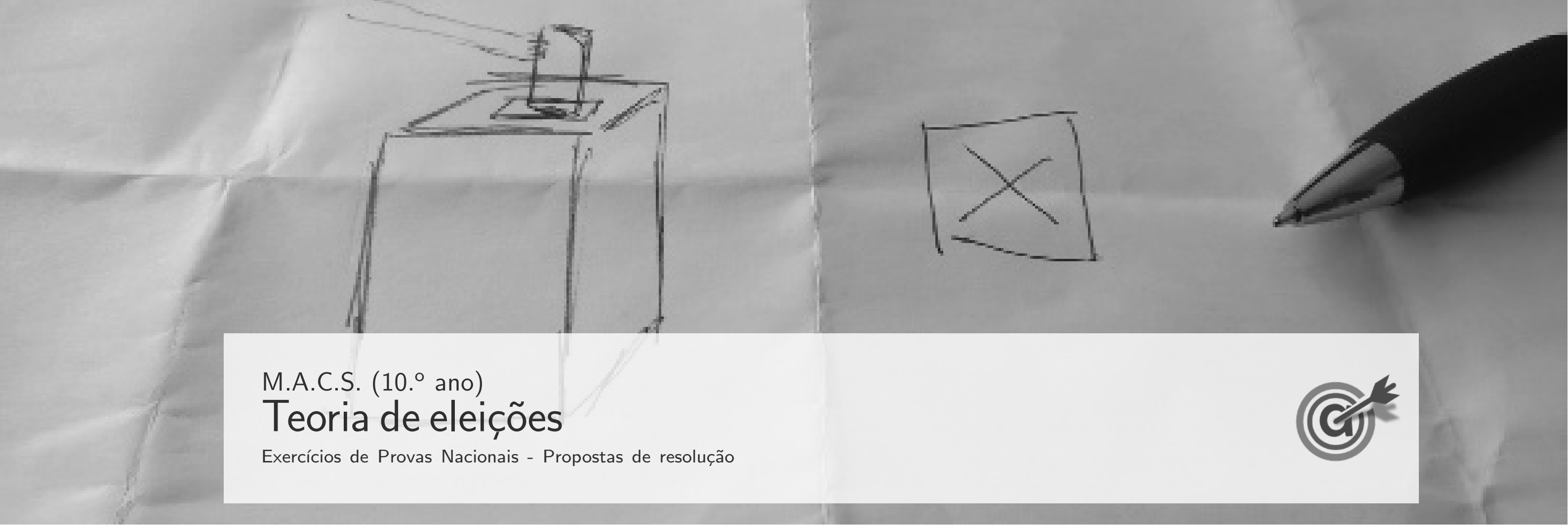


M.A.C.S. (10.º ano)

Teoria de eleições

Exercícios de Provas Nacionais - Propostas de resolução

1. Efetuando a soma dos atribuídos a cada local, temos:

	Cabo Girão	**Pico do Areeiro**	**Porto Moniz**	**Santana**
Soma	$2+4+1+3=10$	$1+5+4+1=11$	$3+1+3+4=11$	$4+0+2+2=10$

Como no total existem 40 pontos, nenhum dos locais obteve os 21 pontos necessários para atingir a maioria absoluta. Verifica-se ainda que Santana foi o local menos pontuado, pelo que deve ser eliminado da tabela.

Assim, criando a nova tabela, de acordo com o método descrito, e obtendo a soma das pontuações decorrente desta tabela, temos:

	Cabo Girão	**Pico do Areeiro**	**Porto Moniz**
António	2	1	$3+4=7$
Camila	4	$5+0=5$	1
Dora	1	$4+2=6$	3
Francisco	3	1	$4+2=6$
Soma	10	13	17

Continua a verificar-se que nenhum dos locais obteve os 21 pontos necessários para atingir a maioria absoluta. Verifica-se ainda que o Cabo Girão foi agora o local menos pontuado, pelo que também deve ser eliminado da tabela.

Assim, criando ainda outra tabela, e obtendo as somas, de acordo com o método descrito, temos:

	Pico do Areeiro	**Porto Moniz**
António	1	$7+2=9$
Camila	$5+4=9$	1
Dora	$6+1=7$	3
Francisco	1	$6+3=9$
Soma	18	22

Assim, como Porto Moniz obteve a maioria absoluta dos pontos (mais de 21), este será o primeiro local a visitar pela família Antunes.

Exame – 2024, Ép. especial

2. Aplicando o método descrito, sem contemplar o voto da Daniela, ou seja, apenas com os dados da tabela, temos:

   - Pontuação do Artur: $3 \times 5 + 2 \times 3 + 3 \times 1 + 1 \times 5 = 15 + 6 + 3 + 5 = 29$
   - Pontuação do Bruno: $3 \times 3 + 2 \times 1 + 3 \times 5 + 1 \times 1 = 9 + 2 + 15 + 1 = 27$
   - Pontuação do César: $3 \times 1 + 2 \times 5 + 3 \times 3 + 1 \times 3 = 3 + 10 + 9 + 3 = 25$

   Como existem seis possibilidades de ordenação do voto da Daniela, podemos verificar qual delas verifica as constatações que se apuraram:

Ordenação	Total **A**	Total **B**	Total **C**	Análise e justificação
A>B>C	$29 + 5 = 34$	$27 + 3 = 30$	$25 + 1 = 26$	Impossível, porque o César não ficaria em segundo lugar.
A>C>B	$29 + 5 = 34$	$27 + 1 = 28$	$25 + 3 = 28$	Impossível, porque haveriam candidatos com o mesmo número de pontos.
B>A>C	$29 + 3 = 32$	$27 + 5 = 32$	$25 + 1 = 26$	Impossível, porque haveriam candidatos com o mesmo número de pontos.
B>C>A	$29 + 1 = 30$	$27 + 5 = 32$	$25 + 3 = 28$	Impossível, porque o candidato escolhido não seria o Artur.
C>A>B	$29 + 3 = 32$	$27 + 1 = 28$	$25 + 5 = 30$	Todas as constatações se verificam.
C>B>A	$29 + 1 = 30$	$27 + 3 = 30$	$25 + 5 = 30$	Impossível, porque haveriam candidatos com o mesmo número de pontos.

   Assim, vem que:

   Antes de contabilizar o voto da Daniela, o candidato que estava em primeiro lugar tinha **29** pontos, e o candidato **B** estava em segundo lugar.
   Depois de contabilizados os 10 votos, o candidato vencedor obteve **32** pontos.
   Na lista de preferências da Daniela, o candidato **C** estava na primeira preferência.

   Logo, as correspondências corretas são:

   - **I** $\rightarrow$ **b)**
   - **II** $\rightarrow$ **b)**
   - **III** $\rightarrow$ **a)**
   - **IV** $\rightarrow$ **c)**

3. Aplicando o método descrito para a escolha do castelo, temos:

   - Pontuação do castelo de Abrantes: $0+3+5+3=11$ pontos
   - Pontuação do castelo de Lamego: $5+1+3+1=10$ pontos
   - Pontuação do castelo de Montemor-o-Novo: $2+4+0+2=8$ pontos
   - Pontuação do castelo de Viana do Alentejo: $3+2+2+4=11$ pontos

   Como foram considerados $4 \times 10 = 40$ pontos no total, a maioria absoluta do total de pontos corresponde a $\frac{40}{2}+1=20+1=21$, pelo que é possível observar que nenhum dos castelos registou esta soma (ou um valor superior) no total dos pontos.
   Assim, criando uma nova a tabela de acordo com o método descrito, ou seja, eliminando a coluna relativa ao castelo de Montemor-o-Novo, temos:

	A	**L**	**V**
Carlos	0	$5+2=7$	3
Diana	$3+4=7$	1	2
Fausto	$5+0=5$	3	2
Matilde	3	1	$4+2=6$

   Aplicando procedimento anterior para a escolha do castelo à nova tabela, temos:

   - Pontuação do castelo de Abrantes: $0+7+5+3=15$ pontos
   - Pontuação do castelo de Lamego: $7+1+3+1=12$ pontos
   - Pontuação do castelo de Viana do Alentejo: $3+2+2+6=13$ pontos

   Como o total de pontos é 40, é possível observar que nenhum dos castelos voltou a registar maioria absoluta (21 ou mais pontos).
   Assim, criando uma nova a tabela em que se elimina a coluna relativa ao castelo de Lamego, temos:

	A	**V**
Carlos	0	$3+7=10$
Diana	$7+1=8$	2
Fausto	$5+3=8$	2
Matilde	3	$6+1=7$

   Aplicando procedimento para a escolha do castelo a esta tabela, temos:

   - Pontuação do castelo de Abrantes: $0+8+8+3=19$ pontos
   - Pontuação do castelo de Viana do Alentejo: $10+2+2+7=21$ pontos

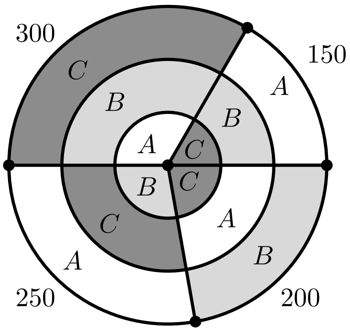
   Como o total de pontos é 40, o castelo selecionado é o Viana por ter maioria absoluta (21 pontos).
   E assim podemos afirmar que pela aplicação do método descrito, o primeiro castelo eliminado foi o de Montemor-o-novo, e o segundo foi o Lamego. De entre os restantes castelos, aquele que será visitado será o Viana do Alentejo, tendo o outro (o de Abrantes) totalizado 19 pontos.

   Logo, as correspondências corretas são:

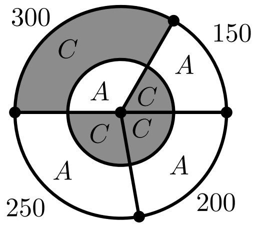
   - **I $\rightarrow$ b)**
   - **II $\rightarrow$ a)**
   - **III $\rightarrow$ c)**
   - **IV $\rightarrow$ b)**

4. Aplicando o método descrito, temos:

- Número de votos necessário para obter maioria absoluta: $\dfrac{900}{2} + 1 = 451$;
- observando o número de votos em cada empregado, como primeira preferência, verifica-se que nenhum deles obtém a maioria absoluta (o empregado mais votado foi a Ana com 300 votos);
- o empregado com menor número de votos foi a Diana com 150 votos;
- reestruturando o diagrama, eliminando a Diana, podemos verificar que:
  - observando o número de votos em cada empregado, como primeira preferência, verifica-se que nenhum deles obtém a maioria absoluta (o empregado mais votado foi o Carlos com $150 + 200 = 350$ votos);
  - o empregado com menor número de votos foi a Bernardo com 200 votos;



- reestruturando novamente o diagrama, eliminando o Bernardo, podemos verificar que o Carlos obtém a maioria absoluta com $150 + 250 + 200 = 600$ votos;



Logo, as correspondências corretas são:

- **I → a)**
- **II → c)**
- **III → b)**
- **IV → b)**

5. De acordo com o método descrito, temos que a pontuação total do jogador P, é:

$$4 \times 200 + 3 \times 400 + 2 \times 600 = 3200$$

Como o jogador Q obteve um total de 1400 pontos, e sabemos que não ficou na 4.ª preferência da lista 1 (porque essa preferência foi dada ao jogador S), então ficou na 4.ª preferência das listas 2 e 3, e na 3.ª preferência da lista 1, porque é a única forma de somar apenas 1400 pontos:

$$2 \times 200 + 1 \times 400 + 1 \times 600 = 1400$$

Relativamente à pontuação do jogador S, sabemos que não ficou na primeira preferência da lista e, porque assim teria mais pontos que o jogador S: $(1 \times 200 + 2 \times 400 + 4 \times 600 = 3400)$, e como também não ficou na 4.ª preferência (jogador Q) nem na 3.ª (jogador S), então a sua preferência é a 2.ª.

Assim o jogador R deve ocupar a 1.ª preferência da lista 3, por ser o único jogador e a única preferência ainda não determinados. Desta forma a ordenação dos jogadores na lista 3, é:

	1.ª Preferência	**2.ª Preferência**	**3.ª Preferência**	**4.ª Preferência**
Jogador	R	S	P	Q

Exame – 2022, Ép. especial

6. Da observação do diagrama podemos preencher a totalidade da tabela apresentada:

Votos / **Preferência**	3	4	4	6	6	7
1.ª	A	A	B	B	C	C
2.ª	B	C	A	C	B	A
3.ª	C	B	C	A	A	B

Aplicando o método descrito para determinar qual dos candidatos foi eleito como novo diretor do parque de campismo, começando por comparar as votações dos candidatos A e C, temos:

	N.º de votos	N.º de votos	Vencedor
Candidatos A e C	Candidato A $3 + 4 + 4 = 11$	Candidato C $6 + 6 + 7 = 19$	Candidato C
Candidatos C e B	Candidato C $4 + 6 + 7 = 17$	Candidato C $3 + 4 + 6 = 13$	Candidato C

Como o Carlos (candidato C) venceu em todas as comparações com os restantes, foi eleito como novo diretor do parque de campismo.

Exame – 2022, 2.ª Fase

7. Aplicando o método descrito para obter a composição da atual direção, temos:
   - Pontuação da Alice (4 pontos na competência C, 3 pontos na competência N, 3 pontos na competência T, 5 pontos na competência I e 4 pontos na competência P):
   $$4 \times 5 + 3 \times 4 + 3 \times 3 + 5 \times 2 + 4 \times 1 = 55$$
   - Pontuação do Bruno (4 pontos na competência C, 2 pontos na competência N, 3 pontos na competência T, 2 pontos na competência I e 2 pontos na competência P):
   $$4 \times 5 + 2 \times 4 + 3 \times 3 + 3 \times 2 + 3 \times 1 = 46$$
   - Pontuação da Carlota (3 pontos na competência C, 5 pontos na competência N, 5 pontos na competência T, 3 pontos na competência I e 4 pontos na competência P):
   $$3 \times 5 + 5 \times 4 + 5 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 1 = 60$$
   - Pontuação do Delfim (5 pontos na competência C, 3 pontos na competência N, 3 pontos na competência T, 3 pontos na competência I e 3 pontos na competência P):
   $$5 \times 5 + 3 \times 4 + 3 \times 3 + 3 \times 2 + 3 \times 1 = 55$$

   Assim, na ordenação dos candidatos por ordem decrescente de pontuação, temos que a candidata com maior pontuação é a Carlota, pelo que será a primeira candidata admitida, mas como foram selecionados dois candidatos, e a Alice e o Delfim ficaram empatados com a segunda maior pontuação, foi necessário recorrer a uma entrevista a estes dois candidatos para selecionar o segundo candidato admitido.

   Exame – 2022, 1.ª Fase

8. Aplicando o método descrito para obter a composição da atual direção, temos:
   - Pontuação do António (124 votos na 1.ª preferência, 90 votos na 1.ª preferência e 160 votos na 3.ª preferência):
   $$125 \times 5 + 90 \times 3 + 160 \times 1 = 1055$$
   - Pontuação do Bernardo (160 votos na 1.ª preferência, 125 votos na 1.ª preferência e 90 votos na 3.ª preferência):
   $$160 \times 5 + 125 \times 3 + 90 \times 1 = 1265$$
   - Pontuação da Carla (90 votos na 1.ª preferência, 160 votos na 2.ª preferência e 125 votos na 3.ª preferência):
   $$90 \times 5 + 160 \times 3 + 125 \times 1 = 1055$$

   Como não existem candidatos empatados, os seus lugares na direção são decididos utilizando a idade como critério de desempate, e como a Carla é mais velha que o António, será ela a assumir o cargo de maior importância.

   Assim, a composição da direção da rádio OnOfff, é:
   - Diretor: Bernardo (1265 votos)
   - Vice-diretor: Carla (1055 votos - 29 anos)
   - Adjunto da direção: António (1055 votos - 27 anos)

   Exame – 2021, Ép. especial

9. Temos que:
    - O número total de votos que não eram válidos foi 96, correspondentes a 25% dos eleitores que votaram (porque 75% foram considerados válidos), pelo que o número votantes (NV), é:

$$\frac{NV}{96} = \frac{100}{25} \Leftrightarrow NV = \frac{96 \times 100}{25} \Leftrightarrow NV = 384$$

    - Como existiam 480 e votaram 384, o número de eleitores inscritos que não votou foi $480 - 384 = 96$, pelo que a taxa de abstenção (TA) corresponde à percentagem a que corresponde 96 eleitores que não votaram no total 480 eleitores inscritos, ou seja:

$$\frac{TA}{100} = \frac{96}{480} \Leftrightarrow TA = \frac{100 \times 96}{480} \Leftrightarrow TA = 20$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2021, Ép. especial

10. Como Barcelona foi a cidade vencedora, começamos por aplicar o método, escolhendo todos os pares que envolvem esta cidade:

N.º de votos / Pares	36	58	X	29	Totais
Barcelona e Cracóvia	B	B	C	C	Barcelona: $36 + 58 = 94$ Cracóvia: $X + 29$
Barcelona e Praga	B	P	B	P	Barcelona: $36 + X$ Praga: $58 + 29 = 87$
Barcelona e Roma	B	R	B	B	Barcelona: $36 + X + 29 = X + 65$ Roma: 58

Assim, como sabemos que Barcelona teve mais votos que qualquer uma das restantes cidades, podemos verificar que:

- $X + 29 < 94 \Leftrightarrow X < 94 - 29 \Leftrightarrow X < 65$
- $36 + X + > 87 \Leftrightarrow X > 87 - 36 \Leftrightarrow X > 51$
- $X + 65 > 58 \Leftrightarrow X > 58 - 65 \Leftrightarrow X > -7$

Como X é um número natural, Barcelona tem mais votos que Roma independentemente do valor de X, para que Barcelona tenha mais votos que Praga, X deve ser superior a 51, ou seja deve ser no mínimo 52, e para que Barcelona tenha mais votos que Cracóvia, X deve ser inferior a 65, ou seja, deve ser 64 no máximo, pelo que, X representa no mínimo 52 e no máximo 64.

Exame – 2021, 2.ª Fase

11. Temos que:

- O número total de votos validamente expressos foi 7200, correspondentes a 96% dos votos apurados, pelo que o número de votos apurados (VA), é:

$$\frac{VA}{7200} = \frac{100}{96} \Leftrightarrow VA = \frac{7200 \times 100}{96} \Leftrightarrow VA = 7500$$

- Como a abstenção foi de 20%, o número de votos apurados (VA), corresponde a $100 - 20 = 80\%$ do número de acionistas da empresa que poderiam ter votado (NA), ou seja:

$$\frac{NA}{7500} = \frac{100}{80} \Leftrightarrow NA = \frac{7500 \times 100}{80} \Leftrightarrow VA = 9375$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2021, 1.ª Fase

12. Aplicando o método descrito, temos:

- Número de votos necessário para obter maioria absoluta: 12 (porque $\frac{23}{2} = 11{,}5$)
- Observando o número de votos em cada cidade, como primeira preferência, verifica-se que nenhuma delas obtém a maioria absoluta (a cidade mais votada foi Veneza com 8 votos)
- Reestruturando novamente a tabela, de acordo com o método descrito, ou seja, eliminando a cidade que obteve o menor número de votos, como primeira preferência - Milão - temos:

Votos / Preferências	8	7	5	3
1.ª	Veneza	Florença	Milão	Veneza
2.ª	Florença	Milão	Florença	Milão
3.ª	Milão	Veneza	Veneza	Florença

- Observando o número de votos em cada cidade, como primeira preferência na tabela reestruturada, verifica-se que nenhuma delas obtém a maioria absoluta novamente (a cidade mais votada é, de novo, Veneza com $8 + 3 = 11$ votos)
- Reestruturando a tabela, de acordo com o método descrito, ou seja, eliminando a cidade que obteve o menor número de votos, como primeira preferência - Milão - temos:

Votos / Preferências	8	7	5	3
1.ª	Veneza	Florença	Florença	Veneza
2.ª	Florença	Veneza	Veneza	Florença

E assim, a cidade selecionada pelos amigos para visitar depois de Roma, ou seja a cidade com maioria absoluta de votos ($7 + 5 = 12$, ou seja, mais que 11,5), é Florença.

Exame – 2020, 2.ª Fase

13. Aplicando o método descrito antes de ser contabilizado o voto do Filipe, temos:
   - Pontuação do festival A (4 votos na 1.ª preferência e 5 votos na 3.ª preferência):

$$4 \times 5 + 5 \times 1 = 20 + 5 = 25$$

   - Pontuação do festival B (3 votos na 1.ª preferência, 4 votos na 2.ª preferência e 2 votos na 3.ª preferência):

$$3 \times 5 + 4 \times 3 + 2 \times 1 = 15 + 12 + 2 = 29$$

   - Pontuação do festival C (2 votos na 1.ª preferência, 5 votos na 2.ª preferência e 2 votos na 3.ª preferência:

$$2 \times 5 + 5 \times 3 + 2 \times 1 = 10 + 15 + 2 = 27$$

Como após a contabilização do votos do Filipe o festival C ficou em último lugar, e não se verificaram empates, o voto do Filipe colocou o festival C na 3.ª preferência, porque se fosse a 2.ª ou a 1.ª, mesmo com 5 pontos o festival A não iria obter um número de pontos superior).

Relativamente à 1.ª preferência, o Filipe escolheu o festival A (porque se fosse a 2.ª alternativa iria totalizar o mesmo número de pontos do festival C, e é sabido que não se registou qualquer empate).

Desta forma, o voto do Filipe indicou na 1.ª preferência o festival A, na 2.ª o festival B e na 3.ª o festival C.

E assim, a pontuação de cada filme, após a contabilização do voto do Filipe, é:

- Festival A: $25 + 5 = 30$
- Festival B: $29 + 3 = 32$
- Festival C: $27 + 1 = 28$

Exame – 2020, 1.ª Fase

14. De acordo com os estatutos do Clube, calculamos o número de votos que Ricardo obteve:

	Titular		**Efetivo**	
Anos como Sócio	Sócios	Votos	Sócios	Votos
[1,5[	4	$4 \times 2 = 8$	1	$1 \times 1 = 1$
[5,10[	6	$6 \times 3 = 18$	2	$2 \times 1 = 2$
[10,15[	30	$30 \times 4 = 120$	11	$11 \times 2 = 22$
[15,20[	12	$12 \times 5 = 60$	3	$3 \times 2 = 6$
Total	52	206	17	31
Total de sócios	$52 + 17 = 69$			
Total de votos	$206 + 31 = 237$			

Assim, a afirmação apresentada é verdadeira, porque o número de sócios que votaram no Ricardo (69) é menor do que o número de sócios que votaram na Teresa (71), mas o Ricardo venceu as eleições porque obteve mais votos (237) que a Teresa (210).

Exame – 2019, 2.ª Fase