

Modelos matemáticos para a cidadania

Vamos recordar

Ficha 1 Proporções

1. Podemos calcular a razão:

- a) $\frac{\text{preço}}{\text{quantidade}}$ para cada marca. Assim, ficamos a saber qual é o preço a pagar por cada grama.
- b) $\frac{\text{quantidade}}{\text{preço}}$ para cada marca. Com isso vamos ficar a saber qual a quantidade de doce que conseguimos comprar com 1 €.

Vamos ver a resposta usando a alínea a).

Marca DAN	Marca NAD
$\frac{2,99 \text{ €}}{280 \text{ g}} \approx 0,01068 \text{ €/g}$	$\frac{2,39 \text{ €}}{250 \text{ g}} = 0,00956 \text{ €/g}$

O doce da marca NAD é mais barato.

A Antónia deve comprar, caso pretenda, o doce da marca NAD.

Vamos ver a resposta usando a alínea b).

Marca DAN	Marca NAD
$\frac{280 \text{ g}}{2,99 \text{ €}} \approx 94 \text{ g/€}$	$\frac{250 \text{ g}}{2,39 \text{ €}} \approx 105 \text{ g/€}$

Concluimos que, com 1 €, a Antónia consegue comprar mais quantidade de doce da marca NAD.

2. Com 3 unidades de cimento e 5 unidades de gesso temos 8 unidades de massa. Para 8 unidades de massa são precisas 3 unidades de cimento.

$$\frac{8}{3} = \frac{30}{x} \quad \text{ou} \quad 8 \frac{3}{30} = \frac{3}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{8} \times 30 = 11,25 \text{ kg}$$

$$8x = 90 \Leftrightarrow x = \frac{90}{8} \Leftrightarrow x = 11,25 \text{ kg}$$

Para 8 unidades de massa são precisas 5 unidades de cimento.

$$\frac{8}{5} = \frac{30}{x} \quad \text{ou} \quad 8 \frac{5}{30} = \frac{5}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{5}{8} \times 30 = 18,75 \text{ kg}$$

$$8x = 150 \Leftrightarrow x = \frac{150}{8} \Leftrightarrow x = 18,75 \text{ kg}$$

Portanto, são necessários 11,25 kg de cimento e 18,75 kg de gesso para obter 30 kg de massa.

3. $0,3 \times 23 = 6,9$

Devem estar pelo menos 7 membros presentes para aprovar uma atividade.

4. Valor do desconto, em euros, $1500 - 1299,99 = 200,01$.

$$\text{Desconto, em percentagem, } \frac{200,01}{1500} \approx 13\%$$

5.1. Percentagem da refeição sem IVA mais IVA: $100\% + 13\% = 113\%$

$$\text{Valor da refeição sem IVA: } \frac{135,3}{1,13} \times 100 \approx 119,73 \text{ €}$$

5.2. Valor do IVA: $135,30 - 119,73 = 15,57 \text{ €}$ ou $0,13 \times 119,73 \approx 15,57 \text{ €}$

6.1. Se o carro tem 20% de desconto, significa que $4239,20 \text{ €}$ corresponde a $100\% - 20\% = 80\%$.

$$\text{O preço do carro em dezembro, em € , é } \frac{4239,20}{0,8} = 5299 \text{ € .}$$

6.2. No mês de setembro, ao preço-base do carro, 4239,20 €, acresce o valor do IVA que será de $4239,20 \times 0,23 = 975,016$ €, totalizando $4239,20 + 975,016 = 5214,216$ €.

No mês de dezembro, ao preço-base do carro, 5299,00 €, acresce o valor do IVA que será de $5299,00 \times 0,23 = 1218,77$ €, totalizando $5299,00 + 1218,77 = 6517,77$ €.

7.1. Com 3 rapazes e 2 raparigas temos no total 5 alunos.

Por cada 5 alunos temos 2 raparigas

$$\frac{5}{2} = \frac{120}{x} \quad \text{ou} \quad 5 \frac{\text{---}}{120} \frac{2}{\text{---}} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{5} \times 120 = 48$$

$$5x = 240 \Leftrightarrow x = \frac{240}{5} \Leftrightarrow x = 48$$

No 10.º ano, há 48 raparigas inscritas a Matemática A.

7.2. Por cada 5 alunos temos 3 rapazes, logo a razão dos rapazes é $\frac{3}{5} = 0,6$.

No 10.º ano, a percentagem de rapazes inscritos à disciplina de Matemática A é 60%.

Ficha 2 Modelos matemáticos nas eleições

pág. 10

1.1.

		Total	Percentagem
Votos expressos	Lista A	29	42,65%
	Lista B	39	57,35%
Votos brancos		0	0,00%
Votos nulos		0	0,00%

1.2. Seja n o número de votos nulos.

Para a Lista B obter mais votos, temos que $39 - n > 29 \Leftrightarrow n < 10$.

Para o resultado das eleições ser o mesmo, o número máximo de votos nulos é 9.

2.1. Votos validamente expressos: $4083 - 9 - 35 = 4039$

2.2. Votos a favor: $4039 \times 0,7083 \approx 2861$

2.3. $\frac{21\ 665 - 4083 - 9 - 35}{21\ 665} \approx 80,95\%$

2.4. $\frac{2861}{21\ 665} \times 100\% \approx 13,21\%$

2.5. Embora a concordância em manter a data do feriado tenha ganho, tendo atingido aproximadamente 71% dos votos, somente cerca de 13% dos inscritos concordam em manter a data do feriado!

pág. 11

3.1. Candidato A: $7 \times 4 + 2 \times 1 + 3 \times 1 = 33$

Candidato B: $7 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 2 = 35$

Candidato C: $7 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 32$

Candidato D: $7 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = 20$

O Reitor eleito pelo método de Borda é o candidato B.

3.2. O número total de votos é 12.

Para obter maioria absoluta tem de ter pelo menos metade dos votos mais 1, ou seja, pelo menos $6 + 1 = 7$ votos.

O candidato A tem 7 votos, logo seria o eleito por maioria absoluta.

4.1. Competição A: $5 + 10 = 15$

Competição B: $30 + 10 = 40$

Competição F: $25 + 20 = 45$

A banda, por maioria simples, participaria na competição de futebol.

Ficha 4 Modelos matemáticos nos salários

pág. 14

1.1. O 12 representa os 12 meses do ano e o 52 é o número de semanas de um ano.

1.2. a) $\frac{760 \times 12}{52 \times 35} \approx 5,01 \text{ €}$

b) $\frac{920 \times 12}{52 \times 35} \approx 6,07 \text{ €}$

c) $\frac{1285,26 \times 12}{52 \times 35} \approx 8,47 \text{ €}$

1.3. $\frac{3 \times 6}{7} = 2,57 \text{ € / dia}$

1.4. a) A remuneração mensal base do Max é 920 €, portanto o montante de retenção na fonte é dado por $\text{Remuneração} \times \text{Taxa} - \text{Parcela a abater}$, obtemos assim o valor $920 \text{ €} \times 0,21 - 0,21 \times 1,3 \times (1350,22 - 920 \text{ €}) = 75,749 \text{ 94}$

Logo, a taxa efetiva mensal de retenção na fonte é $\frac{75,749 \text{ 94}}{920} = 0,082 \text{ 336 89} \approx 8,234\%$.

MMATOCAD © Porto Editora

pág. 15

b) $\left(\frac{920}{365}\right) \times (21 + 21 + 23 + 20 + 21) = 267,18 \text{ €}$

c)

Descrição	Quantidade	Valor unitário	Abonos	Descontos
Vencimento-base	21 dias	920,00 €	920,00 €	
Subsídio de alimentação		6,00 €	126,00 €	
ADSE (3,5%)				32,20 €
SS (11%)				101,20 €
IRS (8,234%)				75,75 €
Total			1046,00 €	209,15 €
Total a receber			836,85 €	

d) O Max tem como salário base 920 € por mês e um subsídio de refeição diária no valor de 6 €. Num ano, o Max teria aproximadamente um rendimento bruto de $920 \times 12 + 6 \times 22 \times 12 = 12 \text{ 624 €}$. Como o rendimento anual é inferior a 20 370,4 €, o Max, no primeiro ano, fica isento. O Max no mês de agosto vai receber $836,85 + 75,75 = 912,60 \text{ €}$.

e₁) Por uma hora recebe $6,07 \text{ €} \left(= \frac{920 \times 12}{52 \times 35} \right)$.

Como 1 e 8 são feriados acresce ao valor de uma hora 25%, logo cada hora extra tem o valor de $6,07 \text{ €} + 6,07 \text{ €} \times 0,25 \approx 7,59 \text{ €}$.

e₂)

Descrição	Quantidade	Valor unitário	Abonos	Descontos
Vencimento-base			920,00 €	
Subsídio de Natal			267,18 €	
Subsídio de alimentação	23 dias	6,00 €	138,00 €	
Horas extraordinárias (HE)	8 horas	7,59 €	60,72 €	
ADSE (3,5%)				43,68 €
SS (11%)				137,27 €
IRS (0,0%)				0,00 €
Total de abonos / descontos			1385,90 €	180,95 €
Total a receber			1204,95 €	

Ficha 5 Modelos matemáticos na poupança

pág. 16

MMATOCAD © Porto Editora

1.1. **MXDom** – televisão: $\frac{599,99}{1,23} \approx 487,80 \text{ €}$. $599,99 - 487,80 = 112,19 \text{ €}$

máquina de café: $\frac{169,99}{1,23} \approx 138,20 \text{ €}$. $169,99 - 138,20 = 31,79 \text{ €}$

ELEmax – televisão: $\frac{619,99}{1,23} \approx 504,06 \text{ €}$. $619,99 - 504,06 = 115,93 \text{ €}$

máquina de café: $\frac{149,99}{1,23} \approx 121,94 \text{ €}$. $149,99 - 121,94 = 28,05 \text{ €}$

1.2. **Compra em MXDom:** Compra a televisão por $599,99 \text{ €}$ e recebe um vale de $112,19 \text{ €}$. Compra a máquina de café e desconta esse vale: $169,99 - 112,19 = 57,80 \text{ €}$. Portanto, pela televisão e pela máquina de café, a Dona Clotilde vai pagar $599,99 + 57,80 = 657,79 \text{ €}$.

Compra em ELEmax: Compra a televisão por $619,99 \text{ €}$ e recebe um vale de $100,00 \text{ €}$. Com esse vale compra a máquina de café e desconta esse vale: $149,99 - 100,00 = 49,99 \text{ €}$. Portanto, pela televisão e pela máquina de café a Dona Clotilde vai pagar $619,99 + 49,99 = 669,98 \text{ €}$.

Portanto, o valor menor é na loja **MXDom**. A Dona Clotilde deve comprar os 2 eletrodomésticos nesta loja.

1.3. **MXDom** – televisão: $\frac{599,99}{1,16} \approx 517,23 \text{ €}$. $599,99 - 517,23 = 82,76 \text{ €}$

Compra a televisão por $599,99 \text{ €}$ e recebe um vale de $82,76 \text{ €}$. Com esse vale compra a máquina de café e desconta o vale: $169,99 - 82,76 = 87,23 \text{ €}$. Portanto, pela televisão e pela máquina de café, a Dona Clotilde vai pagar $599,99 + 87,23 = 687,22 \text{ €}$.

ELEmax – a Dona Clotilde vai pagar o mesmo $669,98 \text{ €}$.

Por isso, a opção mais económica seria a loja **ELEmax**.

1.4. Por exemplo, $\frac{112,19}{599,99} \approx 18,7\%$.

2.1. $7,99 \text{ €}$ por mês, por ano: $7,99 \times 12 = 95,88 \text{ €}$
No final do ano economiza $95,88 - 59,88 = 36 \text{ €}$.

pág. 17

2.2. $\frac{59,88}{7,99} = 7,49$

Precisa de 8 meses.

2.3. Uma vantagem de optar pela subscrição anual é o facto de ser mais económica.
Uma desvantagem é o facto de, se quiser utilizar menos de 8 meses, ter sempre de pagar a totalidade.

3.1. Capital acumulado ao fim de 3 anos:
Com juro simples: $C_3 = 5000 + 5000 \times 0,04 \times 3 = 5600,00 \text{ €}$
Com juro composto: $C_3 = 5000 \times (1 + 0,035)^3 \approx 5543,59 \text{ €}$
A melhor proposta ao fim de 3 anos é a proposta A.

3.2. Proposta A: Valor do juro simples: $600,00 \text{ €}$; juro líquido: $600 - 600 \times 0,28 = 432 \text{ €}$
Proposta B: Valor do juro composto: $543,59 \text{ €}$; juro líquido: $543,59 - 543,59 \times 0,28 \approx 391,38 \text{ €}$

3.3. Capital acumulado ao fim de 10 anos:
Com juro simples: $C_{10} = 5000 + 5000 \times 0,04 \times 10 = 7000 \text{ €}$
Com juro composto: $C_{10} = 5000 \times (1 + 0,035)^{10} \approx 7052,99 \text{ €}$
A melhor proposta ao fim de 10 anos é a proposta B.

3.4. Significa que a Maria pretende reforçar a conta, portanto a opção que lhe permite entregas adicionais é a proposta A.

Ficha 6 Modelos matemáticos no crédito

pág. 18

- 1.1.** a) Por ano, a Fabiana tem de pagar mais $1000 \times 0,06 = 60 \text{ €}$. A Fabiana deve à avó 1060 € .
 b) Como a Fabiana não fez nenhum pagamento, tem de pagar mais $1060 \times 0,06 = 63,60 \text{ €}$.
 A Fabiana deve à avó $1123,60 \text{ €}$.
- 1.2.** a₁) Por cada mês, tem um juro de $\frac{0,06}{12} \times 1000 \text{ €} = 5 \text{ €}$. Portanto, a Fabiana deve $1000 - 40 = 960 \text{ €}$.
 a₂) Parcela a abater na dívida: $45 \times 12 - 5 \times 12 = 40 \times 12 = 480 \text{ €}$
 Ao fim de 12 meses, a Fabiana deve $1000 - 480 = 520 \text{ €}$.
 a₃) Como, por cada mês, paga um juro de 5 € , o valor a abater por mês, no total, é 40 € .
 Por isso, vai demorar $\frac{1000}{40} = 25$ meses a pagar a dívida.
- b) Como o valor total, ao fim de dois anos, é 1120 € , a prestação mensal é $\frac{1120}{24} \approx 46,67 \text{ €}$.
 Para a Fabiana pagar em dois anos terá uma prestação mensal de $46,67 \text{ €}$.
- c) Valor mensal do juro: 5 €
 Juro nos 40 meses: $40 \times 5 \text{ €} = 200 \text{ €}$
 Total da dívida: $1000 + 200 = 1200 \text{ €}$ ou $c_{40} = 1000 \left(1 + \frac{0,06}{12} \times 40\right) = 1200$
 Valor mensal: $\frac{1200}{40} = 30 \text{ €}$
 A Fabiana vai pagar por mês 30 € .

pág. 19

- 2.1.** 3 anos = $12 \times 3 = 36$ meses
 O António vai pagar $100,19 \times 36 = 3606,84 \text{ €}$.
- 2.2.** Relativamente ao valor da mensalidade, acrescenta-se custos relativos a impostos e outros encargos. Neste caso, esse valor é $52,80 \text{ €}$.
- 3.1.** A TAN varia tendo em conta o *spread* e o valor indexante. Nesta proposta, o valor da Euribor é maior que na proposta A, obtendo-se assim um valor superior da TAN.
- 3.2.** O casal deve escolher a proposta A, pois o MTIC desta proposta é mais baixo (com uma diferença de $4735,67 \text{ €}$).

Ficha 7 Modelos matemáticos e tecnologia

pág. 20

- 1.1.** $1034 + 210 + 676 = 1920$
- 1.2.** Número de representantes da lista M: 3 ; Número de representante da lista A: 2
- 1.3.** a) Número de representantes da lista M: 2 ; Número de representantes da lista X: 1 ; Número de representantes da lista A: 2
 b) A afirmação do presidente da lista X é verdadeira, pois colocando por ordem decrescente os quocientes, obtínhamos:
 Lista M Lista A Lista M Lista A Lista X Lista M
 $1034,000 > 676,00 > 344,667 > 225,333 > 210,000 > 206,800$
 c) A lista X não teria nenhum representante no Conselho Geral.

pág. 21

- 2.1.** No programa em Python (1) aplica-se o **cálculo com juro simples**.
 No programa em Python (2) aplica-se o **cálculo com juro composto**.
- 2.2.** Cálculos: $6000 \times 0,035 \times 3 = 630$; $6000 + 630 = 6630$
 Respostas:
 O valor do juro é 630 .
 O capital acumulado é 6630 .

- 2.3.** capital=6000
 taxa=0.035
 tempo=3
 capacum=capital*(1+taxa)**tempo
juro=capacum-capital
 print ("O capital acumulado é:", capacum)
 print ("O valor do juro é:", juro)
- 2.4.** O juro capitalizável semestralmente significa que é capitalizado em dois períodos no ano. A taxa de juro semestral é $\frac{0,035}{2} = 0,0175$ e o tempo passa para o dobro.
 Bastava alterar apenas os valores da taxa para 0,0175 e o do tempo para 6.
- 2.5.** No (1), o capital acumulado é 6630. Portanto, a taxa de juro efetiva é $\frac{6630}{6000} - 1 = 0,105$, que corresponde a 10,5% ($3 \times 3,5\%$).
 No caso (2), o capital acumulado é $6000 \times (1 - 0,035)^3 = 6652,31$. Portanto, a taxa de juro efetiva é $\frac{6652,31}{6000} - 1 \approx 0,1087$, que corresponde, aproximadamente, a 10,9%.

Avaliação global do tema

Ficha 8

pág. 22

- 1.1. (A)**
 $231 + 237 + 480 = 948$
- 1.2.** $\frac{480}{948} \times 100 \approx 50,63\%$
- 2.1. (B)**
 $\frac{6080}{134\,490} = 0,045$; $\frac{6080}{27\,491} = 0,221\,16$; $\frac{6080}{6080} = 1$; $\frac{6080}{5927} = 1,03$
- 2.2. (A)**
 $\frac{5927}{27\,491} \times 100 \approx 21,56\%$
- 2.3.** A afirmação é verdadeira, pois a percentagem de votos é $\frac{3470}{5927} \times 100\% \approx 58,55\%$.

2.4.

	Norte	Centro	LVT	Alentejo	Algarve	Madeira	Açores
Lista A	4	1	5	1	1	1	0
Lista B	–	–	–	–	–	–	1
Lista C	2	1	4	0	0	0	0

pág. 23

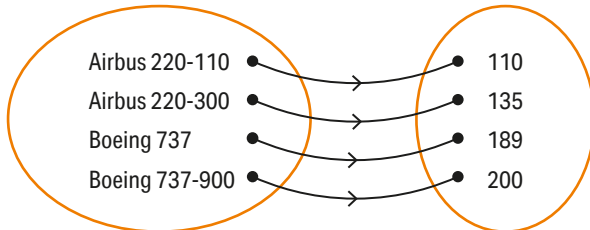
- 3.1.** $\frac{1266,11 \times 12}{52 \times 40} \approx 7,30$
 A afirmação do Bruno é verdadeira.
- 3.2.** $SL = 1266,11 - 0,11 \times 1266,11 - 0,14 \times 1266,11 = 949,58 \text{ €}$
- 3.3.** Cálculo do salário líquido para um salário bruto de 1106 €:
 $SL = 1106 - 0,11 \times 1106 - 0,075 \times 1106 = 901,39$
 Apesar da taxa efetiva mensal da retenção ser quase metade, a afirmação do Bruno é falsa, porque recebe mais 48,19 €.
- 3.4.** Capital acumulado final = $5000 \left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^4 \approx 5254,73 \text{ €}$
 Juro: $254,73 - 61,13 = 193,6 \text{ €}$
 O Bruno, ao fim de um ano, recebe 193,60 €.

Funções

Vamos recordar

Ficha 1 Representações de funções

1.1.



1.2. A correspondência é uma função, porque a cada tipo de avião associa um e só um número de lugares.

1.3. $D = \{\text{Airbus 220-110, Airbus 220-300, Boeing 737, Boeing 737-900}\}$
 $D' = \{110, 135, 189, 200\}$

2.1. $D = \{1, 2, 3, 4\}$
 $D' = \{-3, 0, 3, 6\}$

2.2.

x	1	2	3	4
$f(x)$	6	3	0	-3

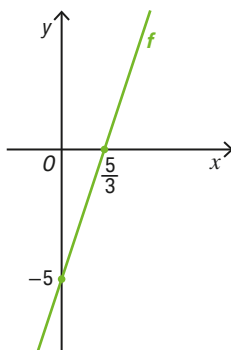
2.3. $f(x) = -3x + 9$

3.1. $f(2) = 3 \times 2 - 5 = 1$

3.2. Determinar a imagem de 3 é calcular $f(3) = 3 \times 3 - 5 = 4$.

3.3. $3x - 5 = -5 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 O objeto cuja imagem é -5 é 0 (zero).

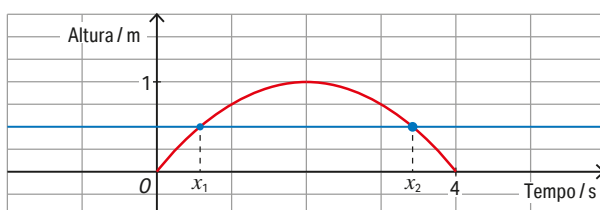
3.4.



4.1. O tempo varia entre 0 e 4 s. A altura varia entre 0 e 1 m.

4.2. Por exemplo, nos instantes 1 s e 3 s a bola está à mesma altura.

4.3.



Nos instantes x_1 e x_2 , a bola encontra-se a meio metro do chão.

Ficha 3 Função afim

pág. 30

MMATOCAD © Porto Editora

- 1.1.** Temos que verificar que a imagem de 1 pela função h é 4. $h(1) = 1 + 3 = 4$
- 1.2.** Como $(1, 4)$ pertence ao gráfico de f , temos que $f(1) = 4$:
 $2 \times 1 + b = 4 \Leftrightarrow b = 4 - 2 \Leftrightarrow b = 2$
- 1.3.** Como $(1, 4)$ pertence ao gráfico de h e de f , também tem de pertencer ao gráfico de g .
 Temos $g(1) = 4$ e, por substituição, obtemos $a \times 1 - 2 = 4 \Leftrightarrow a = 4 + 2 \Leftrightarrow a = 6$.
- 2.1.** Como g é uma função afim, é definida por uma expressão do tipo $g(x) = ax + b$, em que a é o declive da reta que a representa e b a ordenada na origem.

$$a = \frac{-1 - (-7)}{1 - (-1)} = 3. \text{ Logo, } g(x) = 3x + b.$$

$$\text{Utilizando a condição } g(1) = -1 \Leftrightarrow 3 \times 1 + b = -1 \Leftrightarrow b = -1 - 3 \Leftrightarrow b = -4.$$

$$g(x) = 3x - 4$$

2.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

- 3.1.** Como a ordenada de A é o dobro da abcissa de B , temos que $y_A = 2x_B$.

A área do triângulo $[OAB]$ é $\frac{x_B \times y_A}{2}$, pois a abcissa e a ordenada são positivas.

$$\text{Substituindo, obtemos a condição } \frac{x_B \times 2x_B}{2} = 4 \Leftrightarrow x_B^2 = 4 \Leftrightarrow x_B = \pm 2.$$

Como a abcissa é positiva, temos que $x_B = 2$ e $y_A = 4$.

As coordenadas são, respetivamente, $A(0, 4)$ e $B(2, 0)$.

- 3.2.** Como o gráfico é uma reta não vertical, a função pode ser expressa por $f(x) = ax + b$, em que a é o declive da reta e b a ordenada na origem.

$$a = \frac{0 - 4}{2 - 0} = -2 \text{ e } b = 4. \text{ Logo, } f(x) = -2x + 4.$$

pág. 31

3.3.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-
	↘		

4.1. $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$; $h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

4.2. $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x - 3 = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 8x - 12 = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 8x - x = 12 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 7x = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \times 2 - 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

As coordenadas de I são $(2, 1)$.

- 4.3.** As coordenadas de I são $(2, 1)$, de $G(0, -3)$ e de $H(0, \frac{1}{2})$.

$$\text{Base: } \overline{GH} = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}; \text{ altura: } 2. \text{ A área de } [GHI] \text{ é } \frac{\frac{7}{2} \times 2}{2} = \frac{7}{2} \text{ (u. a.)}$$

- 5.1.** Com o eixo Oy : $f(0) = \frac{5 - 3 \times 0}{2} = \frac{5}{2}$. As coordenadas são $(0, \frac{5}{2})$.

$$\text{Com o eixo } Ox: f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5 - 3x}{2} = 0 \Leftrightarrow 5 - 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}. \text{ As coordenadas são } (\frac{5}{3}, 0).$$

- 5.2. a) $a = -\frac{3}{2}$
 b) $a = 1$ (por exemplo)
 c) $a = 0$
- 6.1. $f(x) = kx + k^2 - 6$; f é uma função definida por uma expressão do tipo $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, sendo $a = k$ e $b = k^2 - 6$.
- 6.2. a) $f(1) = 0 \Leftrightarrow k \times 1 + k^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow k^2 + k - 6 = 0 \Leftrightarrow k = -3 \vee k = 2$
 b) A função afim é decrescente se e só se o coeficiente de x é negativo. Logo, $k = -3$.

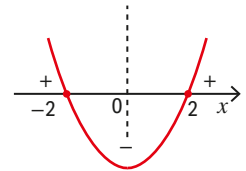
Ficha 4 Função quadrática

pág. 32

- 1.1. $g(x) = \frac{1}{3}f(x)$
- 1.2. $h(x) = 3f(x)$
- 1.3. $i(x) = f(x-1) - 2$
- 1.4. $j(x) = -f(x+1) + 3$
- 2.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Os zeros de f são -2 e 2 .

2.2.

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$



- 2.3. $(0, -8)$; $x = 0$

2.4.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	\searrow	-8	\nearrow

- 2.5. $D_f = [-8; +\infty[$
- 2.6. (C)
 $h(x) = -(2x^2 - 8) + 1 = -2x^2 + 8 + 1 = -2x^2 + 9$, logo $D_h =]-\infty, 9]$.

pág. 33

3.1. e 3.2.

	Vértice	Eixo	Zeros	Concavidade	Monotonia	Extremo	Contradomínio
3.1.	$V\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Para cima	Decrescente em $]-\infty, \frac{1}{2}]$ e crescente em $[\frac{1}{2}, +\infty[$	0 (mínimo)	$[0, +\infty[$
3.2.	$V(-3, -1)$	$x = -3$	Não tem	Para baixo	Crescente em $]-\infty, -3]$ e decrescente em $[-3, +\infty[$	-1 (máximo)	$]-\infty, -1]$

- 4.1. $f(x) = a(x-h)^2 + k$ e $h = \frac{-1+3}{2} = 1$; Assim, $f(x) = a(x-1)^2 + k$.
 $f(-1) = 0 \wedge f(2) = 6 \Leftrightarrow 4a + k = 0 \wedge a + k = 6 \Leftrightarrow a = -2 \wedge k = 8$; $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$
- 4.2. $D_f =]-\infty, 8]$
- 4.3. f é crescente em $]-\infty, 1]$ e é decrescente em $[1, +\infty[$.
- 5.1. $f(x) = a(x-1)^2 + 2$
 $f(2) = 0$
 $a(2-1)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$
 $f(x) = -2(x-1)^2 + 2$

5.2. $g(x) = a(x - 1)^2 - 4$
 $g(3) = 0$
 $a(3 - 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1$
 $g(x) = (x - 1)^2 - 4$

5.3. Abcissa do vértice: $\frac{0+4}{2} = 2$
 $h(x) = a(x - 2)^2 + k$
 $h(-2) = 0 \wedge h(0) = -3$
 $16a + k = 0 \wedge 4a + k = -3$
 $a = \frac{1}{4} \wedge k = -4$
 $h(x) = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 4$

5.4. Abcissa do vértice: $\frac{-2+4}{2} = 1$
 $i(x) = a(x - 1)^2 + k$
 $i(-2) = -1 \wedge i(0) = 3$
 $9a + k = -1 \wedge a + k = 3$
 $a = -\frac{1}{2} \wedge k = \frac{7}{2}$
 $i(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{7}{2}$

6.1. $g(x) = -2(x - 1)^2 + 2, V(1, 2)$
 $D'_g =]-\infty, 2]$; Zeros: 0 e 2

6.2. $f(x) = 3(x - 2)^2 - 3; V(2, -3)$
 $D'_f = [-3, +\infty[$; Zeros: 1 e 3

7.1. $g(x) = 10 \Leftrightarrow -2x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$
 O eixo de simetria tem equação $x = 2$.

7.2. $g(2) = -2 \times 2^2 + 8 \times 2 + 10 = 18$
 $D'_g =]-\infty, 18]$

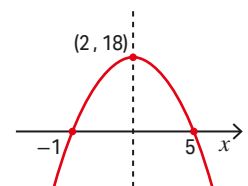
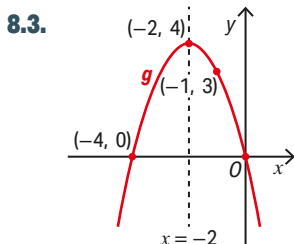
7.3. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 8x + 10 = 0 \Leftrightarrow -2(x - 2)^2 + 18 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5$
 A função g é crescente e positiva em $] -1, 2]$.

8.1. Os zeros de g são -4 e 0 .

8.2. Como $x = -2$ é eixo de simetria, a abcissa do vértice é -2 .
 Podemos escrever $g(x) = a(x + 2)^2 + k$.

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + k = 0 \\ a + k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 3 - a = 0 \\ k = 3 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ k = 4 \end{cases}$$

Logo, $g(x) = -(x + 2)^2 + 4$.



8.4. O gráfico de g tem concavidade voltada para baixo, $D'_g =]-\infty, 4]$.

8.5. A função é crescente e negativa em $] -\infty, -4]$.

9.1. $h(0) = -4,9 \times 0^2 + 29,4 \times 0 + 0,9 = 0,9$; O projétil foi lançado a 0,9 m de altura.

9.2. $-4,9t^2 + 29,4t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 6$
 Abcissa do vértice: $t = 3$
 Ordenada do vértice: $h(3) = 45$
 $h(t) = -4,9(t - 3)^2 + 45$, c.q.m.

9.3. $h(2) = -4,9 \times 1 + 45 = 40,1$ m; $t = 3$ define o eixo de simetria da parábola.
 Portanto, $h(2) = h(3 - 1) = h(3 + 1) = h(4)$.
 O projétil também esteve a 40,1 metros de altura decorridos 4 segundos.

9.4. O vértice da parábola tem coordenadas (3, 45). Logo, a altura máxima atingida foi 45 metros, passados 3 segundos do seu lançamento.

10.1. Sendo M o ponto médio de $[AB]$, os triângulos $[AMC]$ e $[ADG]$ são semelhantes.

Logo: $\frac{\overline{GD}}{4} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow \overline{GD} = \frac{4}{3}x$ e, como $\overline{DE} = 6 - 2x$, vem $A(x) = \frac{4}{3}x(6 - 2x) = 8x - \frac{8}{3}x^2$.

10.2. $A(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$
 Abcissa do vértice: $x = \frac{3}{2}$

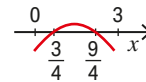
Ordenada do vértice: $A\left(\frac{3}{2}\right) = 6$; $A(x) = \frac{8}{3}(x^2 - 3x) = -\frac{8}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 6$; Vértice da parábola: $V\left(\frac{3}{2}, 6\right)$

A área é máxima para $x = \frac{3}{2}$, sendo essa área igual a 6 u. a.

10.3. $A(x) \leq \frac{9}{2} \wedge 0 < x < 3 \Leftrightarrow 8x - \frac{8}{3}x^2 \leq \frac{9}{2} \wedge 0 < x < 3 \Leftrightarrow$

$-16x^2 + 48x - 27 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \vee x = \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x \leq \frac{3}{4} \vee x \geq \frac{9}{4}\right) \wedge 0 < x < 3 \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{9}{4}, 3\right[$



Ficha 5 Equações e inequações do 2.º grau

1.1. Abcissa do vértice: $\frac{-2+4}{2} = 1$

$g(x) = a(x - 1)^2 + k$

$\begin{cases} g(-2) = 0 \\ g(0) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + k = 0 \\ a + k = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ k = -\frac{9}{2} \end{cases}$

A expressão é $g(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{9}{2}$.

1.2. a) $\frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{9}{2} = -4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - 1)^2 = -4 + \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - 1)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x - 1 = -1 \vee x - 1 = 1$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

b) $\frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - 1)^2 = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - 1)^2 = \frac{4}{2} \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow x - 1 = -2 \vee x - 1 = 2$

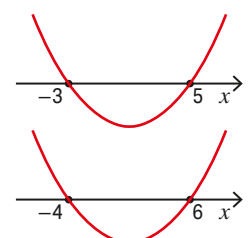
$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

1.3. a) $\frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 5$

$S =]-3, 5[$

b) $\frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{9}{2} = 8 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 6$

$S =]-\infty, -4] \cup [6, +\infty[$



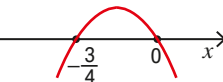
2.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow -4x^2 - 3x = -1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}$
 $\Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$
 $\Leftrightarrow x + \frac{3}{8} = -\frac{5}{8} \vee x + \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{4}$

2.2. Abcissa do vértice: $\frac{-1 + \frac{1}{4}}{2} = -\frac{3}{8}$

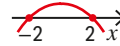
Ordenada do vértice: $f\left(-\frac{3}{8}\right) = -4\left(-\frac{3}{8}\right)^2 - 3\left(-\frac{3}{8}\right) + 1 = \frac{25}{16}$

$f(x) = -4\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{25}{16}$

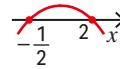
2.3. $f(x) = 1 \Leftrightarrow -4x^2 - 3x + 1 = 1 \Leftrightarrow -4x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(-4x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{3}{4}$

$S = \left[-\frac{3}{4}, 0\right]$ Esboço do gráfico: 

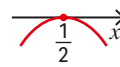
3.1. $-x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$
 $S =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$



3.2. $-2x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$
 $S = \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$



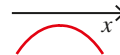
3.3. $-4x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
 $S = \emptyset$



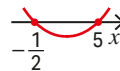
3.4. $2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$
 $S =]0, 2[$



3.5. $-4x^2 + 6x - 3 = 0$ (impossível \mathbb{R})
 $S = \emptyset$



3.6. $2x^2 - 9x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 5$
 $S = \left[-\frac{1}{2}, 5\right]$

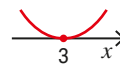


3.7. $-x^2 + 8x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4$
 $S = \mathbb{R}$



3.8. Para qualquer número real, x , $1 + 4x^2 > 0$;
 $x(1 + 4x^2) < 0 \Leftrightarrow x < 0$
 $S =]-\infty, 0[$

3.9. $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
 $S = \{3\}$



3.10. $-x^2 + 8x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4$
 $S = \mathbb{R} \setminus \{4\}$



4.1. $A(x, 0)$, $P(x, -2x + 8)$, $B(0, -2x + 8)$; $\overline{OA} = x$; $\overline{AP} = -2x + 8$
 $A(x) = \overline{OA} \times \overline{OP} = x(-2x + 8) = -2x^2 + 8x$

4.2. $A(x) = -2x^2 + 8x = -2(x^2 - 4x) = -2(x^2 - 4x + 4) + 8 = -2(x - 2)^2 + 8$; $V(2, 8)$

A área máxima do retângulo é 8 e ocorre para $x = 2$. As suas dimensões são $\overline{OA} = 2$ e $\overline{OB} = 4$.

4.3. $A(x) < 6 \wedge 0 < x < 4 \Leftrightarrow -2x^2 + 8x - 6 < 0 \wedge 0 < x < 4 \Leftrightarrow (x < 1 \vee x > 3) \wedge 0 < x < 4$
 $\Leftrightarrow x \in]0, 1[\cup]3, 4[$

Avaliação

Ficha 6 Funções afim e quadrática

pág. 38

1.1. (C)

1.2. $x \in]-2, 2[$

1.3.

x	-2		0		3		5
$f(x)$	0	↗	2	↘	-1	↗	N. D.

2.1. O gráfico de uma função afim é uma reta, logo é definida por uma expressão do tipo $g(x) = ax + b$.

$$a = \frac{-5 - 3}{3 - (-1)} = -2; g(-1) = 3 \Leftrightarrow -2 \times (-1) + b = 3 \Leftrightarrow b = 1$$

$$g(x) = -2x + 1$$

2.2. (B)

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

2.3.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-
	↘		

2.4. (C)

pág. 39

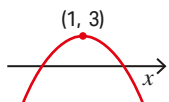
3.1. $h(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

$$\text{Abcissa do vértice: } \frac{0+2}{2} = 1$$

$$\text{Ordenada do vértice: } h(1) = 3$$

Coordenadas do vértice: (1, 3)

3.2. (A)



4.1. $P(x, 0)$ e $Q(8, x)$; $\overline{BP} = \sqrt{(x-4)^2 + 16} = \overline{BQ}$; $\overline{PQ} = \sqrt{(8-x)^2 + x^2}$;

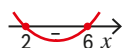
$\overline{BP}^2 + \overline{BQ}^2 = \overline{PQ}^2$. O triângulo [BPQ] é isósceles e, pelo recíproco do teorema de Pitágoras, é retângulo.

$$4.2. A(x) = \frac{\overline{BP} \times \overline{BQ}}{2} = \frac{\overline{BP}^2}{2} = \frac{(x-4)^2 + 16}{2} = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 8$$

4.3. a) $A_{[OPB]} = \frac{x \times 4}{2} = 2x$; $A(x) = 2x \wedge x \in [0, 8] \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-4)^2 + 8 = 2x \wedge x \in [0, 8] \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 8$

b) $A(x) \leq 10 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-4)^2 + 8 \leq 10 \wedge x \in [0, 8] \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + 16 \leq 20 \wedge x \in [0, 8]$

$$x^2 - 8x + 12 \leq 0 \wedge x \in [0, 8] \Leftrightarrow x \in [2, 6]$$



c) Como o vértice tem coordenadas (4, 8), a área é mínima para $x = 4$.

$$4.4. A_{[PAQ]} = \frac{(8-x) \times x}{2} = \frac{-x^2 + 8x}{2} = -\frac{x^2}{2} + 4x; A_{[BPAQ]} = A_{[BPQ]} + A_{[PAQ]} = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 8 + \left(-\frac{x^2}{2} + 4x\right) = 16$$

Ficha 7 Funções definidas por ramos

pág. 40

MMATOCAD © Porto Editora

1.1. $A(0, 10)$, $B(4, 2)$ e $C(8, 0)$; $m_{AB} = \frac{2-10}{4-0} = -2$; $AB: y = -2x + 10$

$m_{BC} = \frac{0-2}{8-4} = -\frac{1}{2}$; $BC: y = -\frac{1}{2}x + b$; $-\frac{1}{2} \times 8 + b = 0 \Leftrightarrow b = 4$; $y = -\frac{1}{2}x + 4$;

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 10 & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ -\frac{1}{2}x + 4 & \text{se } 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

1.2. a) $f(1,5) = -2 \times 1,5 + 10 = 7$

b) $f(5) = -\frac{1}{2} \times 5 + 4 = 1,5$

1.3. a) Como f é decrescente temos que $f(x) = 4 \Leftrightarrow -2x + 10 = 4 \Leftrightarrow x = 3$.

Logo, $f(x) \leq 4 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, 8]$

b) $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \in [0, 4] \Leftrightarrow f(x+2) \geq 2 \Leftrightarrow x \in [0-2, 4-2] \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$

2.1. Para $x \leq 4$, $f(x) = a(x-2)^2 + 8$;

$f(4) = 6 \Leftrightarrow a(4-2)^2 + 8 = 6 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

Para $x > 4$, $y = 2x - 10$; $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8 & \text{se } x \leq 4 \\ 2x - 10 & \text{se } x > 4 \end{cases}$

2.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8 = 0 \wedge x \leq 4\right) \vee (2x - 10 = 0 \wedge x > 4) \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 5$

2.3. f é crescente em $]-\infty, 2]$ e em $]4, +\infty]$ e é decrescente em $[2, 4]$.

f tem um máximo relativo igual a 8 para $x = 2$ e não tem extremos absolutos.

pág. 41

3.1. $g(2) + g\left(\frac{1}{2}\right) = -3 \times 2 + 1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 = -6 + 1 + \frac{1}{2} - 4 = -\frac{17}{2}$

3.2.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$g(x)$	\searrow	-4	\nearrow	-2	\searrow

3.3. Para $a = 2$ ou $a = 4$, a função h tem apenas dois zeros distintos, pois o gráfico de h é obtido a partir do gráfico de g deslocando-se a unidades na vertical.

4.1. a) Seja $h(x) = -x^2 + 4x$.

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

Abcissa do vértice: 2

Ordenada do vértice: $f(2) = 1$

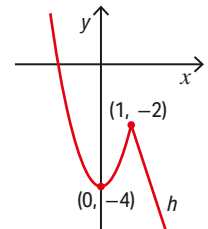
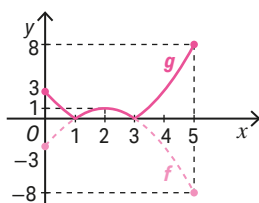
$f(x) = -(x-2)^2 + 1$; $V(2, 1)$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

c) $V(2, 1)$ e a concavidade do gráfico é voltada para baixo.

$f(0) = -0^2 + 4 \times 0 - 3 = -3$; $f(5) = -5^2 + 4 \times 5 - 3 = -8$; $D'_f = [-8, 1]$

4.2.



4.3. $D'_g = [0, 8]$

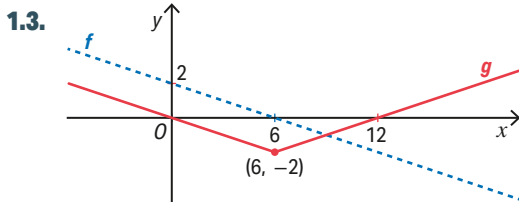
Ficha 8 Problemas com funções

pág. 42

MMAT10CAD © Porto Editora

1.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$

1.2. A função f é uma função afim cujo gráfico é uma reta com declive negativo $(-\frac{1}{3})$, logo f é **decrecente** para todo o valor de x .



1.4.
$$g(x) = \begin{cases} -\frac{x}{3} & \text{se } x \leq 6 \\ \frac{x}{3} - 4 & \text{se } x > 6 \end{cases}$$

2.1. $A(200, 100)$ e $B(250, 200)$; $m_{OA} = 0,5$; $OA: y = 0,5t$; $m_{AB} = 2$;
 $OB: y = 2t + b$; $100 = 2 \times 200 + b \Leftrightarrow b = -300$; $y = 2t - 300$

$$h(t) = \begin{cases} 0,5t & \text{se } 0 \leq t \leq 200 \\ 2t - 300 & \text{se } 200 < t \leq 250 \end{cases}$$

2.2. $1,5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$; $h(t) = 150 \Leftrightarrow 2t - 300 = 150 \Leftrightarrow t = 225$;
 $225 \text{ min} = \mathbf{3 \text{ h } 45 \text{ min}}$

2.3. $V_{\text{cubo}} = 1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$; Em 200 minutos a torneira debitou 1000 litros.
 Logo, o débito é de $1000/200 = \mathbf{5 \text{ litros por minuto}}$.

2.4. a) $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$; $h(60) = 0,5 \times 60 = 30 \text{ cm} = 3 \text{ dm}$; $V = 10 \times 10 \times 3 = 300 \text{ dm}^3 = 300 \text{ L}$
 Em alternativa, como o caudal é de 5 L/min , temos $60 \times 5 \text{ L} = \mathbf{300 \text{ L}}$.
 b) $4 \text{ h} = 240 \text{ min}$; $240 \times 5 \text{ L} = \mathbf{1200 \text{ L}}$

pág. 43

3.1. $m_{AB} = \frac{1 - 0,8}{2 - 1} = 0,2$; $AB: y = 0,2t + b$; $1 = 0,2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 0,6$; $y = 0,2t + 0,6$

$$C(t) = \begin{cases} 0,3 & \text{se } 0 < t \leq 0,5 \\ 0,8 & \text{se } 0,5 < t \leq 1 \\ 0,2t + 0,6 & \text{se } 1 < t \leq 12 \end{cases}$$

3.2. $1 \text{ h } 45 \text{ min} = 1,75 \text{ h}$
 $C(1,75) = 0,2 \times 1,75 + 0,6 = 0,95$
 O custo de um estacionamento de 1 h 45 min é $\mathbf{0,95 \text{ €}}$.

4.1. A área do trapézio $[ABQP]$ é dada por $\frac{\overline{AB} + \overline{PQ}}{2} \times \overline{QB}$.

Sei que $\overline{AB} = 12$; $\overline{QB} = x$. Preciso de calcular \overline{PQ} .

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PQ}}{12} = \frac{6-x}{6} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 2(6-x)$$

Logo, a área do trapézio $[ABQP]$ é dada por: $A(x) = \frac{12 + 2(6-x)}{2} \times x = \mathbf{12x - x^2}$

4.2. $A(x) = 20 \Leftrightarrow 12x - x^2 = 20 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 10$
 Como $x \in]0, 6[$, o valor de x para o qual a área é 20 cm^2 é $\mathbf{2 \text{ cm}}$.

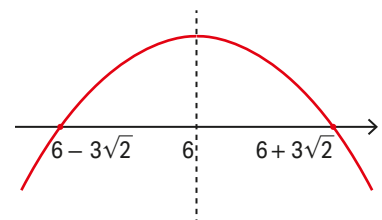
4.3. Área do retângulo: $12 \times 6 = 72$

Área do trapézio é superior ou igual a um quarto da área do retângulo:

$$A(x) \geq \frac{1}{4} \times 72 \wedge 0 < x < 6 \Leftrightarrow 12x - x^2 \geq 18 \wedge 0 < x < 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 12x - 18 \geq 0 \wedge 0 < x < 6 \Leftrightarrow \mathbf{x \in [6 - 3\sqrt{2}, 6]}$$

Cálculos auxiliares: $18 - 12x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 6 - 3\sqrt{2} \vee x = 6 + 3\sqrt{2}$



Ficha 9 Funções e tecnologia

pág. 44

1.1. A população cresce a uma taxa de 5% à hora, até atingir 1500 bactérias; aumenta 5 bactérias por hora até atingir 1600; mantém o mesmo número de bactérias durante 5 h e, de seguida, decresce a uma taxa de 5% por hora até restar 1 bactéria.

2.1. $y = -2$

2.2. Por exemplo, $x = 5$ ou $x = 0$.

2.3. $x = \text{float}(\text{input}("x = "))$

if $x > 5$ and $x \leq 8$:

$y = 5$

else:

$y = 0$

print (y)

2.4. $x = \text{float}(\text{input}("x = "))$

if $x > -2$ and $x \leq 5$:

$y = 2 * x - 2$

else:

$y = 3$

print (y)

pág. 45

3.1. Coordenadas do vértice: $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

3.2. $f(x) = -4 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{5}{3}$

3.3. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > \frac{2}{3}$

$x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[$

3.4. Ordenada de C: $y = f(0) = 1$

Abcissas de A e B:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = 1$

Área do triângulo [ABC]:

$$\frac{\overline{AB} \times \overline{OC}}{2} = \frac{\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) \times 1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ u. a.}$$

Avaliação global do tema

Ficha 10

pág. 46

1.1. $D_f = [-2, 8[; D'_f =]-3, 4]$

1.2.

x	-2		1		8
$f(x)$	-2	↗	4	↘	N. D.

Mínimo relativo: -2

Máximo absoluto: 4

1.3. (B)

1.4. (A)

2.1. $a = \frac{-1-0}{-1-2} = \frac{1}{3}; g(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 2 + b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{2}{3}$

$$g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

2.2.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

3. (D)

pág. 47

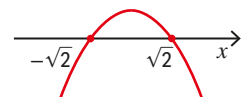
4.1. $g(x) = a(x-0)^2 + 1$

$$g(2) = -1 \Leftrightarrow a(2-0)^2 + 1 = -1 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Logo, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$.

4.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

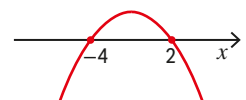
Um intervalo onde a função é decrescente e positiva é $[0, \sqrt{2}[$.



4.3. $g(x) < x - 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 1 < x - 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 < 0$

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 2$$

$$S =]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$$



4.4. (B)

5.1. Para $x \leq 3$, $f(x) = a(x-2)^2 + k$.

$$f(0) = 2 \wedge f(1) = -1 \Leftrightarrow 4a + k = 2 \wedge a + k = -1 \Leftrightarrow a = 1 \wedge k = -2$$

Para $x > 3$, $f(x) = ax + b$.

$$f(4) = 0 \wedge f(6) = -1 \Leftrightarrow 4a + b = 0 \wedge 6a + b = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \wedge b = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 2 & \text{se } x \leq 3 \\ -\frac{x}{2} + 2 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

5.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow ((x-2)^2 - 2 = 0 \wedge x \leq 3) \vee \left(-\frac{x}{2} + 2 = 0 \wedge x > 3\right)$

$$\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2} \vee x = 4$$

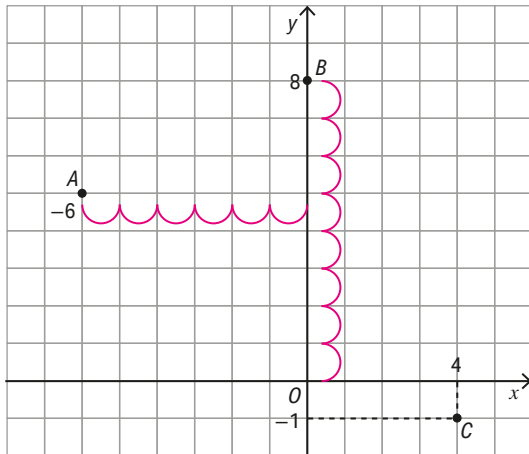
Geometria

Vamos recordar

Ficha 1 Referencial o. n. Oxy . Transformações geométricas

1.1. (B)

1.2.



O ponto C pertence ao 4.º quadrante.

1.3. $B'(0, -8)$

1.4. a) $A_{[AOB]} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$ u. a.

b) $O'(0, 0)$; $A'(6, 5)$; $B'(0, 8)$

2.1. $A(0, 3)$; $B(3, 0)$; $C(3, 3)$ e $O(0, 0)$

2.2. $A'(0, -3)$; $B(3, 0)$; $C'(3, -3)$ e $O(0, 0)$

2.3. (B)

3.1. $x=0$

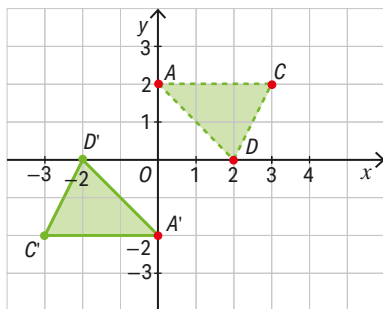
3.2. $B(0, -2)$ e $D(2, 0)$. Reta BD : $y=ax+b$; pelo ponto B resulta que $b=-2$.

Determinemos o declive: $a = \frac{0 - (-2)}{2 - 0} = 1$

Assim, BD : $y=x-2$

Como $C(3, 2)$, verifiquemos que as suas coordenadas não satisfazem a equação da reta BD . $2 \neq 3 - 2 = 1$, como se pretendia mostrar. O ponto C não pertence à reta BD .

3.3.



Ficha 2 Pontos e distâncias no plano

pág. 52

MMAT10CAD © Porto Editora

1.1. As coordenadas dos pontos são $B(-1, -2)$ e $C(3, 0)$.

1.2. As coordenadas do ponto médio de $[BC]$ são:

$$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = (1, -1)$$

1.3. Para determinar o perímetro tenho de calcular a medida entre cada vértice, ou seja, $d(O, B)$, $d(B, C)$ e $d(C, O)$.

$$d(O, B) = \sqrt{(-1-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(3-(-1))^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$d(C, O) = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2} = 3$$

Logo, o perímetro é:

$$\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 3 = 3 + 3\sqrt{5}$$

2.1. (B)

2.2. Para mostrar que o triângulo é isósceles tenho de calcular a medida de cada lado, ou seja, $d(P, Q)$, $d(Q, R)$ e $d(R, P)$.

$$d(P, Q) = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$d(Q, R) = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-(-1))^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$d(R, P) = \sqrt{(-2-(-2))^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{0+16} = 4$$

Como $d(P, Q) = d(Q, R)$, o triângulo $[PQR]$ é isósceles.

2.3. Como o triângulo é isósceles, considero $[RP]$ a base e a altura é a distância entre o ponto médio de $[RP]$ e o vértice Q .

Coordenadas do ponto médio de $[RP]$: $\left(\frac{-2+(-2)}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right) = (-2, -1)$

Altura = $\sqrt{(-2-2)^2 + (-1-(-1))^2} = \sqrt{16} = 4$

Logo, a área do triângulo é $\frac{4 \times 4}{2} = 8$.

pág. 53

3.1. As coordenadas dos pontos são $A(-1, -1)$ e $C(1, -1)$.

3.2. Os pontos B e D pertencem ao eixo Oy , logo são da forma $(0, y)$. Como o perímetro do losango é 12, o seu lado mede 3.

Temos que $d(A, B) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(0-(-1))^2 + (y-(-1))^2} = 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+(y+1)^2} = 3 \Leftrightarrow 1+(y+1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow (y+1)^2 = 8 \Leftrightarrow y+1 = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow y = -1 \pm\sqrt{8}$

As coordenadas de B e D são $(0, -1-\sqrt{8})$ e $(0, -1+\sqrt{8})$.

3.3. $A(-1, -1)$ e $B(0, -1-\sqrt{8})$, logo o ponto médio tem coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, \frac{-1-1-\sqrt{8}}{2}\right)$.

A reta vertical que passa no ponto médio do segmento $[AB]$ tem equação $x = -\frac{1}{2}$.

4. $\frac{0+2k}{2} = k \wedge \frac{k+3}{2} = 2k \Leftrightarrow k = k \wedge k+3 = 4k \Leftrightarrow 3k = 3 \Leftrightarrow k = 1$

5. $A(-2, a)$; $B(b, 1)$; $C(c, d)$;

$$B \text{ é o ponto médio de } [AC]: \frac{-2+c}{2} = b \wedge \frac{a+d}{2} = 1 \Leftrightarrow -2+c = 2b \wedge a+d = 2$$

$$C \text{ é o ponto médio de } [BD]: \frac{b+7}{2} = c \wedge \frac{-3+1}{2} = d \Leftrightarrow b+7 = 2c \wedge d = -1$$

$$\begin{cases} -2+c = 2b \\ b+7 = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ b = 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} a+d = 2 \\ d = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ d = -1 \end{cases}$$

$A(-2, 3)$; $B(1, 1)$; $C(4, -1)$

Ficha 3 Mediatriz de um segmento de reta

pág. 54

1.1. Se $P(x, y)$ é um ponto da mediatriz de $[DB]$:

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow -4y = -12x \Leftrightarrow y = 3x$$

1.2. Se a reta AD é paralela ao eixo Oy e D tem abcissa -2 , então AD é a reta de equação $x = -2$.

O ponto A pertence à reta de equação $x = -2$ e, como $\overline{AD} = \overline{AB}$, também A pertence à mediatriz de $[DB]$:

$$x = -2 \wedge y = 3x \Leftrightarrow x = -2 \wedge y = -6. \text{ Logo, } A(-2, -6).$$

Como o lado $[BC]$ é paralelo ao lado $[AD]$, o ponto C pertence à reta de equação $x = 4$ e à mediatriz de $[DB]$:

$$x = 4 \wedge y = 3x \Leftrightarrow x = 4 \wedge y = 12. \text{ Logo, } C(4, 12).$$

1.3. Um losango é um paralelogramo. Logo, $A_{[ABCD]} = \frac{D \times d}{2} = \overline{AB} \times h$, em que $D = \overline{AC}$, $d = \overline{BD}$ e h é a medida da altura do paralelogramo relativa à base $[AB]$.

$$D = \overline{AC} = \sqrt{(4+2)^2 + (12+6)^2} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}; \quad d = \overline{BD} = \sqrt{(-2-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10};$$

$$\overline{AB} = \overline{AD} = |4+6| = 10$$

$$A_{[ABCD]} = \frac{6\sqrt{10} \times 2\sqrt{10}}{2} = 6 \times 10 = 60 \text{ e } A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times h = 10h$$

Temos, portanto, $10h = 60$, pelo que $h = 6$.

2.1. $r: y = mx + b$; b = ordenada de $A = 8$.

$C(3, 2) \in r$. Logo, $2 = m \times 3 + 8 \Leftrightarrow m = -2$, pelo que a equação reduzida de r é $y = -2x + 8$.

Como $B(x, 0) \in r$, $0 = -2x + 8 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$. Logo, B tem coordenadas $(4, 0)$.

2.2. Como $(2, 4)$ é o ponto médio de $[AB]$, pois $\left(\frac{0+4}{2}, \frac{8+0}{2}\right) = (2, 4)$, a reta pedida é a mediatriz de $[AB]$.

Se $P(x, y)$ é um ponto da mediatriz de $[AB]$, então:

$$(x+0)^2 + (y-8)^2 = (x-4)^2 + (y-0)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 16y + 64 = x^2 - 8x + 16 + y^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 3$$

pág. 55

3.1. Se $P(x, y)$ é um ponto da mediatriz de $[AC]$, então:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = (x+1)^2 + (y-7)^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

3.2. Dado que o quadrilátero $[ABCD]$ é um losango, $\overline{BA} = \overline{BC}$. Logo, o ponto B pertence à mediatriz de $[AC]$.

Como B também pertence à reta de equação $y = x$, então B é o ponto de interseção das duas retas.

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \wedge y = x \Leftrightarrow 2x = x + 5 \wedge y = x \Leftrightarrow x = 5 \wedge y = 5. \text{ Temos, então, } B(5, 5).$$

- 3.3.** $\overline{AC} = \sqrt{(-1-3)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{80}$; $\overline{AB} = \sqrt{(5-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{40}$; $\overline{BC} = \overline{AB} = \sqrt{40}$
 ([ABCD] é um losango)
 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = (\sqrt{40})^2 + (\sqrt{40})^2 = 80 = \overline{AC}^2$;
 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$. Logo, o ângulo CBA é reto.

Dado que num paralelogramo (um losango é um paralelogramo) os ângulos adjacentes ao mesmo lado são suplementares e os ângulos opostos são iguais, podemos concluir que os quatro ângulos internos do losango [ABCD] são retos. Logo, o losango [ABCD] é um quadrado.

- 4.1.** Seja $P(x, y)$ um ponto da mediatriz de [AB].
 $(x+2)^2 + (y+1)^2 = (x-6)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow y = -2x + 5$
- 4.2.** a) $C(0, y)$ pertence à reta de equação $y = -2x + 5$, porque $\overline{AC} = \overline{BC}$:
 $y = -2 \times 0 + 5 \Leftrightarrow y = 5$. Logo, $C(0, 5)$.
 b) $C(x, -3)$ pertence à reta de equação $y = -2x + 5$:
 $-3 = -2x + 5 \Leftrightarrow 2x = 5 + 3 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$. Logo, $C(4, -3)$.
- 4.3.** C é o ponto de interseção das retas $y = -x$ e $y = -2x + 5$.
 Como $y = -x \wedge y = -2x + 5 \Leftrightarrow x = 5 \wedge y = -5$, temos $C(5, -5)$.
 $\overline{AB} = \sqrt{(6+2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$. A altura do triângulo relativa à base [AB] é $h = \overline{MC}$, sendo M o ponto médio de [AB]. $M(2, 1)$ e $h = \overline{MC} = \sqrt{(5-2)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.
 Logo, $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times h}{2} = \frac{4\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}}{2} = 2 \times 3(\sqrt{5})^2 = 6 \times 5 = 30$.

Ficha 4 Equação reduzida da circunferência

pág. 56

- 1.1.** Seja $P(x, y)$ um ponto da mediatriz:
 a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = (x-0)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
 b) $(x-0)^2 + (y-3)^2 = (x+4)^2 + (y-5)^2 \Leftrightarrow y = 2x + 8$
- 1.2.** O centro da circunferência é o ponto de interseção das mediatrizes de [AB] e [BC]:
 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \wedge y = 2x + 8 \Leftrightarrow x = -5 \wedge y = -2$. O centro da circunferência é o ponto $D(-5, -2)$.
 Raio: $r = \overline{DB} = \sqrt{(-5-0)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
- 1.3.** $M(1, 1)$. O centro da circunferência é o ponto E de interseção da mediatriz de [AB] com o eixo Ox :
 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \wedge y = 0 \Leftrightarrow x = -1 \wedge y = 0$, logo $E(-1, 0)$.
 $r = \overline{EM} = \sqrt{(1+1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$
 Equação: $(x+1)^2 + y^2 = 5$
- 2.1.** A abscissa de E é 4, substituindo na equação da circunferência de centro A obtemos
 $(4-4)^2 + (y-3)^2 = 25 \Leftrightarrow (y-3)^2 = 25 \Leftrightarrow y-3 = \pm 5 \Leftrightarrow y = 3 \pm 5$
 Como E tem ordenada negativa as suas coordenadas são $(4, -2)$.
 Como A e B têm a mesma ordenada, temos que E e F também têm a mesma ordenada.
 As coordenadas de F são $(9, -2)$.
- 2.2.** $B(4+5, 3) = (9, 3)$. Equação da circunferência de centro B : $(x-9)^2 + (y-3)^2 = 25$
 $(x-9)^2 + (y-3)^2 = 25 \wedge y = 0 \Leftrightarrow (x-9)^2 = 16 \wedge y = 0 \Leftrightarrow (x=5 \vee x=13) \wedge y = 0$. A abscissa de C é 5.
- 2.3.** $A = A_{[AEFB]} - \frac{1}{4}A_{\text{círculo}} = 5^2 - \frac{\pi \times 5^2}{4} = 25 - \frac{25\pi}{4}$

3.1. Coordenadas: $A(-6, 1)$ e $B(2, -3)$

Declive: $\frac{-3-1}{2-(-6)} = -\frac{1}{2}$

Obtemos $-\frac{1}{2} \times 2 + b = -3 \Leftrightarrow -1 + b = -3 \Leftrightarrow b = -2$

A equação reduzida da reta AB é $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

3.2. $A(-6, 1)$ e $B(2, -3)$; $\overline{AB} = \sqrt{(2+6)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$;
 $r_1 + r_2 = \sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

Dado que $\overline{AB} > r_1 + r_2$, podemos concluir que as circunferências \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 não se interseçam.

3.3. Centro C , ponto médio de $[AB]$: $C\left(\frac{-6+2}{2}, \frac{1-3}{2}\right) = C(-2, -1)$; raio: $r_3 = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{80}}{2} = \sqrt{20}$

Equação: $\mathcal{C}_3: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 20$

3.4. $C(-2, -1)$; $\mathcal{C}_2: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 20$

$(-2-2)^2 + (-1+3)^2 = 20 \Leftrightarrow 16 + 4 = 20$ (verdadeiro)

4.1. $C(1, 3)$: $(1-3)^2 + (3-6)^2 = 13 \Leftrightarrow 4 + 9 = 13$ (verdadeiro); $1 \times (1+6) + 3^2 = 16 \Leftrightarrow 7 + 9 = 16$ (verdadeiro)

Logo, como C pertence a \mathcal{C}_1 e a \mathcal{C}_2 , podemos concluir que C é um ponto de interseção das duas circunferências.

4.2. Centro de \mathcal{C}_1 : $A(3, 6)$

$\mathcal{C}_2: x(x+6) + y^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 = 16 \Leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 = 25$; centro de \mathcal{C}_2 : $B(-3, 0)$

Se $P(\alpha, \beta)$ é um ponto da mediatriz de $[AB]$, então:

$d(P, A) = d(P, B) \Leftrightarrow (\alpha-3)^2 + (\beta-6)^2 = (\alpha+3)^2 + \beta^2 \Leftrightarrow -12\alpha - 12\beta = -36 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 3$

Ficha 5 Semiplanos

1.1. $r: x=0$

1.2. Ponto médio de $[AB]$: $\left(\frac{0+(-1)}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$

Paralela a Ox , portanto t é uma reta horizontal e a sua equação é $y = -1$.

1.3. (D)

A interseção das retas r e t é representada pela condição $x=0 \wedge y=-1$, portanto o ponto de interseção é $(0, -1)$.

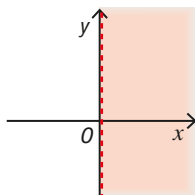
1.4. A equação reduzida tem a expressão: $y = mx + b$

Calcular m : $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-3-1}{0-(-1)} = -4$

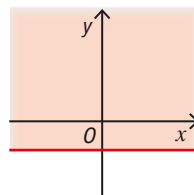
Como A pertence à reta e a sua abcissa é zero, concluímos que a ordenada na origem é -3 .

A equação reduzida da reta AB é $y = -4x - 3$.

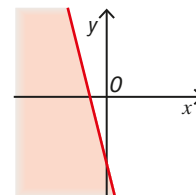
1.5. a)

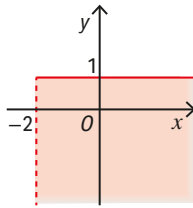
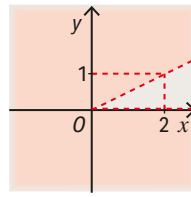
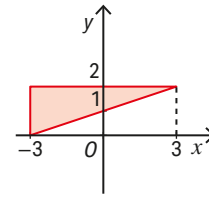


b)



c)



2.1.

2.2.

2.3.


3.1. $x \geq 0 \wedge y \leq 0 \wedge y \geq x - 2$

3.2. $(y \leq 0 \wedge y \geq x - 2) \vee x \leq 0$

3.3. $y \geq x - 2 \wedge (x \leq 0 \vee y \geq 0)$

4. Altura do paralelogramo: $h = 3$.

$$A_{[ABCD]} = 15 \Leftrightarrow \overline{AB} \times h = 15 \Leftrightarrow \overline{AB} \times 3 = 15 \Leftrightarrow \overline{AB} = 5. \text{ Logo, } B(1 + 5, 0) = (6, 0).$$

$$\text{Reta } BC: m = \frac{3-0}{8-6} = \frac{3}{2}; y - 0 = \frac{3}{2}(x - 6) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 9. \text{ A reta } AD \text{ é paralela a } BC: y - 0 = \frac{3}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$\text{Condição: } \frac{3}{2}x - 9 \leq y \leq \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \wedge 0 \leq y \leq 3$$

5.1. $C(0, 2), A(k, 0), B(k, k)$;

$$A_{[OABC]} = 24 \Leftrightarrow \frac{2+k}{2} \times k = 24 \Leftrightarrow 2k + k^2 = 48 \Leftrightarrow k^2 + 2k - 48 = 0 \Leftrightarrow_{k>0} k = 6$$

5.2. $C(0, 2); A(6, 0); B(6, 6)$: reta $CB: y = mx + b; m = \frac{6-2}{6-0} = \frac{2}{3}; b = 2; CB: y = \frac{2}{3}x + 2$

$$\text{Condição: } 0 \leq y \leq \frac{2}{3}x + 2 \wedge 0 \leq x \leq 6$$

5.3. Seja $P(x, y)$ um ponto da mediatriz de $[AC]$.

$$d(P, A) = d(P, C) \Leftrightarrow (x - 6)^2 + (y - 0)^2 = (x - 0)^2 + (y - 2)^2 \Leftrightarrow y = 3x - 8$$

5.4. Dado que $[AFCG]$ é um losango, F e G pertencem à mediatriz de $[AC]$. G pertence ao eixo Oy e F pertence à reta de equação $x = 6$. Ponto $G: x = 0 \wedge y = 3x - 8 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = -8; G(0, -8)$.

$$\text{Ponto } F: x = 6 \wedge y = 3x - 8 \Leftrightarrow x = 6 \wedge y = 10; F(6, 10)$$

6.1. raio $= d(O, A) = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

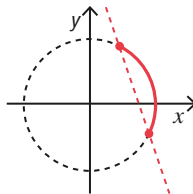
$$\text{A equação da circunferência é } x^2 + y^2 = 5$$

6.2. Tenho de provar que $B(2, -1)$ satisfaz a condição $x^2 + y^2 = 5$

$$2^2 + (-1)^2 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \text{ verdadeira; } B \text{ pertence à circunferência.}$$

6.3. Declive: $\frac{-1-2}{2-1} = -3$; ordenada na origem: $-3 \times 1 + b = 2 \Leftrightarrow b = 5$

$$\text{Equação reduzida da reta } AB: y = -3x + 5$$

6.4.


Ficha 6 Círculo

pág. 60

1. (C)

Resolução: $d(A, P) \leq d(B, A)$ define um círculo de centro A e raio \overline{AB} . Logo, a resposta é C .

2.1. Como a origem tem coordenadas $(0, 0)$, tenho de provar que substituindo na condição obtemos uma proposição verdadeira.

$(0+1)^2 + (0-2)^2 \leq 8 \Leftrightarrow 1+4 \leq 8 \Leftrightarrow 5 \leq 8$, proposição verdadeira. Logo, a origem pertence ao conjunto A .

2.2. Como a ordenada é 4, substituímos na condição o y por 4, obtemos

$$(x+1)^2 + (4-2)^2 \leq 8 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 4 \leq 8 \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 4$$

Os números que ao quadrado são menores que 4 são os números entre -2 e 2 , logo

$$(x+1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow -2-1 \leq x \leq 2-1 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$$

Logo, a abcissa de B pertence a $[-3, 1]$.

3.1. Centro: $(3, -1)$

Raio: 3

$$(x-3)^2 + (y-(-1))^2 \leq 3^2$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 \leq 9$$

3.2. Centro: $(-3, -1)$

Raio: distância do centro à origem

$$\text{Raio: } \sqrt{(-3-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$(x-(-3))^2 + (y-(-1))^2 \leq \sqrt{10}^2$$

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 \leq 10$$

pág. 61

4.1. A condição representa um círculo de centro A e raio \overline{AB} :

$$d(B, A) = \sqrt{(1-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$(x-1)^2 + (y-(-1))^2 \leq \sqrt{17}^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 17$$

4.2. Substituindo na condição anterior as coordenadas de Q , temos de obter uma condição verdadeira.

$(1-1)^2 + (3+1)^2 \leq 17 \Leftrightarrow 0+16 \leq 17 \Leftrightarrow 16 \leq 17$, proposição verdadeira. Logo, Q pertence ao conjunto.

4.3. Por exemplo, $(5, 7)$.

$$(5-1)^2 + (7+1)^2 \leq 17 \Leftrightarrow 16+64 \leq 17 \Leftrightarrow 80 \leq 17, \text{ proposição falsa}$$

Logo $(5, 7)$ não pertence ao conjunto definido na alínea.

5.1. Mediatriz de $[AB]$: $(x+3)^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-6)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x = -6x + 9 - 12y + 36 \Leftrightarrow y = -x + 3$$

5.2. Declive: $\frac{6}{3} = 2$

Ordenada na origem: 0

A equação da reta s é $y = 2x$.

5.3. O centro da circunferência é o ponto de interseção da mediatriz de $[AB]$ com a reta s .

$$\text{Centro da circunferência: } y = 2x \wedge y = -x + 3 \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 2$$

Logo, $C(1, 2)$.

5.4. Centro: (1, 2)

Raio: distância de C a A

$$\text{Raio: } \sqrt{(-3-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq \sqrt{20}^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 20$$

5.5. D é o ponto de interseção das retas r e s.

Como r é paralela a Oy e passa em A tem equação $x = -3$.

Coordenadas de D: $y = 2x \wedge x = -3 \Leftrightarrow x = -3 \wedge y = -6$

Logo, D (-3, -6).

Ficha 7 Geometria no plano e tecnologia

pág. 62

1.1. O triângulo é equilátero.

1.2. Três medidas formam um triângulo se e só se a soma de duas delas é maior que a outra. Neste caso $2+2$ não é maior que 6, logo não é possível obter um triângulo.

1.3. lado1=2

lado2=2

lado3=6

if lado1+lado2 > lado3 and lado3+lado2 > lado1 and lado1+lado3 > lado2:

if lado1 == lado2 == lado3:

print ("O triângulo é equilátero.")

elif lado1 == lado2 or lado1 == lado3 or lado2 == lado3:

print ("O triângulo é isósceles.")

else:

print ("O triângulo é escaleno.")

else:

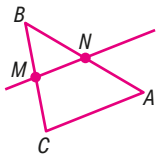
print ("Com essas medidas não é possível formar um triângulo.")

1.4. A condição para classificar um triângulo dado depende de três medidas: a, b, c

- escolher a maior medida, por exemplo, a
- testar se $a^2 = b^2 + c^2$ para ser um triângulo retângulo
- testar se $a^2 < b^2 + c^2$ para ser um triângulo acutângulo
- testar se $a^2 > b^2 + c^2$ para ser um triângulo obtusângulo

pág. 63

2.1.



A reta é estritamente paralela ao lado do triângulo que não foi bisetado.

2.2. Duas retas paralelas têm o mesmo declive.

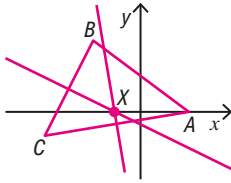
Sejam, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$. As coordenadas dos pontos médios de [AB] e [BC] são

$$N\left(\frac{x_B+x_A}{2}, \frac{y_B+y_A}{2}\right) \text{ e } M\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right).$$

$$\text{O declive da reta } AC \text{ é } \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \text{ e o declive da reta } NM \text{ é } \frac{\frac{y_B+y_C}{2} - \frac{y_B+y_A}{2}}{\frac{x_B+x_C}{2} - \frac{x_B+x_A}{2}} = \frac{y_B+y_C - (y_B+y_A)}{x_B+x_C - (x_B+x_A)} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$$

Como são iguais as retas AC e NM são paralelas.

2.3.



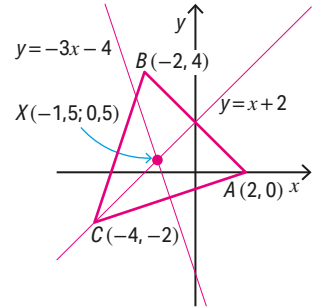
2.4. Mediatriz de $[AB]: (x - 2)^2 + y^2 = (x + 2)^2 + (y - 4)^2 \Leftrightarrow -4x = 4x - 8y + 16 \Leftrightarrow y = x + 2$

Mediatriz de $[AC]: (x - 2)^2 + y^2 = (x + 4)^2 + (y + 2)^2 \Leftrightarrow -4x = 8x + 16 + 4y \Leftrightarrow y = -3x - 4$

Para determinar a interseção resolvo o sistema de equações:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -3x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2 = -3x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ 4x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

O ponto de interseção das mediatrizes do triângulo $[ABC]$ tem coordenadas $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.



MMATOCAD © Porto Editora

Avaliação

Ficha 8 Geometria analítica no plano

pág. 64

1.1. A mediatriz de $[AB]$ é dada pela condição:

$$(x - 0)^2 + (y - (-3))^2 = (x - (-1))^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y + 3)^2 = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow 6y + 2y = 2x + 2 - 9 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{8}$$

1.2. (D)

A mediatriz de $[AB]$ é perpendicular a AB , portanto tem o mesmo declive: $m = \frac{1}{4}$

Como passa em $B(-1, 1)$, substituímos o m e as coordenadas de B e obtemos $\frac{1}{4} \times (-1) + b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{5}{4}$

A equação reduzida é $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$. Resposta: (D)

1.3. (A)

C pertence à reta de equação $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ e tem ordenada zero. Assim, $0 = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = -5$ e $C(-5, 0)$.

1.4. $\overline{AB} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (1 + 3)^2} = \sqrt{17}$; $\overline{CB} = \sqrt{(-1 + 5)^2 + (1 + 0)^2} = \sqrt{17}$

Como a medida dos catetos é a mesma, o triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo isósceles.

1.5. Centro = Coordenadas do ponto médio de $[AC]: (-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$

$$\text{Raio} = \frac{d(A, C)}{2} = \frac{\sqrt{25 + 9}}{2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{34}}{2}\right)^2 = \frac{34}{4} = \frac{17}{2}$$

Equação da circunferência: $(x + \frac{5}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{17}{2}$

1.6. $B(-1, 1)$ substitui-se na equação e obtemos $(-1 + \frac{5}{2})^2 + (1 + \frac{3}{2})^2 = \frac{17}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{17}{2} \Leftrightarrow \frac{34}{4} = \frac{17}{2}$

Como satisfaz a condição, o ponto B pertence à circunferência.

1.7. (B)

$AB: y = -4x - 3$

$BC: y = \frac{x}{4} + \frac{5}{4}$

$AC: y = -\frac{3}{5}x - 3$

$y \leq -4x - 3 \wedge y \leq \frac{x}{4} + \frac{5}{4} \wedge y \geq -\frac{3}{5}x - 3$

2.1. Como A pertence ao eixo Oy , as coordenadas de A são $(0, y)$ e como também pertence à reta r , temos $2 \times 0 - y = 2 \Leftrightarrow -y = 2 \Leftrightarrow y = -2$
 Como B pertence ao eixo Ox , as coordenadas de B são $(x, 0)$ e como também pertence à reta r , temos $2x - 0 = 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$
 As coordenadas são $A(0, -2)$ e $B(1, 0)$.

2.2. Coordenadas do ponto médio de $[AB]$: $C\left(\frac{0+1}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

Portanto, $R\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

2.3. A equação reduzida tem a expressão: $y = mx + b$

$$\text{Calcular } m: m = \frac{y_R - y_B}{x_R - x_B} = \frac{1 - 0}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

Calcular a ordenada na origem: substituir o m e as coordenadas de B na equação $mx + b = y$
 $-\frac{2}{3} \times 1 + b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{2}{3}$

A equação reduzida da reta AB é $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$.

2.4. (C)

$$(x-0)^2 + (y+2)^2 = (x-1)^2 + (y-0)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y + 4 = -2x + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{4}x - \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

2.5. Uma reta perpendicular a r tem de ter o mesmo declive que a mediatriz do segmento de reta $[AB]$.
 Como os declives, da mediatriz é $-\frac{1}{2}$ e o declive da reta RB é $-\frac{2}{3}$, são diferentes, logo a reta RB não é perpendicular à reta r .

2.6. A área do triângulo $[ABR]$ é igual à soma das áreas dos triângulos $[EAB]$ com $[EAR]$.

$$A_{[EAB]} = \frac{EA \times |x_B|}{2} = \frac{\left(2 + \frac{2}{3}\right) \times 1}{2} = \frac{4}{3}$$

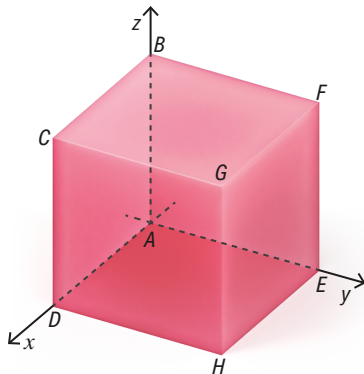
$$A_{[EAR]} = \frac{EA \times |x_R|}{2} = \frac{\left(2 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Portanto, } A_{[ABR]} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

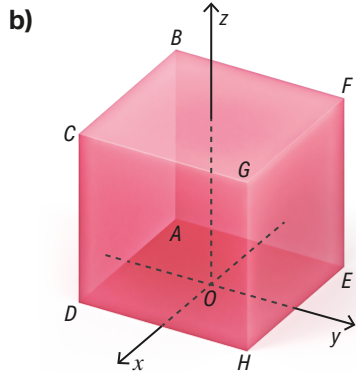
Ficha 9 Referenciais cartesianos no espaço

1.1. Seja a a aresta do cubo. O cubo tem como faces seis quadrados de lado a .
 Área total do cubo $= 6a^2$. Logo, $6a^2 = 24 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$
 Como se trata de uma medida, a aresta do cubo é 2 cm.

1.2. a)

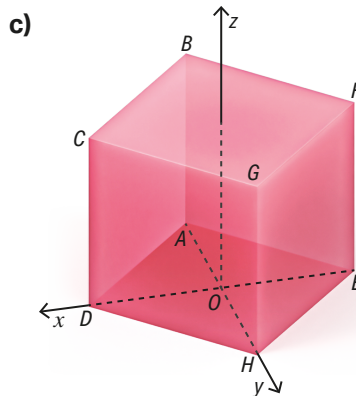


$A(0, 0, 0)$; $B(0, 0, 2)$; $C(2, 0, 2)$; $D(2, 0, 0)$; $E(0, 2, 0)$; $F(0, 2, 2)$; $G(2, 2, 2)$; $H(2, 2, 0)$
 A origem é A ; Eixo xx : AD ; Eixo yy : AE ; Eixo zz : AB



$$A(-1, -1, 0); B(-1, -1, 2); C(1, -1, 2); D(1, -1, 0);$$

$$E(-1, 1, 0); F(-1, 1, 2); G(1, 1, 2); H(1, 1, 0)$$



$$\overline{OD}: a^2 + a^2 = 2^2 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

$$A(0, -\sqrt{2}, 0); B(0, -\sqrt{2}, 2); C(\sqrt{2}, 0, 2); D(\sqrt{2}, 0, 0);$$

$$E(-\sqrt{2}, 0, 0); F(-\sqrt{2}, 0, 2); G(0, \sqrt{2}, 2); H(0, \sqrt{2}, 0)$$

2. $A(-1, 4, 1), B(0, 4, 0), C(-2, 2, 2), D(-1, 1, 3), E(0, 0, 2), F(-1, -3, 1),$
 $G(0, -2, 0), H(-1, -2, -1), I(4, -2, 0), J(5, 0, 0), K(4, -1, -2), L(5, 3, 1),$
 $M(4, 3, -2), N(-1, 1, -2), O(0, 0, 0), P(1, 3, -1), Q(-1, 4, -2)$

3.1. $\overline{AB} = \overline{EH} = 4; \overline{AB} \times \overline{AD} = 8 \Leftrightarrow 4 \times \overline{AD} = 8 \Leftrightarrow \overline{AD} = 2;$
 $\overline{AB} \times \overline{AD} \times \overline{AF} = 72 \Leftrightarrow 4 \times 2 \times (\overline{OA} + \overline{OF}) = 72 \Leftrightarrow 8 \times (\overline{OA} + 2\overline{OA}) = 72 \Leftrightarrow 3\overline{OA} = 9 \Leftrightarrow \overline{OA} = 3;$
 $\overline{OF} = 2\overline{OA} = 2 \times 3 = 6$

$A(0, 0, -3), B(4, 0, -3), C(4, 2, -3), D(0, 2, -3), E(0, 2, 6), F(0, 0, 6), G(4, 0, 6)$ e
 $H(4, 2, 6)$

3.2. $H(4, 2, 6)$
 $E(0, 2, 6)$

Como P pertence a $[HE]$, as suas coordenadas são $(x, 2, 6)$
 O volume da pirâmide $[EFPD]$:

• é um nono do volume do prisma: $\frac{72}{9} = 8$

• $\frac{\text{área da base} \times \text{altura}}{3} = \frac{2 \times x}{2} \times 9 : 3 = 3x$

Temos que, $3x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$.

As coordenadas de P são $(\frac{8}{3}, 2, 6)$.

Ficha 10 Planos paralelos aos planos coordenados. Retas paralelas aos eixos coordenados

pág. 68

MMATOCAD © Porto Editora

1.1. $A(2, 3, 5); B(2, 3, 2); C(2, 6, 2); F(-3, 3, 5); G(-3, 6, 5); H(-3, 6, 2)$

1.2. a) $x = 2$

b) $y = 6$

c) $z = 2$

d) $x = -3$

e) $y = 3$

f) $z = 5$

1.3. a) $x = 2 \wedge y = 3$

b) $y = 6 \wedge z = 2$

c) $x = -3 \wedge z = 5$

1.4. $\overline{AB} = z_A - z_B = 5 - 2 = 3; \overline{BC} = y_C - y_B = 6 - 3 = 3; \overline{AF} = x_A - x_F = 2 - (-3) = 5$

$V_{[ABCDGHEF]} = 3^2 \times 5 = 45$

Condição da aresta $[DG]$: $y = 6 \wedge z = 5 \wedge -3 \leq x \leq 2$, pelo que $P(x, 6, 5)$, com $-3 \leq x \leq 2$.

Base da pirâmide: $[ABCD]$; considere-se a altura da pirâmide: a

$V_{[ABCDP]} = \frac{1}{3} \times 3^2 \times a = 3a$

Como $V_{[ABCDP]} = \frac{1}{5} V_{[ABCDGHEF]}$, temos que $3a = 9 \Leftrightarrow a = 3$

A distância de D a P tem de ser 3, logo a abcissa de P é $2 - 3 = -1$.

As coordenadas de P são $(-1, 6, 5)$.

2.1. $y = 3$

2.2. $x = -1 \wedge z = 5$

pág. 69

3.1. Se U e V pertencem ao eixo Oy e DC é paralela ao eixo Ox e as bases são quadrados de lado $|5 + (-5)| = 10$, então as faces do prisma estão contidas nos planos de equações $z = 5, z = -5, x = 5, x = -5, y = -4$ e $y = 8$.

Portanto: $A(5, -4, -5); B(-5, -4, -5); C(-5, -4, 5); D(5, -4, 5); E(5, 8, 5); F(5, 8, -5); G(-5, 8, -5); H(-5, 8, 5)$

3.2. a) $[FE]: x = 5 \wedge y = 8 \wedge -5 \leq z \leq 5$

b) $[DEHC]: -5 \leq x \leq 5 \wedge -4 \leq y \leq 8 \wedge z = 5$

3.3. Seja M o ponto médio de $[CD]$. $\overline{UM} = 5; \overline{UV} = |8 - (-4)| = 12$

$\overline{MV}^2 = \overline{UM}^2 + \overline{UV}^2 \Leftrightarrow \overline{MV}^2 = 5^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{MV}^2 = 169 \Leftrightarrow \overline{MV} = \sqrt{169} \Leftrightarrow \overline{MV} = 13$

\overline{MV} é a medida da altura do triângulo $[DVC]$, pelo que $A_{[DVC]} = \frac{\overline{DC} \times \overline{MV}}{2} = \frac{10 \times 13}{2} = 65$.

$A_{\text{lateral}} = 4 \times A_{[DVC]} = 4 \times 65 = 260$ u. a.

4.1. $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} \Leftrightarrow 216 = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times \overline{AV} \Leftrightarrow 12 \times (\overline{AO} + \overline{OV}) = 216 \Leftrightarrow \overline{AO} + 9 = 18 \Leftrightarrow \overline{AO} = 9$.

A altura da água é 9 dm.

4.2. $A(0, 0, -9), B(6, 0, -9), C(6, 6, -9), D(0, 6, -9)$ e $V(0, 0, 9)$

4.3. A parte da pirâmide não submersa é uma pirâmide semelhante à pirâmide $[ABCDV]$, sendo a razão de semelhança na redução $r = \frac{\overline{OV}}{\overline{AV}} = \frac{9}{9+9} = \frac{1}{2}$. Logo, $V_{\text{pirâmide exterior}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times V_{\text{pirâmide } [ABCDV]} = \frac{1}{8} \times 216 = 27$ e $V_{\text{água no depósito}} = (216 - 27) \text{ dm}^3 = 189 \text{ dm}^3$. Existem no depósito 189 litros de água.

Ficha 11 Distância entre dois pontos e ponto médio de um segmento de reta no espaço

pág. 70

MMATOCAD © Porto Editora

1.1. $\overline{AB} = \sqrt{(0+1)^2 + (5-3)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{9} = 3;$

$\overline{AC} = \sqrt{(2+1)^2 + (4-3)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{10};$

$\overline{BC} = \sqrt{(2-0)^2 + (4-5)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$

O triângulo $[ABC]$ é isósceles.

1.2. $\overline{AB} = \sqrt{(3-5)^2 + (3+1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{36} = 6;$

$\overline{AC} = \sqrt{(5-5)^2 + (-6+1)^2 + (7+3)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5};$

$\overline{BC} = \sqrt{(5-3)^2 + (-6-3)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{121} = 11.$

O triângulo $[ABC]$ é escaleno.

1.3. $\overline{AB} = \sqrt{(-2+3)^2 + (2+2)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{81} = 9;$

$\overline{AC} = \sqrt{(6+3)^2 + (-2+2)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{81 \times 2} = 9\sqrt{2};$

$\overline{BC} = \sqrt{(6+2)^2 + (-2-2)^2 + (-4+3)^2} = \sqrt{81} = 9.$

O triângulo $[ABC]$ é isósceles.

2.1. $\overline{AB} = \sqrt{(1-4)^2 + (6+2)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{98};$

$\overline{AC} = \sqrt{(-2-4)^2 + (0+2)^2 + (1-4)^2} = 7;$

$\overline{BC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (0-6)^2 + (1+1)^2} = 7.$

Como $\overline{AC} = \overline{BC}$, o triângulo $[ABC]$ é isósceles; $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 7^2 + 7^2 = 49 + 49 = 98 = \overline{AB}^2.$

Pelo recíproco do teorema de Pitágoras, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C .

2.2. Seja $P(0, 0, z)$. $d(A, P) = d(A, O) \Leftrightarrow \sqrt{(0-4)^2 + (0+2)^2 + (z-4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (z-4)^2 = 16 \Leftrightarrow_{z>0} z = 8; P(0, 0, 8)$

2.3. Coordenadas de P : $\left(\frac{1+(-2)}{2}, \frac{6+0}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 3, 0\right)$

Coordenadas do ponto médio de $[AP]$: $\left(\frac{4 + \left(-\frac{1}{2}\right)}{2}, \frac{-2+3}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, 2\right)$

3.1. $\overline{AC} = \sqrt{(0,8-2)^2 + (-1+1)^2 + (7,4+1)^2} = \sqrt{1,44+0+70,56} = \sqrt{72}$

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 = (\sqrt{72})^2 \Leftrightarrow 2\overline{AB}^2 = 72 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 36 \Leftrightarrow_{AB>0} \overline{AB} = 6.$ A medida da aresta do cubo é 6.

3.2. $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 6 = 72$ u.v.

pág. 71

4.1. $d(A, B) = \sqrt{(2-(-3))^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{26}$

4.2. C pertence ao eixo Oy , portanto $C(0, c, 0)$

Como $d(A, C) = d(B, C) \Leftrightarrow 4 + (c-1)^2 = 9 + c^2 \Leftrightarrow c^2 - 2c + 1 + 4 = 9 + c^2 \Leftrightarrow c = -2$

As coordenadas de C são $(0, -2, 0)$.

4.3. $d(A, C) = d(B, C) = \sqrt{(0+3)^2 + (-2-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Área da base: $\frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{\sqrt{13} \times \sqrt{13}}{2} = \frac{13}{2}$

Volume do prisma = $\frac{13}{2} \times \text{altura}$

$26 = \frac{13}{2} \times \text{altura} \Leftrightarrow \text{altura} = 4$

4.4. $x = 0 \wedge y = -2$

4.5. Coordenadas de $F(0, -2, 4)$

Ponto médio de $[FA]$: $\left(\frac{0+2}{2}, \frac{-2+1}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = \left(1, -\frac{1}{2}, 2\right)$

Equação do plano paralelo a xOz : $y = -\frac{1}{2}$

4.6. Coordenadas: $A(2, 1, 0)$; $E(-3, 0, 4)$; $P(0, y, 0)$

$$d(E, A) = d(E, P) \Leftrightarrow \sqrt{(2+3)^2 + (1-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-y)^2 + (4-0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 + 1 + 16 = 9 + y^2 + 16 \Leftrightarrow y^2 = 17 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{17}$$

Como P pertence ao semieixo positivo, as coordenadas são $(0, \sqrt{17}, 0)$.

Ficha 12 Plano mediador

pág. 72

1.1. Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano mediador.

$$d(A, P) = d(B, P) \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = (x-0)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow -4x + 4y = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$$

1.2. Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano mediador.

$$d(A, P) = d(B, P) \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-7)^2 + (z-0)^2 = (x-5)^2 + (y+5)^2 + (z-4)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 + z^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 10y + 25 + z^2 - 8z + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x + 10x - 14y - 10y + 8z + 9 + 49 - 25 - 25 - 16 = 0 \Leftrightarrow 16x - 24y + 8z - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3y + z - 1 = 0$$

2.1. $d(M, B) = \frac{1}{2}d(A, B) = \frac{1}{2}\sqrt{(-1-3)^2 + (-6+2)^2 + (3-1)^2} = 3$

2.2. Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano α , plano mediador de $[AB]$.

$$d(A, P) = d(B, P) \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = (x+1)^2 + (y+6)^2 + (z-3)^2 \Leftrightarrow 2x + 2y - z + 8 = 0$$

2.3. $P(k, -3, 3k) \in \alpha \Leftrightarrow 2k + 2 \times (-3) - 3k + 8 = 0 \Leftrightarrow -k - 6 + 8 = 0 \Leftrightarrow k = 2$

3.1. Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano mediador de $[BD]$.

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + 4x - 4y - 4y - 6z + 4z + 14 - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 8y - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow x - 4y - z + 1 = 0$$

Uma equação do plano mediador é $x - 4y - z + 1 = 0$.

3.2. $A(0, 0, z)$. Como $\overline{AB} = \overline{AD}$, o ponto A pertence ao plano mediador de $[BD]$.

Logo, $0 - 4 \times 0 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$. Portanto, $A(0, 0, 1)$.

3.3. $M\left(\frac{0+1}{2}, \frac{0-1}{2}, \frac{1+6}{2}\right) \Leftrightarrow M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

pág. 73

4.1. $y = 2$

4.2. $M\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+2}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (3, 2, 0)$

4.3. Como BA é uma reta paralela ao eixo Ox , DC é uma reta paralela a Oz . Portanto, D e C têm a mesma abcissa e ordenada que M .

Como M é o centro da base, a distância de M a A é igual à distância de M a D e de M a C .

O ponto M pertence ao plano de equação $z = 0$, logo as coordenadas de D são $(3, 2, 2)$ e as de C são $(3, 2, -2)$.

4.4. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \Leftrightarrow -2x + 1 = -6x - 4z + 13 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x + 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow x + z - 3 = 0$$

Uma equação do plano pedido é $x + z - 3 = 0$.

4.5. Aresta da base: $d(A, D) = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$; Área da base: 8

Como o volume é 16, temos $16 = \frac{1}{3} \times 8 \times h \Leftrightarrow h = 6$.

Como $\overline{EM} = 6$, temos que $y_M - y_E = 6 \Leftrightarrow 2 - 6 = y_E \Leftrightarrow y_E = -4$

E tem a mesma abcissa e cota que M . Logo, as coordenadas de E são $(3, -4, 0)$.

4.5. Os triângulos $[ABE]$ e $[HFE]$ são semelhantes, portanto as suas alturas também são diretamente proporcionais.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HF}} = \frac{6}{4} \Leftrightarrow \overline{HF} = \frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$$

Metade de \overline{HF} é $\frac{4}{3}$.

As coordenadas do ponto médio de $[FH]$ são $(3, 0, 0)$, pois o plano CDE tem equação $x = 3$.

As coordenadas dos vértices do quadrado $[FGHI]$ são:

$$F\left(\frac{13}{3}, 0, 0\right); G\left(3, 0, \frac{4}{3}\right); H\left(\frac{5}{3}, 0, 0\right); I\left(3, 0, -\frac{4}{3}\right)$$

Ficha 13 Superfície esférica e esfera

pág. 74

1.1. Superfície esférica de centro $C(0, 0, 0)$ e raio $r = 1$

1.2. Superfície esférica de centro $C(1, -2, 0)$ e raio $r = \sqrt{5}$

1.3. Esfera de centro $C(0, 1, -1)$ e raio $r = 2$

1.4. Esfera de centro $C(-1, 0, \sqrt{2})$ e raio $\sqrt{2}$

2.1. a) $r = \overline{AB} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2+4)^2 + (1-5)^2} = 6;$ $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 36$

b) Centro: $M(-1, -3, 3); r = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 6 = 3;$ $(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$

c) $r = d(A, \text{plano } yOz) = |\text{abcissa de } A| = 1;$ $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 1$

d) $r = d(B, \text{plano } xOz) = |\text{ordenada de } B| = |-2| = 2;$ $(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$

2.2. Centro $M(-1, -3, 3)$ e raio $r = 3$:

$$x = -1 + 3 \Leftrightarrow x = 2;$$

$$x = -1 - 3 \Leftrightarrow x = -4;$$

$$y = -3 + 3 \Leftrightarrow y = 0;$$

$$y = -3 - 3 \Leftrightarrow y = -6;$$

$$z = 3 + 3 \Leftrightarrow z = 6;$$

$$z = 3 - 3 \Leftrightarrow z = 0$$

3.1. $(x+2)^2 + y^2 + (7-4)^2 \leq 25 \wedge z = 7 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 \leq 16 \wedge z = 7$

Círculo cujo centro é o ponto de coordenadas $(-2, 0, 7)$ e raio 4 contido no plano de equação $z = 7$.

3.2. $-2 - 5 < k < -2 + 5 \Leftrightarrow -7 < k < 3$

3.3. $(x+2)^2 + (-1)^2 + (z-4)^2 \leq 25 \wedge y = -3 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (z-4)^2 \leq 24 \wedge y = -3$.

A secção produzida é um círculo de centro $(-2, -3, 4)$ e $\sqrt{24}$.

A área do círculo é $\sqrt{24}^2 \pi = 24\pi$.

pág. 75

4.1. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2;$

Centro da superfície esférica: $C(1, -2, 3)$. Se a superfície esférica é tangente ao plano xOy , então o raio é dado por $r = |\text{cota de } C| = 3$ e $k = 3^2 \Leftrightarrow k = 9$

4.2. $(3-1)^2 + (-1+2)^2 + (5-3)^2 = 9 \Leftrightarrow 4 + 1 + 4 = 9$ (V);

$(3-1)^2 + (-3+2)^2 + (5-3)^2 = 9 \Leftrightarrow 4 + 1 + 4 = 9$ (V)

Logo, os pontos A e B pertencem à superfície esférica.

4.3. Se $[AD]$ é um diâmetro da superfície esférica, então o centro, C , é o ponto médio de $[AD]$:

$$\left(\frac{3+x}{2}, \frac{-1+y}{2}, \frac{5+z}{2}\right) = (1, -2, 3) \Leftrightarrow x = -1 \wedge y = -3 \wedge z = 1;$$

$$D(-1, -3, 1)$$

4.4. a) Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano mediador.

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 \Leftrightarrow y = -2$$

b) O plano α passa em C . Logo, a secção é uma circunferência de raio 3. O seu comprimento é $2\pi r = 6\pi$.

5.1. $M\left(\frac{4+6}{2}, \frac{6+4}{2}, \frac{-4+6}{2}\right) = (5, 5, 1)$

5.2. O centro da esfera é $M(5, 5, 1)$ e o raio é metade da aresta do cubo.

$$\overline{BC} = \sqrt{(6-4)^2 + (10-6)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{36} = 6; r = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3$$

$$\text{Inequação da esfera: } (x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2 \leq 9$$

5.3. a) $(x-6)^2 + (y-10)^2 + (z-0)^2 = (x-6)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 \Leftrightarrow -12y + 12z + 48 = 0 \Leftrightarrow y - z - 4 = 0$
 $\alpha: y - z - 4 = 0$

b) O ponto $M(5, 5, 1)$, centro da esfera, pertence a α dado que $5 - 1 - 4 = 0$. Logo, a secção produzida na esfera pelo plano α é um círculo de raio 3. A sua área é $\pi \times 3^2 = 9\pi$ u. a.

Ficha 14 Geometria no espaço e tecnologia

pág. 76

1.1. O plano é paralelo ao plano yOz .

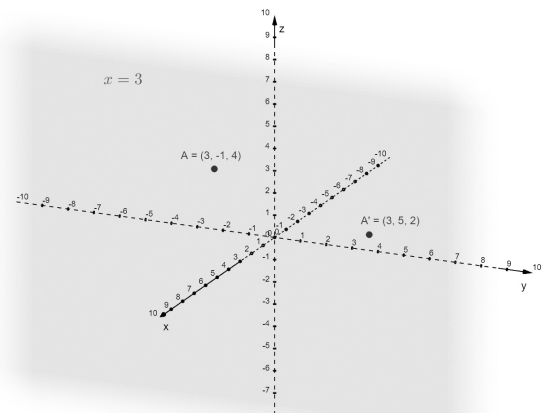
1.2. A abcissa mantém-se e a ordenada e a cota alteram-se.

1.3. Por exemplo, para $y = -2$ obtemos um plano paralelo ao plano xOz .

Nos pontos desse plano, a ordenada mantém-se e a abcissa e a cota variam.

Por exemplo, para $z = 4$ obtemos um plano paralelo ao plano xOy .

Nos pontos desse plano, a cota mantém-se e a abcissa e a ordenada variam.



2.1. A reta é paralela ao eixo Oz .

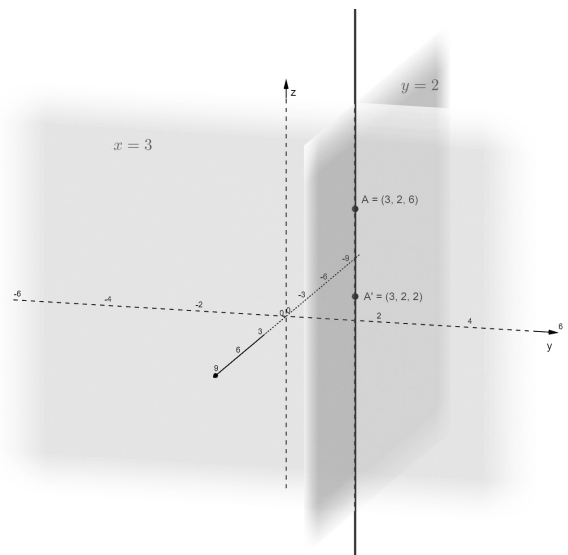
2.2. A abcissa e a ordenada mantêm-se e a cota altera-se.

2.3. Por exemplo, para $y = -2 \wedge z = 1$, obtemos uma reta paralela ao eixo Ox .

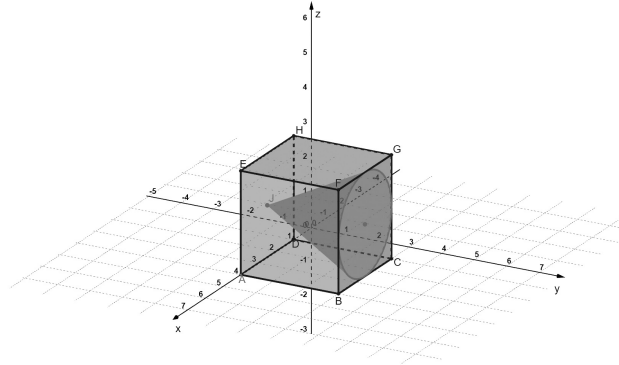
Os pontos dessa reta têm mesma ordenada e a mesma cota enquanto o valor da abcissa muda.

Por exemplo, para $x = 1 \wedge z = -4$ obtemos uma reta paralela ao eixo Oy .

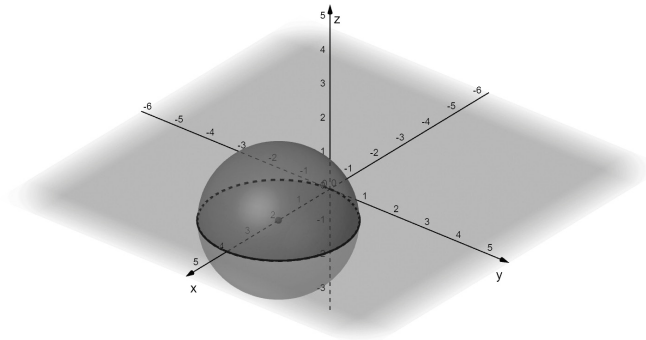
Os pontos dessa reta têm mesma abcissa e a mesma cota enquanto a ordenada varia.



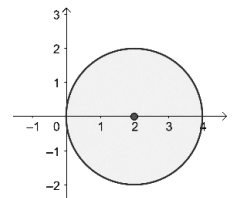
- 3.1. Construindo dois pontos obtenho um cubo.
- 3.2. Preciso de dois pontos e o raio da base.
- 3.3. Tenho de construir dois pontos médios em faces opostas.
E saber quanto é a aresta do cubo, pois o raio da base é metade da aresta do cubo.



4. Com recurso ao GeoGebra 3D, construir a superfície esférica e o plano.



Para ter uma visualização 2D da interseção do plano com a superfície esférica, seleccionar a interseção e com o botão direito do rato escolher **Criar vista 2D de c**. Permite visualizar que k varia entre -2 e 2 . Logo, para que a interseção seja uma circunferência, $k \in]-2, 2[$.



Avaliação

Ficha 15 Geometria analítica no espaço

- 1.1. A esfera tem centro $S(-1, -1, 0)$ e raio $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
O centro da esfera, $S(-1, -1, 0)$ é ponto médio do segmento de reta $[AH]$.
Se $A(x, y, z)$, então:
$$\left(\frac{x-3}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z+2}{2}\right) = (-1, -1, 0) \Leftrightarrow x=1 \wedge y=-3 \wedge z=-2; A(1, -3, -2)$$
- 1.2. Seja a a medida da aresta do cubo: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$; $\overline{AH}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CH}^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$
Como $\overline{AH} = 2r = 4\sqrt{3}$, vem: $3a^2 = (4\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 3a^2 = 16 \times 3 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow_{a>0} a = 4$
- 1.3. O plano AGH passa no centro do cubo. Logo, passa no centro da esfera. Assim, a secção produzida na esfera pelo plano AGH é um círculo de raio $r = \sqrt{12}$ e a sua área é $\pi \times (\sqrt{12})^2 = 12\pi$ u. a.
- 1.4. (B)
 $(x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 12 \wedge x = -4 \wedge z = 1 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 2 \wedge x = -4 \wedge z = 1$
 $\Leftrightarrow (y = -1 - \sqrt{2} \vee y = -1 + \sqrt{2}) \wedge x = -4 \wedge z = 1$
A reta intersesta nos pontos de coordenadas $(-4, -1 - \sqrt{2}, 1)$ e $(-4, -1 + \sqrt{2}, 1)$.
A distância entre os pontos é $-1 + \sqrt{2} - (-1 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

1.5. Coordenadas de $F(1, -3, 2)$

Como FG é paralela a Oy , uma condição da reta é $x = 1 \wedge z = 2$.

1.6. (C)

BGE é o plano mediador do segmento de reta $[FH]$.

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x + 2x - 2y - 6y = 0 \Leftrightarrow 8x - 8y = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$$

pág. 79

2.1. A e B pertencem à superfície esférica, pois:

$$(2-1)^2 + (-12+4)^2 + (-5+1)^2 = 81 \Leftrightarrow 1 + 64 + 16 = 81 \text{ (Verdadeiro); o ponto } A \text{ pertence à superfície esférica.}$$

$$(0-1)^2 + (4+4)^2 + (3+1)^2 = 81 \Leftrightarrow 1 + 64 + 16 = 81 \text{ (Verdadeiro); o ponto } B \text{ pertence à superfície esférica.}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-2)^2 + (4+12)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{324} = 18. A \text{ e } B \text{ pertencem à superfície esférica e}$$

$$\overline{AB} = 18 = 2r.$$

Logo, $[AB]$ é um diâmetro da superfície esférica.

2.2. $(-6-1)^2 + (-8+4)^2 + (3+1)^2 = 81 \Leftrightarrow 49 + 16 + 16 = 81$ (Verdadeiro). Logo, o ponto D pertence à superfície esférica.

Se $E(x, y, z)$ e $[DE]$ é um diâmetro dessa superfície esférica, então o centro, $C(1, -4, -1)$, é o ponto médio de $[DE]$:

$$\left(\frac{x-6}{2}, \frac{y-8}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = (1, -4, -1) \Leftrightarrow x-6=2 \wedge y-8=-8 \wedge z+3=-2 \Leftrightarrow x=8 \wedge y=0 \wedge z=-5.$$

$$E(8, 0, -5)$$

2.3. (B)

Um plano paralelo ao plano xOz tem equação da forma $y = a$.

Como o centro tem coordenadas $(1, -4, -1)$ e o raio é 9 , existem dois planos paralelos a xOz

$$y = -4 + 9 \vee y = -4 - 9 \Leftrightarrow y = 5 \vee y = -13$$

2.4. $x^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = (x+6)^2 + (y+8)^2 + (z-3)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 12x + 36 + y^2 + 16y + 64 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -8y + 16 = 12x + 36 + 16y + 64 \Leftrightarrow 12x + 24y + 84 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 7 = 0$$

2.5. (C)

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 81 \wedge x=7 \wedge y=2 \Leftrightarrow (z+1)^2 = 9 \wedge x=7 \wedge y=2$$

$$\Leftrightarrow (z=-4 \vee z=2) \wedge x=7 \wedge y=2$$

$E(7, 2, -4)$ e $F(7, 2, 2)$, portanto a $d(E, F) = 6$.

Ficha 16 Vetores

pág. 80

1.1. a) $A + \overrightarrow{FE} = A + \overrightarrow{AJ} = \mathbf{J}$

b) $I + \overrightarrow{IL} = I + \overrightarrow{EH} = \mathbf{L}$

c) $\overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{JH} = \overrightarrow{FH}$

d) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{IL}$

e) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KH} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{IC}$

f) $\overrightarrow{IL} - \overrightarrow{GL} = \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{LG} = \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{FE}$

1.2. a) $\|\overrightarrow{HF}\| = 2\|\overrightarrow{AL}\| = 2 \times 4 = 8$

b) $\|\overrightarrow{LI}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

c) $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(2 \times 4)^2 + (3 \times 3)^2} = \sqrt{145}$

d) $\|\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{AH}\| = \|\overrightarrow{HI}\| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$

2.1. $\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = \vec{u} + \vec{OE} = \vec{u} + \vec{v}$

2.2. $\vec{AD} = 2\vec{OD} = 2(\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$

2.3. $\vec{EF} = \vec{EO} + \vec{OF} = -\vec{v} + \vec{CO} = -\vec{v} - \vec{u}$

2.4. $\vec{CF} = 2\vec{CO} = 2(-\vec{u}) = -2\vec{u}$

3.1. $= \frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{6}\vec{v} + \frac{5}{6}\vec{u} + \frac{5}{6}\vec{v} = \frac{6}{6}\vec{u} + \frac{6}{6}\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}$

3.2. $-2\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{b} + \vec{a} - \vec{b} = -\vec{a} + 3\vec{b}$

3.3. $= -\frac{2}{3}\vec{x} + 2\vec{y} + 3\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y} = \left(-\frac{2}{3} + 3\right)\vec{x} + \left(2 - \frac{1}{2}\right)\vec{y} = \frac{7}{3}\vec{x} + \frac{3}{2}\vec{y}$

3.4. $= 4\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b} + 6\vec{a} - \frac{3}{15}\vec{b} = 10\vec{a} - \left(\frac{12}{15} + \frac{3}{15}\right)\vec{b} = 10\vec{a} - \vec{b}$

4. $\vec{u} = \vec{BH} + \frac{1}{2}\vec{EJ} = \vec{BH} + \vec{EG} = \vec{BH} + \vec{HK} = \vec{BK} = \vec{OF}$ e $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{ON} + 2\vec{HG} = \vec{OE} + \vec{EC} = \vec{OC}$

Como $\vec{OF} = \frac{3}{2}\vec{OC}$, isto é, $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{v}$, podemos concluir que $k = \frac{3}{2}$.

5.1. a) $\vec{MN} + \vec{JO} = \vec{MN} + \vec{NH} = \vec{MH}$

b) $\vec{PL} + \vec{AG} = \vec{KA} + \vec{AG} = \vec{KG}$

c) $\vec{LG} + \vec{ST} = \vec{LG} + \vec{GR} = \vec{LR}$

d) $\vec{BF} + \vec{NO} + \vec{RH} = \vec{BF} + \vec{FQ} + \vec{QT} = \vec{BT}$

e) $\vec{KL} - \vec{NT} + \vec{MC} = \vec{ET} + \vec{TN} + \vec{MC} = \vec{EN} + \vec{MC} = \vec{QM} + \vec{MC} = \vec{QC}$

f) $\vec{KR} - \vec{FS} - \vec{MP} = \vec{KR} + \vec{SF} + \vec{FL} = \vec{KR} + \vec{SL} = \vec{KR} + \vec{RK} = \vec{KR} - \vec{KR} = \vec{0}$

5.2. a) $F + \vec{LN} = F + \vec{FR} = R$

b) $R + \vec{PL} + \vec{IB} = R + \vec{PL} + \vec{LM} = R + \vec{PM} = R + \vec{RN} = N$

c) $T + \vec{CM} - \vec{AF} = T + \vec{CM} + \vec{FA} = T + \vec{OG} + \vec{GB} = T + \vec{OB} = T + \vec{TL} = L$

d) $A + \vec{BS} - \vec{RQ} + \vec{LN} = A + \vec{BS} + \vec{QR} + \vec{LN} = A + \vec{BS} + \vec{AI} + \vec{IJ} = A + \vec{BS} + \vec{AJ} = A + \vec{AQ} + \vec{QH} = A + \vec{AH} = H$

6.1. a) $\vec{BD} - 2\vec{MG} = \vec{AC} + 2\vec{GM} = \vec{AC} + \vec{CM} = \vec{AM}$

b) $\vec{FP} - \frac{1}{3}\vec{EH} = \vec{AK} + \frac{1}{3}\vec{HE} = \vec{AK} + \vec{HG} = \vec{AK} + \vec{KJ} = \vec{AJ}$

6.2. a) $\|\vec{FK} - \vec{GB}\| = \|\vec{FK} + \vec{KP}\| = \|\vec{FP}\|$

$\|\vec{FP}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$

b) $\|\vec{HM} - \frac{1}{2}\vec{NB}\| = \|\vec{HM} + \frac{1}{2}\vec{BN}\| = \|\vec{HM} + \vec{MQ}\| = \|\vec{HQ}\|$

$\|\vec{HQ}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

7.1. $\vec{AH} + \vec{GD} = (\vec{AD} + \vec{DH}) + (\vec{GA} + \vec{AD}) = 2\vec{AD} + (\vec{DH} - \vec{DH}) = 2\vec{AD} + \vec{0} = 2\vec{AD}$

7.2. $V_{\text{sólido}} = V_{\text{cubo}} + V_{\text{pirâmide}} \Leftrightarrow 33 = 3^3 + \frac{1}{3} \times 3^2 \times \|\vec{EV}\| \Leftrightarrow \|\vec{EV}\| = 2$

7.3. Os vetores \vec{EV} e \vec{GB} são colineares.

$\|\vec{GB}\| = \|k\vec{EV}\| \Leftrightarrow \|\vec{GB}\| = |k|\|\vec{EV}\| \Leftrightarrow 3 = |k| \times 2 \Leftrightarrow |k| = \frac{3}{2}$

Dado que os vetores \vec{GB} e \vec{EV} têm sentidos opostos, $k < 0$. Portanto, $k = -\frac{3}{2}$.

Ficha 17 Coordenadas de um vetor. Operações

pág. 82

MMALICAD © Porto Editora

1.1. $\vec{w} = -\frac{1}{2}(-2, 5) - (3, -4) = (1, -\frac{5}{2}) - (3, -4) = (-2, \frac{3}{2})$

1.2. $\vec{x} = \frac{2}{5}(-2, 5) - \frac{1}{5}(3, -4) = (-\frac{4}{5}, 2) - (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) = (-\frac{7}{5}, \frac{14}{5})$

1.3. $\frac{3}{2}\vec{u} = 2\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{y} = \frac{3}{4}\vec{u} - \frac{1}{6}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{y} = (-2, \frac{53}{12})$

1.4. $-\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{t} - \frac{2}{3}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{t} = \frac{4}{3}\vec{v} - 2\vec{u} \Leftrightarrow \vec{t} = (8, -\frac{46}{3})$

2.1. $\vec{u} = (-3, -5) + (-2, \frac{5}{2}) = (-5, -\frac{5}{2})$

2.2. $\vec{v} = (2, -\frac{5}{2}) - (5, \frac{5}{2}) = (-3, -5)$

2.3. $\vec{t} = 2(2, -\frac{5}{2}) - 3(3, 5) + (-5, -\frac{5}{2}) = (-10, -\frac{45}{2})$

2.4. $\vec{w} = \frac{1}{3}(3, 5) - \frac{2}{5}(-5, -\frac{5}{2}) = (3, \frac{8}{3})$

3.1. $D = A + \vec{BC} = (5, -1) + (-3, -5) = (2, -6)$

3.2. $\vec{w} = \vec{CA} - \vec{DB} = (9, 1) - (-3, 9) = (12, -8);$
 $\|\vec{w}\| = \sqrt{12^2 + (-8)^2} = \sqrt{208} = \sqrt{16 \times 13} = 4\sqrt{13}$

3.3. $\|\vec{CA}\| = \sqrt{9^2 + 1^2} = \sqrt{82}; \|\vec{DB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 9^2} = \sqrt{90};$ Não é um retângulo porque as diagonais são diferentes.

3.4. $M(2, 1); \overline{MD} = \sqrt{(2-2)^2 + (-6-1)^2} = 7; x^2 + y^2 - 4x - 2y - 44 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 49;$
 centro $M(2, 1)$ e raio $r = \overline{MD}$

pág. 83

4.1. $\vec{v} = \lambda\vec{u} \wedge \|\vec{v}\| = 10 \wedge \lambda < 0$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{16+9} = 5; \|\vec{v}\| = 10 \Leftrightarrow \|\lambda\vec{u}\| = 10 \Leftrightarrow |\lambda| \times 5 = 10 \Leftrightarrow |\lambda| = 2 \Leftrightarrow \lambda = -2 \vee \lambda = 2$
 Como $\lambda < 0$, $\lambda = -2$ e $\vec{v} = \lambda\vec{u} = -2(-4, 3) = (8, -6)$.

4.2. $\vec{v} = \lambda\vec{u} \wedge \|\vec{v}\| = 6 \wedge \lambda > 0; \|\vec{v}\| = 6 \Leftrightarrow \|\lambda\vec{u}\| = 6 \Leftrightarrow |\lambda| \times 5 = 6 \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \lambda = \frac{6}{5} \vee \lambda = -\frac{6}{5}$

Como $\lambda > 0$, $\lambda = \frac{6}{5}$ e $\vec{v} = \lambda\vec{u} = \frac{6}{5}(-4, 3) = (-\frac{24}{5}, \frac{18}{5})$

5.1. $(x-4)^2 + (y+4)^2 = (x+3)^2 + (y+5)^2 \Leftrightarrow y = -7x - 1$

5.2. $y = -7x - 1 \wedge x = 0 \Leftrightarrow y = -1 \wedge x = 0.$
 Portanto, o centro do quadrado tem ordenada -1 .

5.3. Seja M o centro do quadrado: $M(0, -1); \vec{MB} = \vec{DM} = (3, 4)$ e $\vec{MC} = \vec{AM} = (-4, 3)$
 $B = M + \vec{MB} = (0, -1) + (3, 4) = (3, 3)$ e $C = M + \vec{MC} = (0, -1) + (-4, 3) = (-4, 2)$

5.4. Centro: $M(0, -1);$ raio: $r = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-4)^2 + (-5+4)^2} = \frac{\sqrt{50}}{2};$ equação: $x^2 + (y+1)^2 = \frac{25}{2}$

5.5. $\vec{AD} = (-7, -1); \vec{AC} = (-8, 6);$

$3\vec{AD} - 5\vec{u} = 2\vec{AC} \Leftrightarrow 5\vec{u} = 3\vec{AD} - 2\vec{AC} \Leftrightarrow 5\vec{u} = 3(-7, -1) - 2(-8, 6) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 5\vec{u} = (-21, -3) + (16, -12) \Leftrightarrow 5\vec{u} = (-5, -15) \Leftrightarrow \vec{u} = (-1, -3)$

6. Se $k = 2$, \vec{u} e \vec{v} não são colineares. Se $k \neq 2$, \vec{u} e \vec{v} são colineares se e somente se $\frac{2k-1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{k-2}$.
 $\frac{2k-1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{k-2} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \vee k = 3$

7.1. $B - 2\overrightarrow{BC} = (-1, 2, -2) - 2(4, 2, -6) = (-9, -2, 10)$

7.2. $\overrightarrow{AB} + 2(-2\overrightarrow{BC}) = (3, -1, -4) - 4(4, 2, -6) = (-13, -9, 20)$

7.3. $2\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = 2(3, -1, -4) - \frac{3}{2}(4, 2, -6) = (0, -5, 1)$

7.4. $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} = (7, 1, -10)$

8. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-a, 3, b+3)$; $\overrightarrow{BC} = C - B = (b+1, -6, -9-b)$. Se $a=0$ ou $b=-3$, \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} não são colineares.

Para $a \neq 0$ e $b \neq -3$, \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} são colineares se $\frac{b+1}{-a} = \frac{-6}{3} = \frac{-9-b}{b+3} \Leftrightarrow a = 2 \wedge b = 3$.

9.1. $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \vec{u} - 2\vec{v} = (6, -4, -3)$

9.2. $\vec{x} = -2\vec{u} - 4\vec{v} = (10, -20, -2)$

9.3. $\vec{y} = \frac{3}{4}\vec{v} + \frac{1}{4}\vec{u} + \overrightarrow{AB} = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{13}{8}\right)$

9.4. $\vec{t} = 4\vec{e}_1 + 2\vec{u} - 2\vec{e}_2 + 6\vec{v} = (-10, 24, 3)$

10. Aresta do cubo é 2.

Coordenadas $A(2, 0, 0)$, $B(2, 2, 0)$ e $G(0, 2, 2)$

Vetores: $\overrightarrow{AG}(-2, 2, 2)$ e $\overrightarrow{BP}(x-2, y-2, z)$

$\overrightarrow{BP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow (x-2, y-2, z) = \frac{3}{4}(-2, 2, 2)$


$$\begin{cases} x-2 = -\frac{3}{2} \\ y-2 = \frac{3}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{7}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

As coordenadas de $P\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

11.1. $\overrightarrow{AB} = (-2, 4, -4)$; $\overrightarrow{AC} = (a-3, -a, a)$; $\frac{a-3}{-2} = \frac{-a}{4} = \frac{a}{-4} \Leftrightarrow 4a - 12 = 2a \Leftrightarrow a = 6$

11.2. $M_{[AB]} = M(2, 3, -4)$; $C = M \Leftrightarrow (a, 1-a, a-2) = (2, 3, -4) \Leftrightarrow a = 2 \wedge a = -2$

A condição é impossível. Logo, não existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual C é o ponto médio de $[AB]$.

11.3. $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$, com $k > 0$ e $\|\overrightarrow{AE}\| = 15$; $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$ 

$\|\overrightarrow{AE}\| = 15 \Leftrightarrow \|k\overrightarrow{AB}\| = 15 \Leftrightarrow |k| \times 6 = 15 \Leftrightarrow |k| = \frac{15}{6} \Leftrightarrow k = \frac{5}{2}$;

$\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB} = \frac{5}{2}(-2, 4, -4) = (-5, 10, -10)$; $E = A + \overrightarrow{AE} = (-2, 11, -12)$

12.1. O ponto E é o ponto médio de $[AC]$: $E\left(\frac{6-2}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (2, 3, 2)$

12.2. $\overrightarrow{EF} = (2, 4, 4)$; $\|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$

12.3. $\overrightarrow{AC} = (-8, 2, 2)$; $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-8)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{72}$. Se $\|\overrightarrow{AB}\| = x$,
 $x^2 + x^2 = (\sqrt{72})^2 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow_{x>0} x = 6$

12.4. $V = 108 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \|\overrightarrow{AB}\|^2 \times \|\overrightarrow{EV}\| = 108 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 36 \times \|\overrightarrow{EV}\| = 108 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EV}\| = 9$

- 12.5.** $V = E + \vec{EV}$; $\vec{EV} = k\vec{EF}$, $k > 0$ e $\|\vec{EV}\| = \|k\vec{EF}\| = 9$
 $\|k\vec{EF}\| = 9 \Leftrightarrow |k| \|\vec{EF}\| = 9 \Leftrightarrow_{k>0} k \times 6 = 9 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$; $\vec{EV} = \frac{3}{2}(2, 4, 4) = (3, 6, 6)$;
 $V = (2, 3, 2) + (3, 6, 6) = (5, 9, 8)$
- 12.6.** $\vec{BE} = E - B = (0, -3, 3)$; $D = E + \vec{ED} = E + \vec{BE} = (2, 3, 2) + (0, -3, 3) = (2, 0, 5)$

Ficha 18 Equações da reta

pág. 86

- 1.1.** $(x, y) = (0, 1) + k(2, -3)$, $k \in \mathbb{R}$
- 1.2.** $2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$; $(x, y) = (0, 0) + k(1, -2)$, $k \in \mathbb{R}$
- 1.3.** $(x, y) = (0, -2) + k(1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$
- 1.4.** $(x, y) = (-3, 0) + k(0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$
- 2.1.** $m = \frac{2}{-1} = -2$; $y - 3 = -2(x + 2) \Leftrightarrow y = -2x - 4 + 3 \Leftrightarrow y = -2x - 1$
- 2.2.** $m = \frac{4}{-10} = -\frac{2}{5}$; $y = -\frac{2}{5}x$
- 2.3.** $m = 0$ (a reta é horizontal); $y = 4$
- 2.4.** A reta passa no ponto de coordenadas $(-1, 3)$ e tem a direção de $(0, 2)$ (a reta é vertical); $x = -1$
- 3.1.** $(0, y) = (-4, 9) + k(4, -3) \Leftrightarrow k = 1 \wedge y = 6$; $A(0, 6)$;
 $(x, 0) = (-4, 9) + k(4, -3) \Leftrightarrow k = 3 \wedge x = 8$; $B(8, 0)$
- 3.2.** Ponto genérico de r : $(-4 + 4k, 9 - 3k)$; substituindo em s : $y = -2x + 11$, vem
 $9 - 3k = -2(-4 + 4k) + 11 \Leftrightarrow k = 2$, donde $C(4, 3)$.
- 3.3.** Centro: $C(4, 3)$; raio: $r = \overline{OC} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; equação: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$
- 3.4.** Como $(0 - 4)^2 + (6 - 3)^2 = 25$ e $(8 - 4)^2 + (0 - 3)^2 = 25$, $A(0, 6)$ e $B(8, 0)$ pertencem à circunferência.
 O ponto médio de $[AB]$ tem coordenadas $(\frac{0+8}{2}, \frac{6+0}{2}) = (4, 3)$, ou seja, é o centro da circunferência. Logo, $[AB]$ é um diâmetro.
- 3.5.** Reta r : $m = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$ e $y - 9 = -\frac{3}{4}(x + 4) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 6$
 Reta s : passa no ponto $(0, 11)$ e tem a direção de $(1, m) = (1, -2)$,
 logo $(x, y) = (0, 11) + k(1, -2)$, $k \in \mathbb{R}$

pág. 87

- 4.1.** $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = (x - 6)^2 + (y - 7)^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 5$
- 4.2.** Centro: $M(\frac{2+6}{2}, \frac{-1+7}{2}) = (4, 3)$; raio: $r = \overline{AM} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{20}$;
 equação: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$
 $E(0, 5)$: $(0 - 4)^2 + (5 - 3)^2 = 20 \Leftrightarrow 16 + 4 = 20$ (V). Logo, o ponto E pertence à circunferência.
- 4.3.** $\vec{DC} = \vec{AB} = (2, -6)$; $C = D + \vec{DC} = (6, 7) + (2, -6) = (8, 1)$
- 4.4.** $\vec{AC} = C - A = (8 - 2, 1 + 1) = (6, 2)$; s : $(x, y) = (2, -1) + k(6, 2)$, $k \in \mathbb{R}$
- 4.5.** $C(8, 1)$ e r : $y = -\frac{1}{2}x + 5$: $1 = -\frac{1}{2} \times 8 + 5 \Leftrightarrow 1 = -4 + 5 \Leftrightarrow 1 = 1$ (V). Logo, o ponto C pertence à reta r .
- 4.6.** A altura do paralelogramo relativa ao lado $[AD]$ é $[MC]$, pelo que a sua área é igual a $\overline{AD} \times \overline{MC}$.
 $\overline{AD} = \sqrt{(6 - 2)^2 + (7 + 1)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$; $\overline{MC} = \sqrt{(8 - 4)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;
 $A_{\text{paralelogramo}} = 4\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 8 \times 5 = 40$

5.1. $(12, -12) = (3, -6) + k(3, -2), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow k = 3: R \in r.$
 $(-15, 4) = (3, -6) + k(3, -2), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow k = -6 \wedge k = -5: S \notin r.$

5.2. $(x, 0) = (3, -6) + k(3, -2) \Leftrightarrow k = -3 \wedge x = -6: A(-6, 0);$
 $(0, y) = (3, -6) + k(3, -2) \Leftrightarrow k = -1 \wedge y = -4: B(0, -4)$

Mediatriz de $[AB]: (x+6)^2 + y^2 = x^2 + (y+4)^2 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$. O centro da circunferência, C , é o ponto de interseção desta reta com a reta de equação $y = x: y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \wedge y = x \Leftrightarrow x = -5 \wedge y = -5$.

O raio é $r = \overline{AC} = \sqrt{(-5+6)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{26}$. Equação: $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 26$

pág. 88

6.1. $(x, y, z) = (2, 0, 4) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$

6.2. $(x, y, z) = (0, 3, 4) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$

6.3. $(x, y, z) = (2, 3, 0) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

6.4. $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

6.5. $(x, y, z) = (2, 0, 0) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$

6.6. $(x, y, z) = (0, 0, 4) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$

7.1. $(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-7)^2 = (x-5)^2 + (y+7)^2 + (z-1)^2 \Leftrightarrow 4y + 3z = 0$

7.2. $C\left(\frac{5+5}{2}, \frac{1-7}{2}, \frac{7+1}{2}\right) \Leftrightarrow C(5, -3, 4)$

7.3. $\overrightarrow{CA} = A - C = (5, 1, 7) - (5, -3, 4) = (0, 4, 3); CV: (x, y, z) = (5, -3, 4) + k(0, 4, 3), k \in \mathbb{R}$

7.4. $(x, y, 13) = (5, -3, 4) + k(0, 4, 3) \Leftrightarrow k = 3 \wedge x = 5 \wedge y = 9; V(5, 9, 13)$

7.5. $\|\overrightarrow{CV}\| = \sqrt{0^2 + 12^2 + 9^2} = 15;$

$V_{\text{cone}} = 125\pi \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi \times \|\overrightarrow{CR}\|^2 \times 15 = 125\pi \Leftrightarrow 5\pi \times \|\overrightarrow{CR}\|^2 = 125\pi \Leftrightarrow \|\overrightarrow{CR}\| = 5$

7.6. a) $\overrightarrow{PC} = C - P = \left(3, -\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right); \|\overrightarrow{PC}\| = \sqrt{3^2 + \left(-\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2} = 5; 4 \times \left(-\frac{3}{5}\right) + 3 \times \frac{4}{5} = -\frac{12}{5} + \frac{12}{5} = 0.$

Logo, $P \in \alpha$. Como $\|\overrightarrow{PC}\| = 5$ e $P \in \alpha$, o ponto P pertence à circunferência que delimita a base do cone.

b) $Q = C + \overrightarrow{CQ} = C + \overrightarrow{PC} = (5, -3, 4) + \left(3, -\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right) = \left(8, -\frac{27}{5}, \frac{36}{5}\right)$

pág. 89

8.1. $D = A + \overrightarrow{GH} = (-2, -6, 4) + (-6, -3, 2) = (-8, -9, 6)$

8.2. $(x, y, z) = (-2, -6, 4) + k(-6, -3, 2), k \in \mathbb{R}$

8.3. $(x, 0, 0) = (-2, -6, 4) + k(-6, -3, 2) \Leftrightarrow x = 10 \wedge k = -2.$
 Ponto de interseção: $(10, 0, 0)$

8.4. $(0, y, z) = (-2, -6, 4) + k(-6, -3, 2) \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3} \wedge y = -5 \wedge z = \frac{10}{3}.$

Ponto de interseção: $\left(0, -5, \frac{10}{3}\right)$

8.5. $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{GH}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7; V = 343 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 7^2 \times \|\overrightarrow{AV}\| = 343 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AV}\| = 21;$

$\overrightarrow{AV} = k\overrightarrow{GH}, k > 0$ e $\|\overrightarrow{AV}\| = 21. \|\overrightarrow{GH}\| = 7 \Leftrightarrow |k| \times 7 = 21 \Leftrightarrow |k| = 3 \Leftrightarrow k = 3;$

$\overrightarrow{AV} = k\overrightarrow{GH} = 3(-6, -3, 2) = (-18, -9, 6)$ e $V = A + \overrightarrow{AV} = (-20, -15, 10)$

- 9.1.** $C(x, y, 7)$
 $(x, y, 7) = (0, 5, -5) + k(1, -3, 6) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k = 2 \wedge x = 2 \wedge y = -1$
 $C(2, -1, 7)$
 V é da forma $V(k, 5 - 3k, -5 + 6k)$ (pertence à reta CV) e pertence ao plano BVD :
 $k - 3(5 - 3k) + 5 = 0 \Leftrightarrow k = 1$
 Para $k = 1$, vem: $V(1, 2, 1)$
- 9.2.** O ponto E , centro da base $[ABCD]$, é a projeção ortogonal do ponto V sobre o plano $ABC: z = 7$.
 Centro da base $[ABCD]: E(1, 2, 7); \overrightarrow{CE} = E - C = (-1, 3, 0); \|\overrightarrow{CE}\| = \sqrt{10};$
 $A_{\text{base}} = \|\overrightarrow{CB}\|^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 = 20$. Altura $= \overline{VE} = 6$; $V = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times 20 \times 6 = 40$ u. v.

Vamos recordar

Ficha 19 Triângulos

pág. 90

- 1.1.** Como as medidas dos lados são todas diferentes, o triângulo é escaleno.
 Como os três ângulos são agudos, o triângulo é acutângulo.
- 1.2.** Como as medidas dos lados são todas diferentes, o triângulo é escaleno.
 Como a amplitude de um ângulo é de 90° , o triângulo é retângulo.
- 1.3.** Como dois lados têm a mesma medida, o triângulo é isósceles.
 Como um ângulo é obtuso, o triângulo é obtusângulo.
- 1.4.** Como as medidas dos lados são todas iguais, o triângulo é equilátero e é acutângulo.
- 2.1.** Num paralelogramo, as amplitudes dos ângulos opostos são as mesmas.
 Como o triângulo $[AMD]$ é equilátero, a amplitude de cada ângulo interno é 60° .
 Logo, $\hat{DAB} = \hat{BCD} = 60^\circ$.
 A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° , temos então que:

$$\hat{ADC} = \hat{ABC} = \frac{360 - (60 + 60)}{2} = 120^\circ$$

As amplitudes dos ângulos internos são: $\hat{DAB} = \hat{BCD} = 60^\circ$ e $\hat{ADC} = \hat{ABC} = 120^\circ$.

- 2.2.** Como o triângulo $[AMD]$ é equilátero e M divide $[AB]$ em duas partes iguais, temos que $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{MD}$, portanto o triângulo $[MBD]$ é isósceles, ou seja, temos que $\hat{MDB} = \hat{DBM}$.
 $\hat{BMD} = 180 - 60 = 120^\circ$ e $\hat{MDB} = \hat{DBM} = 30^\circ$.
- 2.3.** Seja $a = \overline{AD} = \overline{BC}$ e como M divide $[AB]$ em duas partes iguais, temos que $\overline{AM} = \overline{MB} = 2a$.
 O perímetro do paralelogramo é $6a$ e como o seu valor é 16 cm obtemos $a = \frac{8}{3}$.
 Concluimos que $\overline{AD} = \overline{BC} = \frac{8}{3}$ cm e $\overline{AB} = \overline{CD} = \frac{16}{3}$ cm.
- 2.4.** Temos que $\hat{MBD} = 30^\circ$ e que $\hat{ABC} = 120^\circ$, logo $\hat{DBC} = 120 - 30 = 90^\circ$.
 O triângulo $[BCD]$ é um triângulo retângulo.
- 2.2.** $\hat{BMD} = 120^\circ$ e $\hat{MDB} = \hat{DBM} = 30^\circ$.
- 2.3.** $\overline{AD} = \overline{BC} = \frac{8}{3}$ cm e $\overline{AB} = \overline{CD} = \frac{16}{3}$ cm.
- 2.4.** Triângulo retângulo.

pág. 91

- 2.5.** M divide $[AB]$ em duas partes iguais, temos que $\overline{AM} = \overline{MB}$.
 A altura dos triângulos relativamente a essas bases é a mesma.
 A área dos triângulos $[AMD]$ e $[MBD]$ é a mesma, logo a área do paralelogramo é $4a$ cm².

3.1. a) Triângulo escaleno

b) $\overline{AB} = \sqrt{16} = 4$

Calcular \overline{AP} : $x^2 = 1^2 + 4^2 \Leftrightarrow x^2 = 17 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{17}$, logo $\overline{AP} = \sqrt{17}$.

Calcular \overline{BP} : $y^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm 5$, logo $\overline{BP} = 5$.

Perímetro de $[ABP] = 4 + 5 + \sqrt{17} = 9 + \sqrt{17}$

c) Área de $[ABP] = \frac{\overline{AB} \times \text{altura}}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$

3.2. a) Triângulo isósceles

b) $\overline{AB} = 4$. Calcular $\overline{AP} = \overline{BP}$: $x^2 = 2^2 + 4^2 \Leftrightarrow x^2 = 20 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{20}$, logo $\overline{AP} = \sqrt{20}$.

Perímetro de $[ABP] = 4 + \sqrt{20} + \sqrt{20} = 4 + 4\sqrt{5}$

c) Área de $[ABP] = \frac{\overline{AB} \times \text{altura}}{2} = 8$

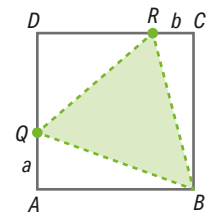
3.3. Para $[ABP]$ ser um triângulo retângulo, o ponto P ou coincide com D ou coincide com C .

3.4. A área do triângulo $[ABP]$, para qualquer posição do ponto P , é sempre 8 cm^2 , porque a base é sempre a mesma, \overline{AB} , e a altura desses triângulos, em relação à base, é sempre igual a \overline{BC} .

3.5. Não, porque o quadrado fica decomposto em três triângulos $[APD]$, $[ABP]$ e $[BCP]$ onde os triângulos $[APD]$ e $[BCP]$ são retângulos e um dos catetos tem a mesma medida que o lado do quadrado. Portanto, $[AP]$ e $[BP]$ hipotenusas dos triângulos $[APD]$ e $[BCP]$, respetivamente, terão sempre comprimento maior que \overline{AB} (lado do quadrado). Concluimos assim que o triângulo $[ABP]$ não pode ser equilátero.

3.6. Se um dos vértices do triângulo coincidir com um dos vértices do quadrado, por exemplo, um dos vértices do triângulo seria B . Agora temos de verificar se existe algum valor positivo para a e b de modo que o triângulo $[BQR]$ seja equilátero. Para \overline{BR} ser igual a \overline{BQ} , temos que $a = b$. Agora temos a condição para garantir que $\overline{QR} = \overline{BQ}$.

$(4 - a)^2 + (4 - a)^2 = a^2 + 16 \Leftrightarrow a^2 - 16a + 16 = 0 \Leftrightarrow a = 8 \pm 4\sqrt{3}$, como $a < 4$, temos que $a = b = 8 - 4\sqrt{3}$.



Ficha 20 Geometria sintética no plano

pág. 92

- 1.1. O triângulo $[ABC]$ é um triângulo acutângulo.
O triângulo $[DEF]$ é um triângulo retângulo.
O triângulo $[GHI]$ é um triângulo obtusângulo.

- 1.2. O circuncentro está no interior do triângulo $[ABC]$.
O circuncentro do triângulo $[DEF]$ é o ponto médio do segmento de reta $[DF]$.
O circuncentro está no exterior do triângulo $[GHI]$.

2. O paralelogramo $[MNPQ]$ é um retângulo.

3.1. Sejam a e b as medidas dos catetos.

$a + b + 15 = 36 \Leftrightarrow b = 21 - a$

Como o triângulo é retângulo, verifica o Teorema de Pitágoras:

$15^2 = a^2 + (21 - a)^2 \Leftrightarrow 2a^2 - 42a + 216 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 - 21a + 108 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 21a = -108 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 - 21a + \left(\frac{21}{2}\right)^2 = -108 + \left(\frac{21}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(a - \frac{21}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow a - \frac{21}{2} = \pm\frac{3}{2} \Leftrightarrow a = 9 \vee a = 12$

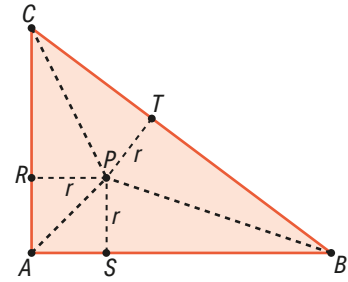
Para $a = 9$ temos $b = 12$ e para $a = 12$ temos $b = 9$.

Os catetos medem, respetivamente, 9 cm e 12 cm.

- 3.2.** Podemos decompor o triângulo $[ABC]$ em três triângulos $[APC]$, $[ABP]$ e $[BCP]$.
A área do triângulo $[ABC]$ é igual à soma das áreas dos três triângulos.
O raio da circunferência vai ser a altura de cada um dos três triângulos relativamente às bases $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$.

$$\text{Temos, } \frac{9 \times 12}{2} = \frac{9 \times r}{2} + \frac{12 \times r}{2} + \frac{15 \times r}{2} \Leftrightarrow 18r = 54 \Leftrightarrow r = 3$$

O raio da circunferência inscrita no triângulo é 3 cm.



MMATOCAD © Porto Editora

pág. 93

- 4.1.** a) A
b) P
c) N
- 4.2.** Como o ortocentro, o baricentro e o circuncentro pertencem à reta AN , AN chama-se reta de Euler.
- 4.3.** Como AN é a reta de Euler, a distância entre o baricentro e o ortocentro é o dobro entre a distância do baricentro e o circuncentro, temos que $2\overline{PN} = \overline{AP}$.
Por outro lado, $\overline{AN} = \overline{AP} + \overline{PN} \Leftrightarrow \overline{AN} = 2\overline{PN} + \overline{PN} \Leftrightarrow \overline{AN} = 3\overline{PN}$.
- 4.4.** a) Circunferência dos nove pontos
b) Os nove pontos da circunferência são:
- 3 pontos médios dos lados (M , N , L);
 - 3 pés das alturas (A e J , pois como o triângulo é retângulo o ortocentro e dois pés das alturas coincidem);
 - 3 pontos médios dos segmentos de reta de cada vértice do triângulo até o ortocentro (como o triângulo é retângulo, estes três pontos coincidem no vértice A).
- O ponto K não faz parte da lista dos nove pontos.
- 4.5.** Como o raio da circunferência de nove pontos é 5, o raio da circunferência circunscrita é 10, portanto $\overline{BC} = 20$.
Seja $\overline{MN} = a$, logo $\overline{AC} = 2a$, pois M e N são os pontos médios de $[AB]$ e $[BC]$, respetivamente.
Seja $\overline{LN} = b$, logo $\overline{AB} = 2b$, pois L e N são os pontos médios de $[AC]$ e $[BC]$, respetivamente.
Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:
- $$(2a)^2 + (2b)^2 = 20^2 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 = 400 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 100$$
- Os únicos números inteiros que satisfazem $a^2 + b^2 = 100$ são, por exemplo, $a = 6$ e $b = 8$.
Logo as medidas inteiras dos lados do triângulo $[ABC]$ são 12, 16 e 20.

Avaliação global do tema

Ficha 21

pág. 94

- 1.1. (B)**
A ordenada de B é -2 , substituindo na equação da reta AB , temos $-2 = \frac{3}{2}x + 4 \Leftrightarrow x = -4$, as coordenadas de B (-4 , -2).
- 1.2.** As coordenadas de A (0 , 4) e B (-4 , -2). A circunferência tem centro C , ponto médio de $[AB]$, de coordenadas C (-2 , 1). raio $= \overline{AC} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$
A equação da circunferência é: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$
- 1.3.** As coordenadas de C (-2 , 1) e D (0 , -2). Declive: $\frac{-2 - 1}{0 + 2} = -\frac{3}{2}$. Ordenada na origem: -2
Equação da reta CD : $y = -\frac{3}{2}x - 2$
- 1.4.** As coordenadas de A (0 , 4) e E (9 , -2). Vetor diretor: \overrightarrow{AE} (9 , -6). Ponto: A (0 , 4)
Equação da reta AE : $(x, y) = (0, 4) + \lambda(9, -6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

1.5. (A)

$\overrightarrow{CE}(11, -3)$, como os vetores são colineares temos $\frac{3x-2}{11} = \frac{-k}{-3} \Leftrightarrow -9k+6 = -11k \Leftrightarrow k = -3$

1.6. $y \geq -2 \wedge (x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 13 \wedge y \leq -\frac{2x}{3} + 4 \wedge y \geq -\frac{3x}{2} - 2$

1.7. A área colorida é igual à diferença entre a área do triângulo $[DEF]$ e metade da área do círculo.

$$y = -\frac{2x}{3} + 4 \wedge y = -\frac{3x}{2} - 2 \Leftrightarrow x = -7,2 \wedge y = 8,8$$

$$\text{Área sombreada} = \frac{\overline{DE} \times (y_F + 2)}{2} - \frac{\sqrt{13}^2 \pi}{2} = \frac{9 \times 10,8}{2} - \frac{13\pi}{2} \approx 28,2 \text{ u. a.}$$

pág. 95

2.1. Os pontos A e B pertencem ao plano ABC de equação $x - 2z - 4 = 0$ e pertencem aos eixos Ox e Oz , respetivamente. Temos que $A(x, 0, 0)$ e $B(0, 0, z)$. Substituindo na equação do plano

$$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4, \text{ pelo que } A(4, 0, 0)$$

$$\text{e } -2z - 4 = 0 \Leftrightarrow z = -2, \text{ de onde } B(0, 0, -2).$$

2.2. (D)

A aresta do cubo é $[AB]$, a sua medida é $\sqrt{(4-0)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

2.3. A reta BF é paralela a AE ; o seu vetor diretor é $(1, 0, -2)$.

Uma equação vetorial é $(x, y, z) = (0, 0, -2) + \lambda(1, 0, -2), \lambda \in \mathbb{R}$.

2.4. Como os vetores \vec{u} e \overrightarrow{AE} são colineares, podemos escrever as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AE}(k, 0, -2k)$.

Por outro lado, $[AE]$ é uma aresta do cubo de medida $\sqrt{20}$, ou seja, $\overrightarrow{AE} = \sqrt{20}$.

$$\sqrt{k^2 + (-2k)^2} = \sqrt{20} \Leftrightarrow 5k^2 = 20 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \pm 2$$

Seja $E(x, y, z)$, \overrightarrow{AE} tem coordenadas $(x-4, y, z)$.

Para $k = -2$, temos que $(x-4, y, z) = (-2, 0, 4) \Leftrightarrow x = 2 \wedge y = 0 \wedge z = 4$

Para $k = 2$, temos que $(x-4, y, z) = (2, 0, -4) \Leftrightarrow x = 6 \wedge y = 0 \wedge z = -4$

Como E tem cota positiva, as suas coordenadas são $(2, 0, 4)$.

2.5. (C)

Como $F = B + \overrightarrow{AE} = (0, 0, -2) + (-2, 0, 4) = (-2, 0, 2)$.

Estatística

Vamos recordar

Ficha 1 Literacia estatística

pág. 98

- 1.1. Devido à situação pandémica que ocorreu em 2020 e 2021.
- 1.2. $10\,343 - 2038 = 8305$
Os museus portugueses tiveram menos 8305 visitantes estrangeiros.
- 1.3. $15\,763 - 7666 = 8097$
Os museus tiveram 8097 visitantes portugueses.
- 1.4. a) Os museus tiveram 15 763 visitantes, mais 8266 do que em 2021.
b) Os museus tiveram 7666 visitantes estrangeiros, mais 4775 do que em 2021.
- 1.5. Ao analisar o gráfico, podemos observar que, antes da pandemia, o número de visitantes era cerca de 19 milhões. Portanto, podemos prever que em 2023 o número total de visitantes aumente, em relação a 2022.
- 1.6. Variação do número de visitantes: $7666 - 2891 = 4775$
Variação em percentagem: $\frac{4775}{2891} \approx 1,65 \approx 165\%$
Em 2022, o número de visitantes estrangeiros aumentou cerca de 165%.

pág. 99

2. Por comparação com a população total, o perfil feminino, caracteriza-se por extremos: por um lado, existe uma proporção mais elevada de mulheres sem qualquer nível de escolaridade completo; por outro lado, as mulheres destacam-se, positivamente, em termos de nível de escolaridade superior.
- 3.1. A cadeia TSmx.
- 3.2. Basta alterar a escala no eixo das audiências. Para estar claro ambos os gráficos deviam ter a mesma escala.

Ficha 2 Introdução ao estudo da estatística

pág. 100

- 1.1. Sortear dez crachás de identificação.
- 1.2. Número de funcionários: $1373 - 1001 + 1 = 373$
Como $\frac{373}{10} = 37,3$, formam-se 10 grupos e sorteia-se um número inteiro de 1 a 37.
Por exemplo, se for sorteado o número 2, escolhemos os funcionários com identificação 1002, 1039, 1076, 1113, 1150, 1187, 1224, 1261, 1298, 1335.
- 2.1. Sendo c o número de alunos da turma C, temos que $\frac{c}{72} \times 20 = 5 \Leftrightarrow c = 18$
Sendo a o número de alunos da turma A, que é igual ao número de alunos da turma B, obtemos $2a + 18 = 72 \Leftrightarrow a = 27$.
As turmas A e B têm 27 alunos cada e a turma C tem 18 alunos.

2.2.

Variável em estudo	N.º total de letras no primeiro e último nome	Tempo que demora de casa à escola	Modo de vir para a escola	Comprimento da palma da mão (cm)	N.º de irmãos
Natureza	Quantitativa discreta	Quantitativa contínua	Qualitativa nominal	Quantitativa Contínua	Quantitativa discreta

3.

	3.1.	3.2.	3.3.
Variável em estudo	Nível dos alunos	Número de PC	Cor dos olhos
Natureza	Qualitativa ordinal	Quantitativa Discreta	Qualitativa nominal

4. A análise recorreu ao censo pois na notícia inicia com "O mercado total dos combustíveis...".

MMATOCAD © Porto Editora

Ficha 3 Dados qualitativos e organização de dados

- 1.1. Diz-se um gráfico de barras.
- 1.2. A variável é o tipo de trabalho voluntariado: apoio social; desporto, recreação,...; religião; ambiente; educação e investigação; outros.
Os dados são qualitativos nominais.
- 1.3. Verificou-se que o trabalho voluntário formal de homens e mulheres teve lugar em contextos organizacionais e áreas diferenciadas. Observa-se que as mulheres predominaram no apoio social (quase metade dos voluntários) e nas organizações religiosas, com cerca de 25%.
Os homens apresentaram um peso muito significativo no domínio desportivo/recreativo, em relação às mulheres.
Nos outros três domínios não há diferenças significativas entre os homens e as mulheres.

- 2.1. Grupo I: Gráfico circular
Grupo II: Gráfico de barras
Grupo III: Pictograma
- 2.2. Dados qualitativos ordinais.
- 2.3. $22\% + 24\% = 46\%$ ou $\frac{11 + 12}{50} = 0,46$, ou seja, 46%
- 2.4. Podemos afirmar que um grande número de alunos gostou e que quase metade dos alunos gostou muito ou adorou a ida ao teatro.
- 2.5. Como todos os alunos responderam, estamos perante um censo.

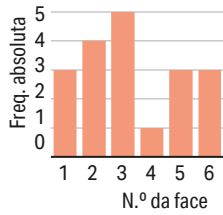
Ficha 4 Dados quantitativos discretos e organização de dados

1.1. Faces superiores a 3 (faces com os números 4, 5 e 6): $\frac{1 + 3 + 3}{20} \times 100\% = 35\%$

1.2.

N.º em cada face	Frequências absolutas		Frequências acumuladas	
	Simplex	Acumulada	Simplex	Acumulada
1	3	3	$\frac{3}{20} \times 100\% = 15\%$	15%
2	4	7	$\frac{4}{20} \times 100\% = 20\%$	35%
3	6	13	$\frac{6}{20} \times 100\% = 30\%$	65%
4	1	14	$\frac{1}{20} \times 100\% = 5\%$	70%
5	3	17	$\frac{3}{20} \times 100\% = 15\%$	85%
6	3	20	$\frac{3}{20} \times 100\% = 15\%$	100%
Total	20		100%	

1.3. Número da face saída em 20 lançamentos de um dado



1.4. A face 3.

2. (B)

$$A: \frac{7+4}{40} \times 100\% = 27,5\% ;$$

$$B: \frac{8+4}{40} \times 100\% = 30\% ;$$

$$C: \frac{4+7}{40} \times 100\% = 27,5\% ;$$

$$D: \frac{10}{21} \times 100\% \approx 48\% .$$

3.1. Foram medidas $7 + 8 + 4 + 1 = 20$ cenouras.

pág. 105

3.2.

										Solo B				Solo A											
										9	7	6	6	5	0	1	1	1	2	5	5	6	8		
														7	5	3	2	3	3	3	4	5	7	7	8
8	7	4	3	2	2	2	1	1	1					3	1	1	3	7							
														0	4	0									

3.3. Solo A: $\frac{8}{20} \times 100 = 40\%$

Solo B: $\frac{12}{20} \times 100 = 60\%$

É no solo B que há uma maior percentagem de cenouras com comprimento superior a 25 cm.

4. (D)

$$11 - 10 = 1$$

Ficha 5 Dados quantitativos contínuos, organização de dados e histograma

1.1. Sondagem, pois só se recolheu dados durante uma hora.

pág. 106

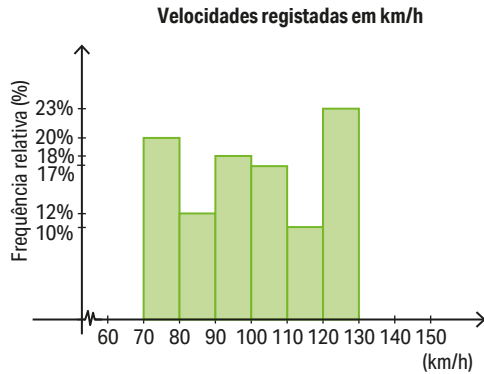
1.2. A variável é a velocidade em km/h e é uma variável quantitativa contínua.

1.3.

Classes	Frequência absoluta
[70, 80[12
[80, 90[7
[90, 100[11
[100, 110[10
[110, 120[6
[120, 130]	14
Total	60

1.4.

Classes	Frequência absoluta
[70, 80[20%
[80, 90[12%
[90, 100[18%
[100, 110[17%
[110, 120[10%
[120, 130]	23%
Total	100%



MMATOCAD © Porto Editora

2.1. $3 + 4 + 9 + 5 + 3 = 24$. Participaram 24 equipas.

pág. 107

2.2. $\frac{3+4}{24} \times 100 = 29,2\%$

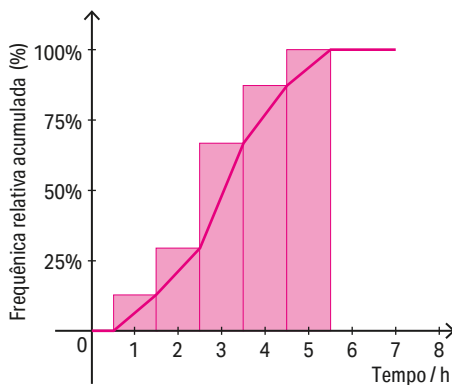
29,2% das equipas demoraram menos de 2 horas e meia.

2.3.

Classes	Frequência relativa	Frequência relativa acumulada
[0,5 ; 1,5[$3/24 = 12,5\%$	12,5%
[1,5 ; 2,5[$4/24 \approx 16,7\%$	29,2%
[2,5 ; 3,5[$9/24 = 37,5\%$	66,7%
[3,5 ; 4,5[$5/24 \approx 20,8\%$	87,5%
[4,5 ; 5,5[$3/24 = 12,5\%$	100%

2.4.

Tempos na prova de orientação



Ficha 6 Medidas de localização

pág. 108

1.1. O preço dos computadores vendidos em 2023 é uma variável quantitativa discreta.

1.2. O computador mais vendido em 2023 tem um custo de 1199,99 €.

1.3. Total de computadores vendidos: $15 + 20 + 50 + 30 = 115$

$$\bar{x} = \frac{15 \times 549,99 + 20 \times 799,99 + 50 \times 1199,99 + 30 \times 1799,99}{115} \approx 1202,16$$

O valor médio de vendas no ano 2023 foi 1202,16 €.

2.

Idade	25	26	27	28	29	30
Frequência relativa	20%	30%	10%	15%	15%	10%

$$\text{Idade média} = 25 \times 0,2 + 26 \times 0,3 + 27 \times 0,1 + 28 \times 0,15 + 29 \times 0,15 + 30 \times 0,1 = 27,05$$

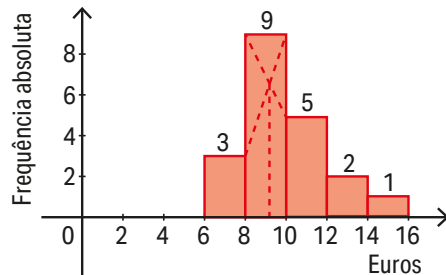
A idade média dos jovens da empresa MXdom é 27 anos.

3.1. $\frac{a}{20} = 0,85 \Leftrightarrow a = 17$ ou $12 + 5$; $\frac{19}{20} \times 100 = 95\%$

3.2. $\frac{7 \times 3 + 9 \times 9 + 11 \times 5 + 13 \times 2 + 15 \times 1}{20} = 9,9$

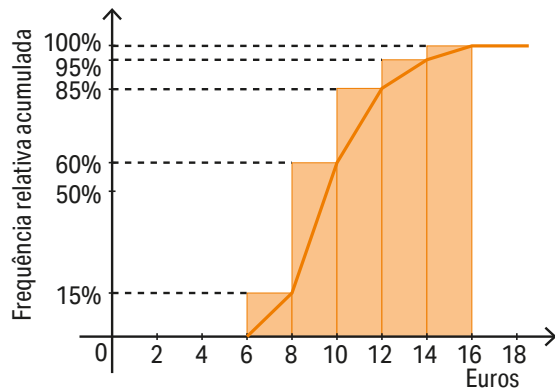
O ganho médio por ação é de 9,90 €.

3.3. **Previsão do valor ganho por ação**



3.4. A classe modal é $[8, 10[$ e um valor aproximado da moda é 9,20 €.

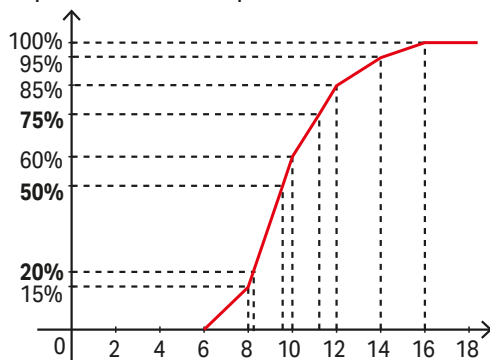
3.5. **Previsão do valor ganho por ação**



3.6. a) A mediana é, aproximadamente, 9,60 €.

b) O terceiro quartil é, aproximadamente, 11,20 €.

c) O percentil 20 é, aproximadamente, 8,20 €.



Ficha 7 Medidas de dispersão

1.1. $\bar{x}_{\text{Madeira}} = \frac{18 + 19 \times 3 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 26 \times 2 + 25}{12} \approx 21,8 \text{ } ^\circ\text{C}$

$\bar{x}_{\text{Açores}} = \frac{16 + 17 \times 3 + 18 \times 2 + 20 + 21 + 23 + 25 \times 2 + 26}{12} \approx 20,3 \text{ } ^\circ\text{C}$

1.2. R. A. da Madeira: máximo: 26; mínimo: 18; R. A. dos Açores: máximo: 26; mínimo: 16
 O diagrama d1 corresponde à R. A. da Madeira, pois a temperatura mínima é 18 °C; o d2 corresponde à R. A. dos Açores, pois a temperatura mínima é 16 °C.

- 1.3.** A diferença entre os extremos é menor na Madeira.
 Na Madeira e nos Açores verifica-se igual dispersão das temperaturas entre as mínimas e o primeiro quartil.
 Nos Açores há uma maior dispersão entre as temperaturas máximas e o terceiro quartil.
 Na Madeira, verifica-se uma simetria dos dados, enquanto que, nos Açores, os dados encontram-se mais concentrados abaixo da mediana.

1.4.

Madeira				
x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i \times (x_i - \bar{x})^2$
18	1	-3,8	14,44	14,44
19	3	-2,8	7,84	23,52
20	1	-1,8	3,24	3,24
21	1	-0,8	0,64	0,64
22	1	0,2	0,04	0,04
23	1	1,2	1,44	1,44
24	1	2,2	4,84	4,84
25	1	3,2	10,24	10,24
26	2	4,2	17,64	35,28
Total	12			93,68

Açores				
x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i \times (x_i - \bar{x})^2$
16	1	-4,3	18,49	18,06
17	3	-3,3	10,89	31,68
18	2	-2,3	5,29	10,12
20	1	-0,3	0,09	0,06
21	1	0,7	0,49	0,56
23	1	2,7	7,29	7,56
25	2	4,7	22,09	45,12
26	1	5,7	32,49	33,06
Total	12			146,22

Valor aproximado do desvio-padrão: Madeira é 2,9; Açores: 3,6

pág. 111

2.1. $\frac{14 \times 6 + 15 \times 10 + 16 \times 6 + p \times 2}{24} = 48,5 \Leftrightarrow p = 417$

2.2. **Escola A** $\bar{x} = 2,125$; $s_x \approx 1,57$ **Escola B** $\bar{y} = 2$; $s_y \approx 0,8$

De acordo com os resultados obtidos para as duas amostras, podemos afirmar que existe uma maior variabilidade na amostra da escola A, pois o desvio-padrão é muito maior do que o desvio-padrão da outra amostra, apesar de as médias serem aproximadamente iguais.

Ficha 8 Propriedades da média e do desvio-padrão

pág. 112

1.1. Na escola da Marta há $62 + 32 + 2 + 15 = 111$ alunos no 12.º ano.

1.2. $\bar{x} = \frac{15 \times 16 + 62 \times 17 + 32 \times 18 + 2 \times 19}{111} \approx 17,2$

$$s_x = \sqrt{\frac{15 \times (16 - 17,2)^2 + 62 \times (17 - 17,2)^2 + 32 \times (18 - 17,2)^2 + 2 \times (19 - 17,2)^2}{110}} \approx 0,7$$

1.3. Como foi há dois anos, todos os alunos tinham menos dois anos, logo a média das idades no 10.º ano era, aproximadamente, 15,2 anos ($17,2 - 2 = 15,2$).
 O desvio-padrão é o mesmo, ou seja, é, aproximadamente, igual a 0,7.

2.1. $\bar{x} = 3 \times 0,2 + 6 \times 0,48 + 9 \times 0,32 = 6,36$

$$s_x = \sqrt{\frac{(3 - 6,36)^2 \times 5 + (6 - 6,36)^2 \times 12 + (9 - 6,36)^2 \times 8}{24}} \approx 2,17$$

2.2. Como as percentagens dos alunos que acertaram em 3, 6 e 9 questões são, respetivamente, iguais aos que acertaram em 5, 10 e 15 questões e $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9}$, temos que

$$\bar{y} = 6,36 \times \frac{5}{3} = 10,6 \text{ e } s_y \approx 2,17 \times \frac{5}{3} \approx 3,6$$

3. $1350 + 1350 \times 0,05 = 1417,50$ ou $1350 \times 1,05 = 1417,50$ $(100\% + 5\% = 105\% = \frac{105}{100} = 1,05)$
 A média dos novos vencimentos é 1417,50 €.

4.1. A média de todos os alunos da turma é $\frac{175 \times 20 + 160}{21} \approx 174$ cm.

4.2. $\frac{175 \times 20 + a}{21} = 176 \Leftrightarrow a = 196$

A altura do aluno deveria ser igual a 196 cm.

5.1. $\bar{x} = \frac{6 \times 7 + 4 \times 8 + 2 \times 9 + 2 \times 10 + 5 \times 11 + 7 \times 15 + 19 + 3 \times 20}{30} = 11,7$

5.2. $\bar{y} = \frac{2 \times 10 + 5 \times 11 + 7 \times 15 + 19 + 3 \times 20}{18} \approx 14,4$

5.3. $\bar{z} = \frac{6 \times 7 + 4 \times 8 + 2 \times 9}{12} \approx 7,7$

5.4. Facilmente verificamos que $11,7 \neq 14,4 + 7,7$.

Não se verifica, porque o número de alunos aprovados é diferente do número de alunos reprovados.

Avaliação

Ficha 9 Dados univariados

1.1. (C)

T – Número total de alunos inscritos na disciplina de Matemática A.

$0,125 \times T = 10 \Leftrightarrow T = 80$.

1.2.

Classificação	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência relativa acumulada
12	4	5%	5%
14	12	15%	20%
15	22	27,5%	47,5%
16	26	32,5%	80%
18	10	12,5%	92,5%
19	4	5%	97,5%
20	2	2,5%	100%
Total	80	100%	

1.3. (D)

$\frac{64}{80} = 0,8 = 80\%$

1.4. $\bar{x} = \frac{4 \times 12 + 12 \times 14 + 22 \times 15 + 26 \times 16 + 10 \times 18 + 4 \times 19 + 2 \times 20}{80} = \frac{1258}{80} = 15,725$

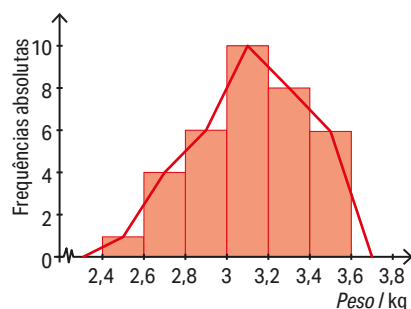
A média das classificações à disciplina de Matemática A é, aproximadamente, igual a 15,7 valores.

2.1. Quantitativa contínua

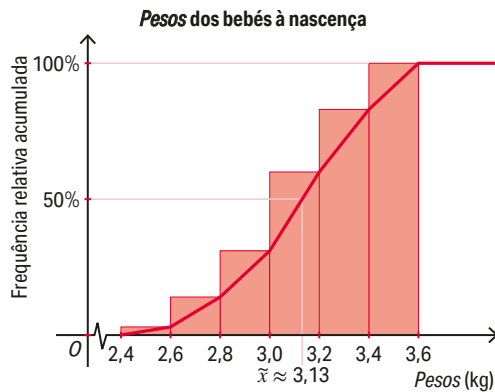
2.2. $\bar{x} = \frac{1 \times 2,5 + 4 \times 2,7 + 6 \times 2,9 + 10 \times 3,1 + 8 \times 3,3 + 6 \times 3,5}{35} = \frac{109,1}{35} \approx 3,1$

A média dos pesos dos bebés à nascença é, aproximadamente, igual a 3,1 kg.

2.3.



2.4.



Pesos (kg)	f_i	F_i	Fr_i
[2,4 ; 2,6[1	1	3%
[2,6 ; 2,8[4	5	14%
[2,8 ; 3,0[6	11	31%
[3,0 ; 3,2[10	21	60%
[3,2 ; 3,4[8	29	83%
[3,4 ; 3,6]	6	35	100%
	35		

Resposta: Aproximadamente, 3,13 kg .

2.5.
$$s = \sqrt{\frac{(-0,6)^2 + 4(-0,4)^2 + 6(-0,2)^2 + 10 \times 0^2 + 8 \times 0,2^2 + 6 \times 0,4^2}{35 - 1}} \approx 0,3$$

Intervalo: $]\bar{x} - s ; \bar{x} + s[=]3,1 - 0,3 ; 3,1 + 0,3[$, ou seja, $]2,8 ; 3,4[$.

Assim, $\frac{6 + 10 + 8}{35} \approx 0,6857 \approx 68,6\%$.

Resposta: Aproximadamente, 68,6% .

Ficha 10 Diagrama de dispersão

pág. 116

1.1. A, C e D

1.2. A e C

1.3. D

2. (A)

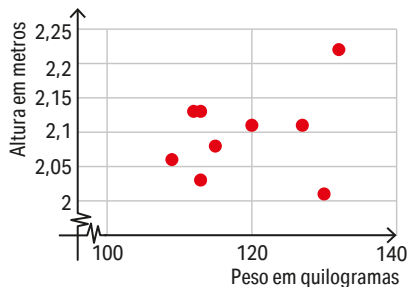
pág. 117

3.1.
$$\bar{x} = \frac{130 + 113 + 109 + 115 + 120 + 127 + 113 + 112 + 132}{9} = 119$$

$$\bar{y} = \frac{2,01 + 2,03 + 2,06 + 2,08 + 2,11 + 2,11 + 2,13 + 2,13 + 2,22}{9} \approx 2,10$$

Média do Peso: 119 kg ; média da Altura: 2,1 m , aproximadamente.

3.2.



3.3. Observando o diagrama de dispersão, verifica-se que a nuvem de pontos se encontra bastante dispersa, o que indica uma correlação linear fraca entre o peso e altura dos jogadores.

4.1. Existe uma correlação linear negativa fraca entre as duas variáveis.

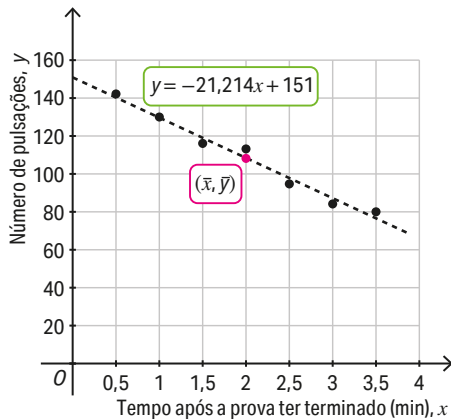
4.2. Existe uma correlação linear positiva forte entre as duas variáveis.

Ficha 11 Coeficiente de correlação linear e reta de regressão

pág. 118

MMAT/OCAD © Porto Editora

1.1. e 1.2.



1.3. a) 3 min e 15 s = 3,25 s

$$y = -21,214 \times 3,25 + 151 \approx 82$$

Teria cerca de 82 pulsações por minuto.

b) $y = -21,214 \times 0 + 151 \approx 151$

Teria cerca de 151 pulsações por minuto.

O resultado é credível dado que 0 se encontra próximo do intervalo dos dados.

c) $-21,214x + 151 = 122 \Leftrightarrow x = \frac{151 - 122}{21,214} \Leftrightarrow x \approx 1,367$;

$$1,367 \text{ min} = 1,367 \times 60 \text{ s} \approx 82 \text{ s}$$

Terão passado cerca de 82 segundos.

pág. 119

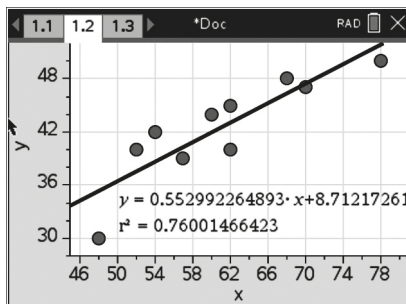
2.1. O coeficiente de correlação no diagrama (A) e no gráfico (B) é positivo.

2.2. Os diagramas, (A) e (B), têm exatamente a mesma escala. Portanto, pode concluir-se que o coeficiente de correlação no diagrama (A) é menor que o coeficiente de correlação no diagrama (B), pois no diagrama (A) a nuvem de pontos encontra-se mais dispersa.

3.1. Coeficiente de correlação: $r = 0,872$

Equação da reta de regressão: $y = 0,553x + 8,712$

3.2.



Ficha 12 Estatística e tecnologia

pág. 120

MMAT/CAD © Porto Editora

1.1. a) A variável é quantitativa discreta.

b) Pode recorrer à função "SOMA ()", fórmulas de cálculo e formatação da célula em percentagem.

Exemplo de uma tabela:

N.º de elementos do agregado familiar (x_i)	f. a.	f. r.	f. r. (%)	F. Ac.	F. Ac. (%)	$x_i \times f. r.$
1	3703	0,259	25,9%	3703	25,9%	0,26
2	5239	0,366	36,6%	8942	62,5%	0,73
3	3028	0,212	21,2%	11970	83,7%	0,64
4	1798	0,126	12,6%	13768	96,3%	0,50
5	529	0,037	3,7%	14297	100,0%	0,19
	14297	1,000	100%			2,32

=SOMA(... :...)

Formatação da célula

Média

c) Qualquer um dos gráficos é adequado.

A Maria deve acrescentar um título, uma legenda e, por exemplo, no gráfico de barras, associar valores a cada barra.

d) $\bar{x} \approx 2,32$; $Q_1 = 1$; Mediana = $Q_2 = 2$; $Q_3 = 3$

pág. 121

1.2. a) Quantitativa discreta

b) Na caixa de entrada:

- criou uma lista com os dados: dados = {36, 76, ..., 152}
- criou uma lista de classes: classes = Classes (lista de dados, início, amplitude):
Resultado: classes = {25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200}
- criou uma lista de frequências absolutas:
frequências = Frequência (lista de intervalos de classe, lista de dados)
Resultado: frequências = {6, 9, 18, 15, 11, 8, 3}

• recorreu às funções

TabelaFrequência (false, lista de intervalos de classe, lista de dados) e

TabelaFrequência (true, lista de intervalos de classe, lista de dados)

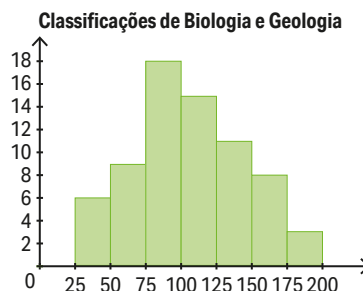
para obter a tabela de frequências absolutas e a tabela de frequências absolutas acumuladas, respetivamente:

Intervalo	Contar
25 - 50	6
50 - 75	9
75 - 100	18
100 - 125	15
125 - 150	11
150 - 175	8
175 - 200	3

Intervalo	Contar
25 - 50	6
50 - 75	15
75 - 100	33
100 - 125	48
125 - 150	59
150 - 175	67
175 - 200	70

c) Na caixa de entrada recorreu à função

Histograma (lista de intervalos de classe, lista de frequências) e obteve o histograma:



d)	Dados não agrupados	Dados agrupados
Média	média (lista de dados não agrupados) = 104,17	média (classes,freq) = 106,07
Mediana	Mediana (lista de dados não agrupados) = 100,5	Mediana (classes,freq) = 103,33
Moda	Moda (lista de dados não agrupados) = 95	Pelo histograma a classe modal é [75 , 100[
Quartil 1	Quartil1 (lista de dados não agrupados) = 76	
Quartil 2	Quartil3 (lista de dados não agrupados) = 136	
P_{90}	Percentil (lista de dados não agrupados, 0.90) = 159,5	

MMA10CAD © Porto Editora

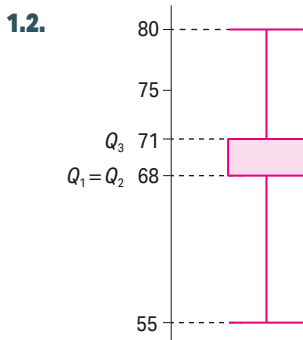
Avaliação global do tema

Ficha 13

pág. 122

$$1.1. \bar{x} = \frac{3 \times 55 + 5 \times 59 + 4 \times 63 + 6 \times 64 + 20 \times 68 + 14 \times 70 + 9 \times 71 + 10 \times 72 + 4 \times 80}{75} = \frac{5115}{75} = 68,2$$

A idade média é, aproximadamente, igual a 68,2 anos.



A representação anterior mostra que estamos perante uma situação de extremo enviesamento. A distribuição é assimétrica.

- 1.3. $\frac{35 \times 75}{100} = 26,25$ (não é inteiro). Assim, P_{35} é o elemento de ordem $[26,25] + 1$, ou seja de ordem 27. Através das frequências absolutas acumuladas observa-se que o elemento de ordem 27 é o 68. Assim, $P_{35} = 68$.

Idades	55	59	63	64	68	70	71	72	80
N.º de espectadores	3	5	4	6	20	14	9	10	4
Frequência absoluta acumulada	3	8	12	18	38	52	61	71	75

Podemos afirmar que, pelo menos, 35% dos espectadores que estavam na audiência do concurso tinham idade inferior ou igual a 68 ou que, no máximo, 65% desses tinham idade superior a 68.

pág. 123

$$2.1. \bar{x} = \frac{8 \times 10 + 16 \times 30 + 24 \times 50 + 12 \times 70 + 6 \times 90 + 18 \times 110}{84} = \frac{5120}{84} \approx 61$$

Resposta: Aproximadamente 61 minutos.

2.2. (D)

Observação: A classe mediana é [40 , 60[.

2.3.

Classe	Marca da classe, x_i	Frequência absoluta, n_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
[0, 20[10	8	2601	20 808
[20, 40[30	16	961	15 376
[40, 60[50	24	121	2904
[60, 80[70	12	81	972
[80, 100[90	6	841	5046
[100, 120[110	18	2401	43 218
Total		84		88 324

$$s = \sqrt{\frac{88\,324}{84 - 1}} \approx 32,6$$

pág. 124

3.1.

Valor da frequência acumulada para determinar	Valor aproximado do quartil
$400 \times 0,25 = 100$	$Q_1 = 27\%$
$400 \times 0,5 = 200$	$Q_2 = 47\%$
$400 \times 0,75 = 300$	$Q_3 = 72\%$

3.2. A classificação máxima foi 100%.

3.3. Nenhum dos alunos obteve a classificação de 0% no exame (o gráfico passa no ponto de coordenadas (0, 0)).

3.4. 250 alunos tiveram classificação inferior ou igual a 60%.

 $400 - 250 = 150$ tiveram classificação superior a 60%.

$$\frac{150}{400} = 0,375 = 37,5\% \text{ dos alunos tiveram classificação superior a } 60\%.$$

3.5. (B)
 $400 \times 0,65 = 260$, temos $P_{65} \approx 62\%$; $400 \times 0,45 = 180$, temos $P_{45} \approx 46\%$;

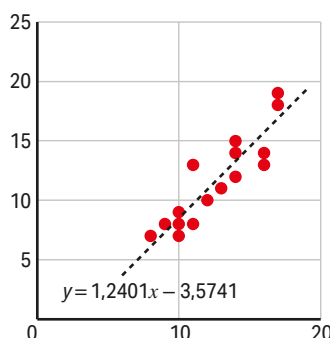
$$P_{65} - P_{45} \approx 16$$

pág. 125

4.1. Média CIF: Aprox. 12,5 valores; média CE: Aprox. 11,5 valores

4.2. Desvio-padrão CIF: aproximadamente 2,92; desvio-padrão CE: aproximadamente 3,72

O desvio-padrão da CIF é inferior, o que significa que as classificações estão menos dispersas, ou seja, estão mais concentradas em torno na média (sendo assim mais homogêneas).

4.3. $a \approx 1,21$; $b \approx -3,62$; $r \approx 0,95$

4.4. (D)
4.5. a) $y = 1,21 \times 11 - 3,62 \approx 10$

Estima-se que obtenha, aproximadamente, 10 valores no exame.

b) $y = 1,21 \times 18 - 3,62 \approx 18$

Estima-se que obtenha, aproximadamente, 18 valores no exame.