzida da reta r e, utilizando a calculadora gráfica, obtenha as abcissas dos pontos A e B. Apresente essas abcissas arredondadas às centésimas. Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema. ***(2016-2ª)***

10. Seja f a função, de domínio A e contradomínio $]-1,+\infty[$, definida por f(x)=tg x. Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto A?

$(A)\ \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\qquad (B)\ \left]\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[\qquad (C)\ \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right[\qquad (D)\ \left]\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[$ ***(2017-1ª)***

11. Seja g a função, de domínio IR, definida por $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & se\,x<1\\ 2 & se\,x=1\\ 3+\dfrac{\sin(x-1)}{1-x} & se\,x>1\end{cases}$

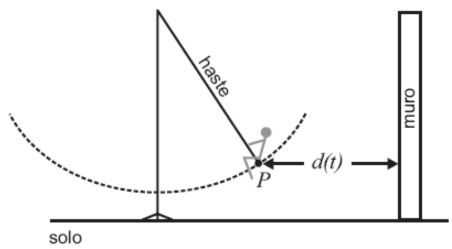
Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

11.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 1.

11.2. Resolva, no intervalo]4,5[, a equação g(x)=3. ***(2017-1ª)***

12. Considere o desenvolvimento de $\left(2xsen\alpha+\frac{\cos\alpha}{x}\right)^2$, *em que* $\alpha\in IR$ *e* $x\neq 0$. Determine os valores de α, pertencentes ao intervalo $]\pi,2\pi[$, para os quais o termo independente de x, neste desenvolvimento, é igual a 1. Resolva este item recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. ***(2017-2ª)***

13. Num jardim, uma criança está a andar num baloiço cuja cadeira está suspensa por duas hastes rígidas. Atrás do baloiço, há um muro que limita esse jardim. A figura esquematiza a situação. O ponto P representa a posição da cadeira. Num determinado instante, em que a criança está a dar balanço, é iniciada a contagem do tempo. Doze segundos após esse instante, a criança deixa de dar balanço e procura parar o baloiço arrastando os pés no chão. Admita que a distância, em decímetros, do ponto P ao muro, t segundos após o instante inicial, é dada por



$d(t)=\begin{cases}30+tsen(\pi t) & se\ 0\leq t<12\\ 30+12e^{12-t}sen(\pi t) & se\ t\geq 12\end{cases}$ (o argumento da função seno está expresso em radianos)

13.1. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o número de soluções da equação d(t)=27 no intervalo [0,6], e interprete o resultado no contexto da situação descrita. Na sua resposta, reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema.

13.2. Admita que, no instante em que é iniciada a contagem do tempo, as hastes do baloiço estão na vertical e que a distância do ponto P ao chão, nesse instante, é 4 dm. Treze segundos e meio após o instante inicial, a distância do ponto P ao chão é 4,2 dm. Qual é o comprimento da haste? Apresente o resultado em decímetros, arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

(2017-2ª)

14. Seja f a função definida por $f(x)=1+\arccos(-2x)$. Quais são, respetivamente, o domínio e o contradomínio desta função?

$(A)\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]e[1\,,1+\pi]\qquad (B)\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]e[0,\pi]\qquad (C)[-2,2]e[0,\pi]\qquad (D)[-2,2]e[1\,,1+\pi]$

(2018-exemplo IAVE)

15. Um ponto P desloca-se numa reta numérica durante um intervalo de tempo I, de tal forma que a respetiva abcissa é dada por $x(t)=4\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{5}\right)$, com $t\in I$. Qual é a frequência deste oscilador?

$(A)\frac{1}{3}\qquad (B)\frac{1}{4}\qquad (C)\frac{1}{5}\qquad (D)\frac{1}{6}$ ***(2018-exemplo IAVE)***

16. Seja *f* a função, de domínio $]1-\pi,+\infty[$, definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-2}{sen(x-1)} & \text{se } 1-\pi<x<1\\ 2 & \text{se } x=1\\ e^{-2x+4}+\ln(x-1) & \text{se } x>1\end{cases}$

Resolva os itens **a)** e **b)** recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Indique, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou é falsa.

«A função *f* é contínua à esquerda no ponto 1, mas não é contínua à direita nesse ponto.»

b) Escreva a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa $1-\dfrac{\pi}{2}$.

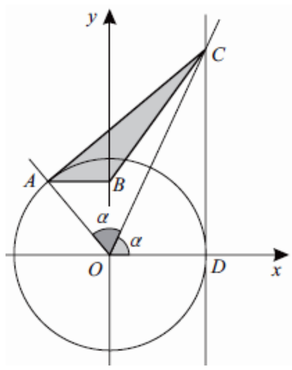
c) O gráfico da função *f* tem um único ponto de inflexão, cuja abcissa pertence ao intervalo $]1,2[$.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa desse ponto. Na sua resposta:

• reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema;

• apresente a abcissa do ponto de inflexão arredondada às centésimas. ***(2017-EE)***

17. Na figura está representada, num referencial o.n. *xOy*, a circunferência de centro na origem e raio 1. Sabe-se que:



- os ângulos *AOC* e *COD* são geometricamente iguais e cada um deles tem amplitude α $\left(\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right[\right)$
- o ponto *A* está no segundo quadrante e pertence à circunferência;
- o ponto *D* tem coordenadas $(1,0)$;
- o ponto *C* pertence ao primeiro quadrante e tem abcissa igual à do ponto *D*;
- o ponto *B* pertence ao eixo *Oy* e o segmento de reta [AB] é paralelo ao eixo *Ox*;

Mostre que a área do triângulo [ABC], representado a sombreado, é dada por $\dfrac{tg\alpha\ \cos^2(2\alpha)}{2}$ ***(2017-EE)***

18. Qual é o valor de $\operatorname{arcsen}(1)+\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$?

$(A)\dfrac{7\pi}{6}$ $(B)\dfrac{\pi}{6}$ $(C)\dfrac{3\pi}{4}$ $(D)\dfrac{\pi}{4}$

(2018-1ª fase-Cad 2)

19. Seja *g* a função, de domínio $]-\infty,\pi]$, definida por $g(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{4x} & \text{se } x<0\\ \dfrac{1}{2-sen(2x)} & \text{se } 0\le x\le\pi\end{cases}$

a) Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função *g* não tem zeros.

(B) A função *g* tem um único zero.

(C) A função *g* tem exatamente dois zeros.

(D) A função *g* tem exatamente três zeros.

b) Averigue se a função *g* é contínua no ponto 0. Justifique a sua resposta.

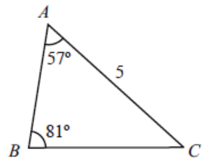
c) Estude a função *g* quanto à monotonia no intervalo $]0,\pi]$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

(2018-1ª fase-Cad 2)

20. Considere a função *f* definida em $\left]0,\ \pi\right[$ por $f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{sen}(x)}$. Qual das equações seguintes define uma assíntota do gráfico de *f*?

$(A)\, x=0$ $\qquad (B)\, x=\pi$ $\qquad (C)\, x=1$ $\qquad (D)\, x=\dfrac{\pi}{2}$ ***(2018-1ª fase-Cad 2)***

21. Na figura está representado um triângulo [ABC].

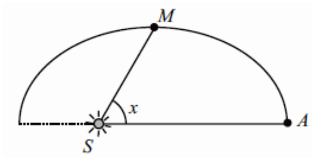


Sabe-se que $\overline{AC}=5,\ B\hat{A}C=57^{\circ}$ e $A\hat{B}C=81^{\circ}$.

Qual o é o valor de $\overline{AB}$, arredondado às centésimas?

(A) 3,31 (B) 3,35 (C) 3,39 (D) 3,43 ***(2018-2ª fase-Cad 1)***

22. O planeta Mercúrio descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na figura está representado um esquema de uma parte dessa órbita. Relativamente a esta figura, tem-se que:



- o ponto *S* representa o Sol; o ponto *M* representa o planeta Mercúrio;
- o ponto *A* representa o afélio, que é o ponto da órbita mais afastado do Sol;
- *x* é a amplitude do ângulo *ASM*, compreendida entre 0 e 180 graus.

Admita que a distância, *d*, em milhões de quilómetros, do planeta Mercúrio ao Sol é dada, em função de *x*, por $d=\dfrac{555}{10-2,06\cos x}$. Seja α a amplitude do ângulo *ASM*, num certo instante (α está compreendido entre 0 e 20 graus). Nesse instante, o planeta Mercúrio encontra-se a uma certa distância do Sol. Passado algum tempo, a amplitude do ângulo *ASM* é três vezes maior e a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α, sabendo-se que esse valor existe e é único. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de *a* em graus, arredondado às unidades. ***(2018-2ª fase-Cad 1)***

23. A primeira derivada de uma função *f*, de domínio $\left]0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ é dada por $f\,'(x)=3x-tg\,x$. Sabe-se que o gráfico de *f* tem um único ponto de inflexão. Qual é a abcissa desse ponto, arredondada às centésimas?

(A) 0,84 (B) 0,88 (C) 0,92 (D) 0,96 ***(2018-2ª fase-Cad 1)***

24. Seja *g* a função, de domínio $\left[0,\pi\right]$, definida por $g(x)=2\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}^2 x$. Seja *r* a reta tangente ao gráfico da função *g* que tem declive máximo. Determine o declive da reta *r*. Apresente a sua resposta na forma $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$, com *a*, *b* e *c* números naturais. ***(2018-2ª fase-Cad 2)***

25. Um ponto P desloca-se numa reta numérica, no intervalo de tempo $I=\left[0,\ 4\right]$ (medido em segundos), de tal forma que a respetiva abcissa é dada por $x(t)=sen(\pi t)+\cos(\pi t),\ \text{com } t\in I$.

Qual é a amplitude deste oscilador harmónico?

$(A)1$ $\qquad (B)\sqrt{2}$ $\qquad (C)\sqrt{3}$ $\qquad (D)2$ ***(2018-EE-Cad 1)***

26. Seja *h* a função, de domínio $\left[-\frac{\pi}{3}, +\infty\right[$, definida por $h(x)=\begin{cases} \frac{sen^2 x}{sen(x^2)} & \text{se } -\frac{\pi}{3} \le x < 0 \\ \frac{e^x}{x+1} & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$

a) Mostre que a função *h* é contínua no ponto 0.

b) Estude a função *h* quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

c) Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A função *h* é estritamente decrescente em $[0,+\infty[$ **(B)** A função *h* é estritamente crescente em $[0,+\infty[$

(C) A função *h* tem um máximo para $x=1$ **(D)** A função *h* tem um mínimo para $x=1$

(2018-EE-Cad 2)

27. Considere a função *f*, definida em $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ por $f(x)=\cos x$. Qual dos seguintes cojuntos é o contradomínio da função *f*?

$(A)\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ $(B)\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$ $(C)\left[\frac{1}{2},1\right]$ $(D)\left[0,\frac{1}{2}\right]$ ***(2018-EE-Cad 2)***

28. Qual é a solução da equação $2\cos x+1=0$ no intervalo $[-\pi,0]$?

$(A)-\frac{5\pi}{6}$ $(B)-\frac{2\pi}{3}$ $(C)-\frac{\pi}{3}$ $(D)-\frac{\pi}{6}$ ***(2019-1ª fase-Cad 2)***

29. Um ponto *P* desloca-se numa reta numérica, no intervalo de tempo I=[0,10] (medido em segundos), de tal forma que a respetiva abcissa é dada por $x(t)=3\cos\left(\pi t+\frac{2\pi}{3}\right)$, com $t \in I$. Qual é o período, em segundos, deste oscilador harmónico?

$(A)2$ $(B)3$ $(C)2\pi$ $(D)3\pi$ ***(2019-1ª fase-Cad 2)***

30. Seja f a função, de domínio IR, definida por $f(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & se\ x<0 \\ 0 & se\ x=0 \\ \frac{x}{x-\ln x} & se\ x>0 \end{cases}$

a) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1

b) Averigue se a função f é contínua no ponto 0. Justifique a sua resposta. ***(2019-1ª fase-Cad 2)***

31. De um triângulo, sabe-se que os comprimentos dos seus lados são 4, 5 e 6. Seja α a amplitude do maior ângulo interno desse triângulo. Qual é o valor de $sen\,\alpha$, arredondado às milésimas?

(A) 0,989 **(B)** 0,992 **(C)** 0,995 **(D)** 0,998 ***(2019-2ª fase-Cad 1)***

32. Qual é o valor de $sen\left(3\arccos\frac{1}{2}\right)$?

$(A)\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(B)\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(C)0$ $(D)1$ ***(2019-2ª fase-Cad 2)***

33. Seja *g* a função definida em $]0,\pi[$ por $g(x)=\frac{1}{4}\cos(2x)-\cos x$

a) Estude a função *g* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão. Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de *g* tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de *g* tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de *g,* caso este(s) exista(m).

b) Seja *f* a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, definida por $f(x)=g(-x)+g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Qual das expressões seguintes também pode definir a função *f* ?

(A) sen*x*+cos*x* **(B)** −sen*x*−cos*x* **(C)** sen*x*− cos*x* **(D)** −sen*x*+cos*x* ***(2019-2ª fase-Cad 2)***

34. De um triângulo, sabe-se que os comprimentos dos seus lados são 4, 5 e 8. Seja α a amplitude, em graus, do maior ângulo interno desse triângulo. Qual é o valor de α , arredondado às unidades?

$(A)75°$ $(B)100°$ $(C)120°$ $(D)125°$ ***(2019-EE-Cad 1)***

35. Considere a função *f*, definida em $]0,\pi[$, por $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{2+\cos x}$

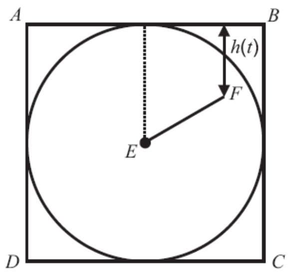
a) Determine $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\pi-x)}{x}$

b) Estude a função *f* quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos. ***(2019-EE-Cad 2)***

36.

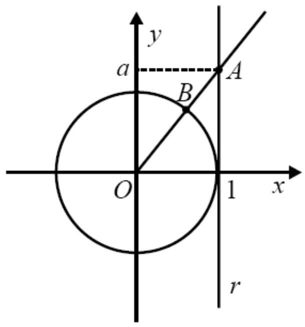
A Figura à esquerda é uma fotografia da torre da Igreja de São Pedro, situada em Zurique, na Suíça. Nessa torre, encontra-se um dos maiores relógios da Europa. Na Figura à direita, está representado um esquema desse relógio. No esquema, o segmento de reta [*EF*] representa o ponteiro das horas. Relativamente à Figura da direita, sabe-se ainda que:

- o círculo de centro *E* está inscrito no quadrado [*ABCD*]
- $\overline{EF}=3,5m$ e $\overline{AB}=9m$



Seja *h* a função que dá a distância, em metros, da extremidade do ponteiro das horas à reta *AB*, *t* horas após as zero horas. Determine, em função de *t*, uma expressão analítica da função *h* ***(2019-EE-Cad 2)***

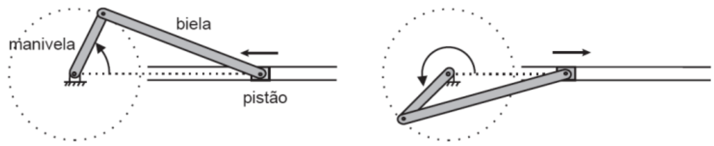
37. Na Figura, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica, a reta r de equação x=1, e um ponto A, de ordenada a (a>1), pertencente à reta r. Está também representada a semirreta OA , que intersecta a circunferência trigonométrica no ponto B. Qual das expressões seguintes dá, em função de a, a abcissa do ponto B?



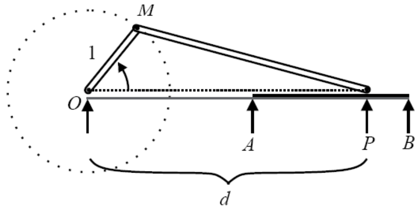
$(A)\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ $(B)\sqrt{a^2+1}$ $(C)\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ $(D)\sqrt{a^2-1}$

(2020 1ªf)

38. O mecanismo de manivela-biela é composto por uma manivela de comprimento fixo, que efetua um movimento de rotação (sempre no mesmo sentido), e por uma biela, também de comprimento fixo, que transforma esse movimento de rotação no movimento alternado de translação de um pistão. Sabe-se que:



- o ponto P representa o pistão;
- o segmento de reta $[OM]$ representa a manivela, que tem 1 cm de comprimento;
- o segmento de reta $[MP]$ representa a biela;
- os pontos A e B são os pontos em que a distância do pistão ao centro de rotação da manivela, O, é mínima e máxima, respetivamente;
- os pontos O, A, P e B são colineares.



Sabe-se que o movimento de rotação da manivela se inicia quando o pistão se encontra na posição B e que a manivela descreve voltas completas a uma frequência angular constante. Admita que a função que dá, em centímetros, a distância do pistão ao ponto O, em função do tempo, t, em segundos, contado a partir do instante em que é iniciado o movimento, é dada por $d(t)=\cos t+\sqrt{9-sen^2 t}$, $t \geq 0$ (o argumento das funções seno e cosseno está expresso em radianos)

a) Qual é, em centímetros, o comprimento da biela neste mecanismo?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

b) Durante os primeiros cinco segundos, após o início do movimento, registou-se, num certo instante t_0, a distância do pistão ao ponto O. Sabe-se que, dois segundos após esse instante, a distância do pistão ao ponto O diminuiu 25%. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a distância, em centímetros, arredondada às décimas, do pistão ao ponto O no instante t_0, sabendo-se que este valor existe e é único. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
- apresente o valor pedido em centímetros, arredondado às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais. ***(2020 1ªf)***

39. Seja g a função, de domínio IR, definida por $g(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{sen\, x}{1-e^x} & se\, x<0 \\ 0 & se\, x=0 \\ x^2 \ln x & se\ x>0 \end{cases}$

Resolva as alíneas a) e b) sem recorrer à calculadora.

a) Averigue se a função g é contínua em x = 0

b) Estude a função g quanto à monotonia em $]0,+\infty[$ e determine, caso existam, os extremos relativos. Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia. ***(2020 1ªf)***

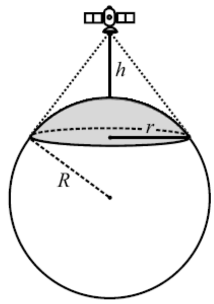
40. Sejam *f* e *g* as funções, de domínio IR , definidas, respetivamente, por $f(x)=x^2$ e $g(x)=\cos x$

a) Qual é o declive da reta tangente ao gráfico da função $f \circ g$ no ponto de abcissa $\dfrac{\pi}{4}$?

(A) −2 **(B)** −1 **(C)** 1 **(D)** 2

b) Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que a equação $f(x)=g(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]0,\dfrac{\pi}{3}\right[$ ***(2020-2ª)***

41. Os satélites artificiais são utilizados para diversos fins e a altitude a que são colocados depende do fim a que se destinam. Admita que a Terra é uma esfera. A Figura apresenta um esquema em que se pode observar a superfície terrestre coberta por um satélite, quando este se encontra numa certa posição. Nesta figura,



- *R* é o raio, em quilómetros, da Terra;
- *h* é a altitude, em quilómetros, do satélite (h>0);
- *r* é o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite (0<r<R)
- as grandezas *h* e *r* podem relacionar-se por meio da igualdade $r=\frac{R}{h+R}\sqrt{h^2+2hR}$

Sabe-se que, para cada posição do satélite, a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é dada por $50\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}\right)$

a) Qual é a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se o raio da base da calote esférica for igual a $\frac{3}{5}$ do raio da Terra?

(A) 20% **(B)** 15% **(C)** 10% **(D)** 5%

b) Considere que o raio da Terra é 6400 km. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se a altitude deste for igual ao raio da base da respetiva calote esférica. Apresente o resultado arredondado às unidades. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
- apresente o valor pedido arredondado às unidades.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais. ***(2020-2ª)***

42. Seja *h* a função, de domínio $]-\infty,4[$, definida por $h(x)=\begin{cases}1+xe^{x-1} & se\, x\le 1\\ \frac{\sqrt{x}-1}{sen(x-1)} & se 1<x<4\end{cases}$

Sem recorrer à calculadora, averigue se a função *h* é contínua em *x* = 1 ***(2020-2ª)***

43. Seja *f* a função, de domínio $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{tg\, x}$. Mostre que o gráfico da função *f* não tem assíntotas. ***(2020-esp)***

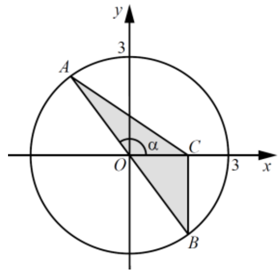
44. Considere a função *h*, de domínio IR, definida por $h(x)=\frac{5}{4+3\cos(2x)}$

a) Qual é a taxa média de variação da função *h* entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$?

$(A)1$ $(B)\frac{1}{2}$ $(C)0$ $(D)-\frac{1}{2}$

b) Determine, sem recorrer à calculadora, as abcissas dos pontos do gráfico da função *h* , pertencentes ao intervalo $]-\pi,\pi[$, cuja ordenada é 2. ***(2020-esp)***

45. Na figura estão representados, num referencial o.n. *xOy*, a circunferência de centro em *O* e raio 3 e o triângulo [ABC]. Sabe-se que:



- o segmento de reta [AB] é um diâmetro da circunferência;
- α é a inclinação da reta *AB* $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$;
- o ponto *C* pertence ao semieixo positivo *Ox*;
- a reta *BC* é paralela ao eixo *Oy*

Mostre que a área do triângulo [ABC] é dada pela expressão $-9\sin\alpha\cos\alpha$ ***(2021-1ª)***

46. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

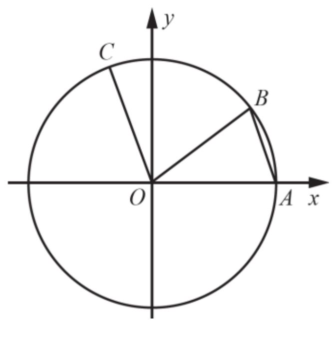
Seja *g* a função, de domínio $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por $g(x) = x\cos x + \operatorname{sen} x$. Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função *g* tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$ ***(2021-1ª)***

47. Considere, para um certo número real positivo *k*, as funções *f* e *g*, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, definidas por $f(x) = k\operatorname{sen}(2x)$ *e* $g(x) = k\cos x$. Sejam, num referencial ortonormado do plano, A, B e C os pontos de interseção dos gráficos de *f* e *g*, sendo A o ponto de menor abcissa e C o ponto de maior abcissa. Sabe-se que o triângulo [ABC] é retângulo em B. Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de *k*. ***(2021-1ª)***

48. Sabe-se que $sen\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5}$ e que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $tg(\pi - \alpha) + 2\cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$. Apresente o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $a \in Z$, $b \in IN$ e $c \in IN$. ***(2021-2ª)***

49. Seja *h* a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $h(x) = \operatorname{sen} x + \cos^2 x$. Estude, sem recorrer à calculadora, a função *h* quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos. Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia. ***(2021-2ª)***

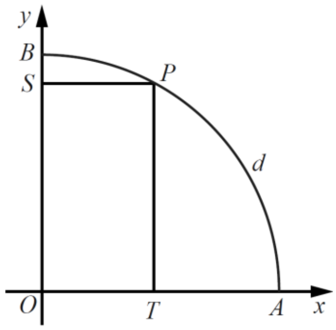
50. Na figura está representada a circunferência trigonométrica. Sabe-se que:



- os pontos A, B e C pertencem à circunferência;
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox e o ponto B pertence ao primeiro quadrante;
- a amplitude do ângulo BOC é igual ao dobro da amplitude do ângulo AOB
- a área do triângulo [AOB] é igual a *k* $\left(0 < k < \frac{1}{2}\right)$

Mostre que a ordenada do ponto C é dada, em função de *k*, por $6k - 32k^3$ ***(2021-2ª)***

51. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy, o arco de circunferência AB, contido no primeiro quadrante do plano cartesiano, cujo centro é a origem do referencial e cujo raio é igual a $r\ (r>0)$. O ponto A pertence ao eixo Ox e o ponto B pertence ao eixo O*y*.
Seja P um ponto do arco AB, distinto de A e de B, e seja ***d*** o comprimento do arco AP.
O ponto S pertence ao eixo das ordenadas e tem ordenada igual à do ponto P. O ponto T pertence ao eixo das abcissas e tem abcissa igual à do ponto P. Mostre que uma expressão que dá o valor de $\overline{BS}+\overline{TA}$, em função de **d** e de **r**, é



$$r\left(2-sen\left(\frac{d}{r}\right)-\cos\left(\frac{d}{r}\right)\right)$$

52. Seja *f* a função, de domínio *IR*, definida por $f(x)=\begin{cases} x-2+\ln(3-2x) \text{ se } x\le 1 \\ \dfrac{sen(x-1)}{1-x^2}+k \text{ se } x>1 \end{cases}$ (k é um número real)

Sem recorrer à calculadora, determine *k*, sabendo que a função *f* é contínua em $x=1$ ***(2021 esp)***

53. Seja *g* a função, de domínio $\left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$, definida por $g(x)=\log_2(1-\cos x)+\log_2(1+\cos x)+2\log_2(2\cos x)$.

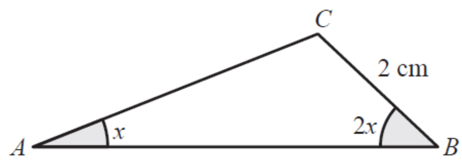
Mostre que $g(x)=2\log_2\left(sen(2x)\right)$ ***(2021 esp)***

54. Seja *f* a função, de domínio IR\{-2}, definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{2-x}}{x+2} & se\ \ x<-2 \vee x\ge 2 \\ \dfrac{sen(x-2)}{x^2-4} & se\ \ -2<x<2 \end{cases}$

Sem recorrer à calculadora, averigue se a função *f* é contínua em *x*=2 ***(2022 1ª)***

55. Na Figura, está representado o triângulo [*ABC*] . Seja $x\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$, a amplitude, em radianos, do ângulo *BAC* .

Sabe-se que $C\hat{B}A=2x$ e que $\overline{BC}=2cm$. Mostre que o comprimento de [*AB*], em centímetros, é dado, para cada valor de *x*, pela expressão $8\cos^2 x-2$ ***(2022 1ª)***



56. Seja *f* a função, de domínio R , definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & se\ x<0 \\ \ln\sqrt{e+x} & se\ x\ge 0 \end{cases}$

Sem recorrer à calculadora, averigue se a função *f* é contínua em *x* = 0. ***(2022 2ª)***

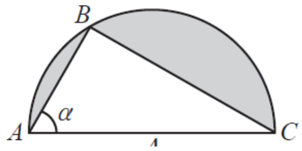
57. Seja *g* uma função derivável, de domínio $\left]-\infty,\pi\right[\setminus\{0\}$, cuja derivada, *g´*, é dada por

$$g'(x)=\begin{cases} 3e^{2x}-7e^{x} & se\quad x<0 \\ x+2\cos^2 x & se\quad x\ge 0 \end{cases}$$

Sem recorrer à calculadora, estude a função *g* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]0,\pi\right[$. Na sua resposta, apresente:

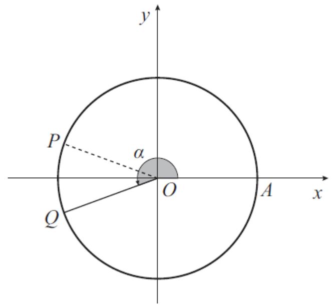
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de *g* tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de *g* tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de *g* ***(2022 2ª)***

58. Na Figura, está representado um triângulo, $[ABC]$, inscrito numa semicircunferência de diâmetro $\overline{AC}=4$. Seja α a amplitude do ângulo CAB. Mostre que a área da região sombreada na figura é dada, em função de α, por $2\pi-4sen(2\alpha)$ ***(2022 esp)***



59. Na Figura, estão representados, em referencial o.n. *Oxy*, uma circunferência de centro na origem e os pontos *A*, *P* e *Q*, que pertencem à circunferência. Sabe-se que:

- o ponto *A* tem coordenadas (2,0)
- o ângulo orientado *AOQ* tem amplitude $\alpha\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$
- os pontos *P* e *Q* têm a mesma abcissa
- $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}=3$



Determine o valor de $\cos(2\alpha)$ ***(2023 1ª)***

60. Seja *f* a função, de domínio $[0,\pi]$, definida por *f(x)=sen(2x)+x*, e seja *r* a reta de equação y = -x+2

a) Qual das expressões seguintes pode definir a função derivada de *f* ?

(A) $2\text{-}2\cos^2 x$ **(B)** $2\text{-}2\text{sen}^2 x$ **(C)** $3\text{-}4\cos^2 x$ **(D)** $3\text{-}4\text{sen}^2 x$

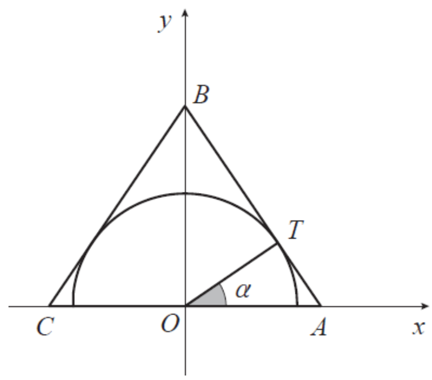
b) Resolva este item sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos. Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que o gráfico da função *f* interseta a reta *r* em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[$ ***(2023 1ª)***

61. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(2x)}{x}$?

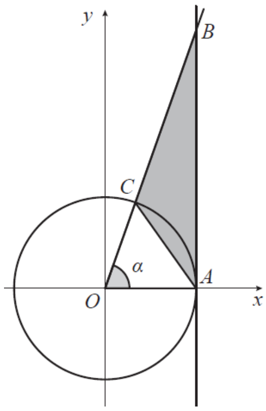
(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** 2 ***(2023 2ª)***

62. Na Figura, estão representados, em referencial o.n. *Oxy*, uma semicircunferência de raio 2, e centro na origem do referencial, e o triângulo isósceles $[ABC]$. Sabe-se que:

- o vértice *A* pertence ao semieixo positivo *Ox*
- o vértice *B* pertence ao semieixo positivo *Oy*
- o vértice *C* pertence ao semieixo negativo *Ox*
- $\overline{AB}=\overline{BC}$
- o lado $[AB]$ é tangente à semicircunferência no ponto *T*
- AÔT=α, $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$



Prove que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de α, por $\frac{8}{sen(2\alpha)}$ ***(2023 2ª)***



63. Na Figura, estão representados, em referencial o.n. *Oxy* , a circunferência trigonométrica, o triângulo [*ABC*] e a reta de equação *x* = 1. Sabe-se que:

• o ponto *A* tem coordenadas (1,0)

• o ponto *B* pertence à reta de equação *x* = 1

• *C* é o ponto de interseção da semirreta $\dot{O}$B com a circunferência trigonométrica

• AÔB=α , $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

Determine a área do triângulo [*ABC*] ***(2023 esp)***

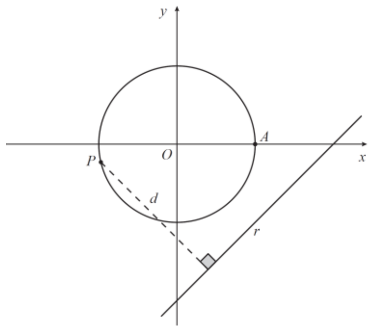
64. Considere a função *g* , de domínio $[0,\pi[$, definida por $g(x) = e^x \cos x$.

a) Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Estude a função *g* quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine esses extremos, caso existam. Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia da função *g* .

b) Resolva este item sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos.

Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que existe, pelo menos, um ponto do gráfico de *g* cuja ordenada é igual à abcissa, no intervalo, $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$. ***(2023 esp)***



65. Na figura estão representados, em referencial o.n. Oxy:

• uma circunferência, de centro na origem

• o ponto *A*, ponto de intersecção da circunferência com o semieixo positivo Ox e a reta *r*, de equação reduzida $y = x - 6$

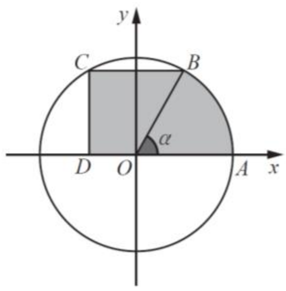
Considere que um ponto, *P*, partindo de *A*, se desloca sobre a circunferência, no sentido positivo, durante 7 segundos, percorrendo mais do que uma volta. Nesse percurso, a distância, *d*, do ponto *P* à reta *r*, *t* segundos após o início do deslocamento, é dada por $d(t) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(2 + \operatorname{sen} t - \cos t\right)$, com $t \in [0,7]$.

Sabe-se que as distâncias máxima e mínima do ponto *P* à reta *r* são, respetivamente, $3\sqrt{2}+3$ e $3\sqrt{2}-3$. Durante o percurso, existem dois instantes em que a distância do ponto *P* à reta *r* é igual ao diâmetro da circunferência. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, esses instantes. Apresente os resultados em segundos, arredondados às décimas. Não justifique a validade dos resultados obtidos. Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale os pontos relevantes, que lhe permitem resolver a equação. ***(2023 esp)***

66. Na figura, estão representadas, em referencial o.n. *Oxy*, a circunferência de centro em *O* e raio 2 e uma região sombreada composta pelo trapézio [*OBCD*], retângulo em *C* e em *D*, e pelo sector circular correspondente ao ângulo orientado *AOB*, de amplitude α, em radianos, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e raio $\overline{OA}$. Sabe-se que:



• o ponto *A* pertence à circunferência e ao semieixo positivo *Ox*;

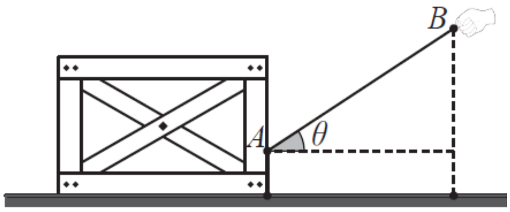
• os pontos *B* e *C* pertencem à circunferência, sendo *C* o simétrico de *B* em relação ao eixo *Oy*.

Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de α, pela expressão $2\alpha + 3sen(2\alpha)$ ***(2024 1º)***

67. Considere a função f , de domínio IR\{0}, definida por $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^4}$

Estude, sem recorrer à calculadora, a função f quanto à existência de assíntotas verticais ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respetivas equações. ***(2024 1ª)***

68. Na figura, está representada uma caixa que vai ser puxada ao longo de um plano horizontal, com recurso a uma haste rígida. Nesta figura, o segmento de reta [*AB*] representa a haste rígida, o ponto *A* representa o ponto em que a haste está fixada à caixa e o ponto *B* representa o ponto em que vai ser exercida a força que permite deslocar a caixa. Seja θ a amplitude, em radianos, do ângulo que a força faz com a horizontal $\left(\theta \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)$.



Admita que, para cada valor de θ, a intensidade mínima da força a aplicar no ponto *B*, para que se inicie o movimento da caixa, é dada, em newton, por $F(\theta)=\dfrac{4095}{5sen\theta+12\cos\theta}$.

Existem dois valores distintos de θ aos quais corresponde a mesma intensidade mínima da força, em newton, a aplicar no ponto *B*, para que se inicie o movimento da caixa. Sabe-se que um desses valores é o dobro do outro.

Seja θ_1 o menor desses valores $\left(\theta_1 \in \left]0,\dfrac{\pi}{4}\right[\right)$. Determine, recorrendo à calculadora, o valor de θ_1. Apresente o resultado em radianos, arredondado às centésimas. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

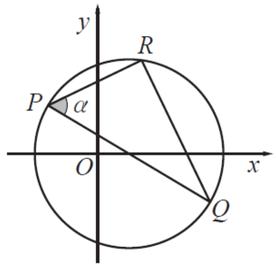
– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação. ***(2024 1ª)***

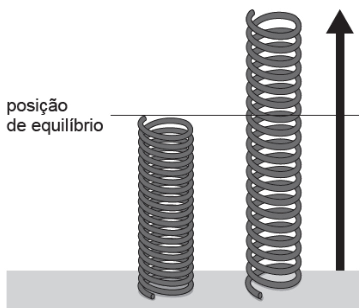
69. Na figura, estão representados, em referencial o.n. *Oxy*, a circunferência de equação $(x-1)^2+y^2=9$ e o triângulo [*PQR*], inscrito na circunferência. Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo *QPR* . Sabe-se que:

- [*PQ*] é um diâmetro da circunferência
- $\overrightarrow{QR}.\overrightarrow{QP}=27$

Determine o valor de α . ***(2024 2ª)***



70. Uma empresa que fabrica suspensões para veículos está a testar a elasticidade nas vibrações verticais de um certo tipo de mola. Num dos testes, fixou-se uma das extremidades de uma mola numa bancada, e a extremidade livre foi alongada alguns centímetros acima da posição de equilíbrio, tendo sido depois solta (figura ao lado).



Admita que a mola oscila numa trajetória vertical e que o deslocamento, *y*, em centímetros, da extremidade livre da mola, em relação à posição de equilíbrio, no primeiro segundo, é dado, em cada instante *t*, em segundos, por $y(t)=7{,}5e^{-1{,}5t}sen(8{,}6t+1{,}6),\ com\ t\in[0,1]$ (o argumento da função seno está expresso em radianos).

Existem três instantes em que a extremidade livre da mola está meio centímetro abaixo da posição de equilíbrio. Determine, recorrendo à calculadora, o primeiro desses instantes. Apresente o resultado arredondado às centésimas de segundo. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação. ***(2024 2ª)***

71. Seja *g* uma função diferenciável, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, cuja derivada, g´, é dada por $g'(x)=\cos(2x)+2sen\,x$.

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Seja *r* a reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa 0, e seja *s* a reta paralela à reta *r* que intersecta o eixo *Ox* no ponto de abcissa 4. Determine a equação reduzida da reta *s*.

b) Estude a função *g* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão. Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de *g* tem concavidade voltada para baixo;
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de *g* tem concavidade voltada para cima;
– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de *g*, caso este(s) exista(m). ***(2024 2ª)***

72. Seja *f* a função, de domínio $]-2\pi,2\pi[$, definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{6x}}{3x} & se\ -2\pi<x<0\\ \dfrac{4\cos x}{sen\,x-2} & se\ 0\le x\le 2\pi\end{cases}$

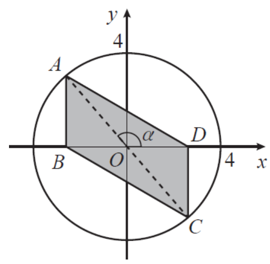
Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Averigue se a função *f* é contínua em *x* = 0.

b) Estude, no intervalo $]0,2\pi]$, a função *f* quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos. Na sua resposta, apresente os intervalos de monotonia e os valores de x para os quais a função *f* tem extremos relativos.

(2024 esp)

73. Na figura, estão representados, em referencial o.n. *Oxy*, o quadrilátero [*ABCD*] e a circunferência de centro em *O* e raio 4*.* Sabe-se que:



- o segmento de reta [*AC*] é um diâmetro da circunferência
- α é a inclinação, em radianos, da reta *AC* , $\left(\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)$
- as retas *AB* e *CD* são paralelas ao eixo *Oy*
- o ponto *B* pertence ao semieixo negativo *Ox* e o ponto *D* pertence ao semieixo positivo *Ox*

Mostre que a área do quadrilátero [*ABCD*] é dada pela expressão $-16sen(2\alpha)$. ***(2024 esp)***

Sol: $(1)B(3)C(4.a)\dfrac{2}{3},2,\dfrac{8}{3}(5)-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(6)D(7.a)1(7.b)a\approx 0,606; b\approx 0,877; b-a\approx 0,27(8)D(9.a)\,N\tilde{a}o\ tem\ A.O.$

$(9.b)\nearrow em\left[-\dfrac{\pi}{6},0\right[\ \searrow em\left]-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{6}\right]\min relat\ para\ x=-\dfrac{\pi}{6}(9.c)\,y=-x+1+\ln 2; x_A\approx -1,19\ e\ x_B\approx -0,17$

$(10)B(11.1)cont\ para\ x=1(11.2)\{1+\pi\}(12)\left\{\dfrac{13\pi}{12},\dfrac{17\pi}{12}\right\}(13.1)4(13.2)18(14)A(15)D(16a)V(16b)\,y=-2x+2$

$(16c)1,23(18)A(19.a)A(19b)sim(19c)\nearrow em\left]0,\dfrac{\pi}{4}\right]e\ em\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]\searrow em\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]m\acute{a}x\,relat=1\ para\ x=\dfrac{\pi}{4};$

$m\acute{a}x\,relat=\dfrac{1}{2}\ para\ x=\pi; m\acute{i}n\,relat=\dfrac{1}{3}\ para\ x=\dfrac{3\pi}{4}(20)B(21)C(22)10^{\circ}(23)D(24)\dfrac{3\sqrt{3}}{2}(25)B(26b)\,n\tilde{a}o\ tem$

$(26c)B(27)C(28)B(29)A(30a)\,y=x(30b)sim(31)B(32)C(33a)\cup em\left]0,\dfrac{2\pi}{3}\right]\cap em\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right[\ PI\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3}{8}\right)(33b)B$

$(34)D(35a)1(35b)\nearrow em\left]0,\dfrac{2\pi}{3}\right]\searrow em\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right[\ m\acute{a}x\,relat=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ para\ x=\dfrac{2\pi}{3}(36)\,h(t)=4,5-3,5\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)(37)A$

$(38a)B(38b)2,8(39.a)sim(39.b)\searrow em\left]0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]\nearrow em\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right[\ \min relat=-\dfrac{1}{2e}\ para\ x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}(40a)B(41a)C$

$(41b)23\%(42)N\tilde{a}o(44a)C(44b)\left\{-\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right\}(47)\sqrt{\dfrac{8}{27}}\pi(48)-\dfrac{7\sqrt{24}}{5}(49)\searrow em\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right[\ \nearrow em\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right];$

$\min relat=1\,para\ x=0; \max relat=\dfrac{5}{4}\ para\ x=\dfrac{\pi}{6}(52)-\dfrac{1}{2}(54)cont(56)descont(57)\cup em\left]0,\dfrac{\pi}{12}\right]e\ em\left[\dfrac{5\pi}{12},\pi\right[;$

$\cap em\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right]; PI\ para\ x=\dfrac{\pi}{12}\ e\ para\ x=\dfrac{5\pi}{12}(59)\dfrac{3}{4}(60a)D(61)D(63)\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(64a)\nearrow em\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\searrow em\left[\dfrac{\pi}{4},\pi\right[$

$\min relat=1\ para\ x=0; max\,relat=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\ para\ x=\dfrac{\pi}{4}(65)1,4\,e\,3,3(67)\,x=0(68)0,26(69)\dfrac{\pi}{3}(70)0,19$

$(71a)\,y=x-4(71b)\cup em\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{6}\right];\cap em\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right[; PI\ para\ x=\dfrac{\pi}{6}(72a)sim(72b)\searrow em\left]0,\dfrac{\pi}{6}\right]e\ em\left[\dfrac{5\pi}{6},2\pi\right]$

$\nearrow em\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]; extremo\ relat\ para\ x=\dfrac{\pi}{6}; x=\dfrac{5\pi}{6}; x=2\pi$

jose.santos@aemrt.pt

joseladeira@gmail.com