M.A.C.S. (10.º ano)

Modelos financeiros

Exercícios de Provas Nacionais - Propostas de resolução

1. Calculando o valor total que o António pagaria se tivesse feito a reserva no Hotel Camélia, para 2 quartos duplos por 4 noites, temos:

$$2 \times 134{,}55 \times 4 = 1076{,}40 \text{ €}$$

   Calculando o valor total que o António pagaria sem desconto no Hotel Azálea, para 2 quartos duplos por 4 noites, temos:

   - Valor das duas primeiras noites: $2 \times 150{,}20 \times 2 = 600{,}80$ €
   - Valor das restantes duas noites: $2 \times 142{,}30 \times 2 = 569{,}20$ €
   - Valor total das quatro noites: $600{,}80 + 569{,}20 = 1170$ €

   Assim, a diferença de valores, ou seja, o valor do desconto é:

$$1170 - 1076{,}40 = 93{,}60 \text{ €}$$

   Logo, a percentagem p do desconto, calculada sobre o total do valor a pagar no Hotel Azálea, é:

$$\frac{1170}{93{,}60} = \frac{100}{p} \Leftrightarrow p = \frac{100 \times 93{,}60}{1170} \Leftrightarrow p = 8\%$$

Exame – 2024, Ép. especial

2. Identificando os valores de que depende o valor a pagar, V, considerando um consumo de 450 kWh durante 31 dias, temos:

   - IEC: $0{,}001 \times 450 = 0{,}45$ €, sem IVA, e $0{,}45 \times 1{,}23 = 0{,}5535$ €, com IVA;
   - PC: $0{,}1263 \times 31 = 3{,}9153$ €, sem IVA, e $3{,}9153 \times 1{,}23 \approx 4{,}8158$ €, com IVA;
   - AR: $0{,}0299 \times 31 = 0{,}9269$ €, sem IVA, e $0{,}9269 \times 1{,}06 \approx 0{,}9825$ €, com IVA;
   - CA: 3,02 €;
   - TE: 0,09 €;

   Assim, usando a fórmula de cálculo apresentada, podemos determinar o valor parcela relativa ao consumo C, para o valor a pagar de 79,87 €:

   $$79{,}87 = C+0{,}5535+4{,}8158+0{,}9825+3{,}02+0{,}09 \Leftrightarrow 79{,}87 = C+9{,}4618 \Leftrightarrow 79{,}87-9{,}4618 = C \Leftrightarrow 70{,}4082 = C$$

   Assim, temos que o valor do consumo relativo a 450 kWh, foi de:

   - 70,4082 €, com IVA;
   - $0{,}1476 \times 450 = 66{,}42$ €, sem IVA.

   Logo o valor do IVA relativo à parcela do consumo foi $70{,}4082-66{,}42 = 3{,}9882$ €, pelo que, estabelecendo a proporção adequada podemos calcular a taxa de IVA (T_C) aplicada ao consumo:

   $$\frac{T_C}{100} = \frac{3{,}9882}{66{,}42} \Leftrightarrow T_C = \frac{3{,}9882 \times 100}{66{,}42} \Leftrightarrow T_C \approx 6\%$$

   Exame – 2024, 2.ª Fase

3. De acordo com os dados, temos que:

   - como foram percorridos um total de 3125 km, com um gasto médio de 4,8 litros de por cada 100 km, temos que o total de litros de gasolina consumidos, G_T, é:

     $$\frac{G_T}{3125} = \frac{4{,}8}{100} \Leftrightarrow G_T = \frac{4{,}8 \times 3125}{100} \Leftrightarrow G_T = 150 \text{ litros}$$

   - como se admite que toda a gasolina necessária para a viagem foi adquirida com o preço de venda de cada litro de 1,77 €, o montante total pago pela gasolina, M_T foi:

     $$M_T = 1{,}77 \times G_T = 1{,}77 \times 150 = 265{,}5 \text{ euros}$$

   - pela análise da figura, podemos verificar que a percentagem do valor pago, que corresponde ao valor:
     - do IVA cobrado sobre a margem líquida de comercialização, IVA_{MC} é:

       $$IVA_{MC} = 0{,}023 \times M_T = 0{,}023 \times 265{,}5 = 6{,}1065 \text{ euros}$$

     - do IVA cobrado sobre o preço de referência, IVA_{PR} é:

       $$IVA_{PR} = 0{,}164 \times M_T = 0{,}164 \times 265{,}5 = 43{,}5420 \text{ euros}$$

     - do ISP, ISP é:

       $$ISP = 0{,}367 \times M_T = 0{,}367 \times 265{,}5 = 97{,}4385 \text{ euros}$$

   Assim, o valor, em euros, da parte do valor total gasto em gasolina pela família Silva, destinada a impostos, com arredondamento às centésimas, é:

   $$IVA_{MC} + IVA_{PR} + ISP = 6{,}1065 + 43{,}5420 + 97{,}4385 \approx 147{,}09 \text{ euros}$$

   Exame – 2024, 1.ª Fase

4. De acordo com os dados das duas primeiras tabelas, podemos determinar o valor total anual (sem desconto) a pagar pelos elementos do agregado familiar do Tiago:

Elemento do agregado familiar	**Idade (em anos)**	**Prémios totais anuais (em euros)**
Tiago	50 (Dos 46 aos 50)	531,08
Alice	44 (Dos 41 aos 45)	466,18
Beatriz	14 (Dos 11 aos 20)	241,48
Nuno	12 (Dos 11 aos 20)	241,48
	Soma:	1480,22

De acordo com a última tabela, o desconto a aplicar para um conjunto de 4 pessoas seguradas é 11%, pelo que o valor do desconto, é:

$$1480{,}22 \times 0{,}11 = 162{,}8242$$

E assim, temos que o valor anual, em euros, que o mediador de seguros terá apresentado para o seguro de saúde de todo o agregado familiar do Tiago, com arredondamento às centésimas, é:

$$1480{,}22 - 162{,}8242 \approx 1317{,}40$$

Exame – 2023, 2.ª Fase

5. Identificando os valores de que depende o cálculo do salário líquido, SL, temos:
   - $SB = 1500$
   - $SR = 5{,}2 \times 22 = 144{,}4$, correspondente a 22 dias de trabalho;
   - $SS = 1500 \times 0{,}11 = 165$ correspondente a 11%; do salário bruto;
   - $1500 \times 0{,}146 = 219$ correspondente á taxa de 14,6% indicada na tabela para um salário bruto compreendido entre 1437 e 1577 e a 2 dependentes.

   Assim, temos que o valor do salário líquido, de acordo com a fórmula de cálculo, é:

$$SL = SB + SR - SS - RF = 1500 + 144{,}4 - 165 - 219 = 1230{,}4 \text{ euros}$$

Exame – 2023, 1.ª Fase

6. De acordo com as condições do empréstimo, o atleta terá que pagar 0 valor financiado acrescido de 16%, ou seja, um valor total de

$$1200 + 1200 \times 0{,}16 = 1200 \times 1{,}16 = 1392 \text{ €}$$

Como o prazo de pagamento é de dois anos (24 meses) e as prestações são constantes, o valor de cada prestação mensal é:

$$\frac{1392}{24} = 58 \text{ €}$$

Exame – 2022, Ép. especial

7. Como os *bungalows* foram usados na sua capacidade máxima, o número de pessoas que ficou em tendas, ou seja, que não ficou em *bungalows*, foi de:

$$140 - 8 \times 4 - 10 \times 6 = 48$$

Assim, o valor faturado à empresa pelo aluguer dos espaços é a soma de três parcelas:

- 8 *bungalows* M: $8 \times 80 = 64$ €
- 10 *bungalows* G: $10 \times 100 = 1000$ €
- 12 tendas com 48 pessoas: $12 \times 6{,}5 + 48 \times 5{,}5 = 904$ €

Ou seja, o valor faturado foi de: $64 + 1000 + 904 = 1982$ €

Como o lucro foi de 25% do valor faturado temos que o lucro, em euros, obtido com o evento foi de:

$$1718 \times 0{,}25 = 495{,}5 \text{ €}$$

Exame – 2022, 2.ª Fase

8. Como o Manuel pediu emprestados 1530 euros e acordou que o pagamento seria feito em 18 parcelas iguais, cada uma dessas parcelas tem o valor de $\dfrac{1530}{18} = 85$ €

O montante total pago pelo Manuel (1644,75 €) pode ser entendido como a soma de três parcelas:

$$\text{Valor total pago} \;=\; \text{Empréstimo} \;+\; \text{Juros dos primeiros 12 meses} \;+\; \text{Juros dos últimos 6 meses}$$

Ou seja:

$$\text{Juros dos últimos 6 meses} = \text{Valor total pago} \;-\; \text{Empréstimo} \;-\; \text{Juros dos primeiros 12 meses}$$

E assim vem que:

$$\text{Juros dos últimos 6 meses} = 1644{,}75 - 1530 - 85 \times 0{,}07 \times 12 = 43{,}35 \text{ €}$$

Como este montante foi pago em seis prestações, o juro correspondente a cada uma das prestações foi $\dfrac{43{,}35}{6} = 7{,}225$ €

Como cada parcela tem o valor de 85 €, a taxa de juro (t), em percentagem, correspondente a cada uma das seis últimas prestações, é:

$$\frac{85}{7{,}225} = \frac{100}{t} \Leftrightarrow t = \frac{100 \times 7{,}225}{85} \Leftrightarrow t = 8{,}5\%$$

Exame – 2022, 1.ª Fase

9. Calculado o custo de aquisição para cada uma das alternativas, temos:

Alternativa 1	**Alternativa 2**
Valor do equipamento: 4500 € Preço dos portes: (73 kg $= 10 + 6 \times 10 + 3$) $5 + 6 \times 3 + 3 = 26$ €	Valor do equipamento: 4000 € Preço dos portes: $20 \times 1{,}03^{73} \approx 173{,}040$ €
Custo total: $4500 + 26 = 4525$ €	Custo total: $4000 + 173{,}040 = 4173{,}04$ €

Assim, de acordo com os cálculos anteriores, podemos verificar que a alternativa monetariamente mais vantajosa,ou seja com um custo total inferior, é a alternativa 2.

Exame – 2021, Ép. especial

10. Podemos verificar que em cada período de 24 meses, o valor a pagar será de $280 \times 24 = 6720$ euros e analisando cada um dos períodos, relativamente à percentagem e valor dos juros, temos:

Período	Montante a pagar	Percentagem de juros	Valor dos juros
Primeiros 24 meses	6720	60%	$6720 \times 0{,}6 = 4032$
Segundos 24 meses	6720	25%	$6720 \times 0{,}25 = 1680$

Assim, temos que:

- Valor total a pagar: $280 \times 60 = 16\,800$ euros.
  (Correspondente ao pagamento de 280 euros por mês durante 60 meses)
- Valor total dos juros: $16\,800 - 10\,500 = 6300$ euros.
  (Correspondente à diferença entre o montante total pago e o valor do empréstimo)
- Valor dos juros a pagar após 48 prestações: $6300 - (4032 + 1680) = 588$ euros.
  (Correspondente à diferença entre o valor dos juros e o valor dos juros correspondentes aos primeiros e segundos 24 meses)

Exame – 2021, 2.ª Fase

11. Identificando os valores de que depende o cálculo de P, temos:
    - $VF = 500$
    - $i = 0{,}03$
    - n entre 2 e 12

    Assim, temos que o valor de P, para cada valor de n, é dado por $P = \dfrac{500 \times 0{,}03 \times (1 + 0{,}03)^n}{(1 + 0{,}03)^n - 1}$

    Desta forma, determinando os valores de P, ou seja, da prestação mensal para cada valor de n, e verificando qual é o menor valor de n a que corresponde um valor de P inferior a 75, temos:

n	2	...	7	8
P	$\frac{500 \times 0{,}03 \times (1+0{,}03)^2}{(1+0{,}03)^2 - 1} \approx 261$	...	$\frac{500 \times 0{,}03 \times (1+0{,}03)^7}{(1+0{,}03)^8 - 1} \approx 80$	$\frac{500 \times 0{,}03 \times (1+0{,}03)^8}{(1+0{,}03)^8 - 1} \approx 71$

    Assim concluímos que $n = 8$, ou seja, o Tiago deve optar por fracionar o pagamento em 8 prestações mensais de 71 euros, e assim o valor total a pagar pelo telemóvel, é:

$$8 \times 71 = 568 \text{ euros}$$

Exame – 2021, 1.ª Fase

12. Como a distância entre a escola e a casa do Xavier é 6,5 quilómetros e ele pretende usar a bicicleta para ir e voltar para a escola, a distância diária a percorrer é de:

$$6{,}5 \times 2 = 13 \text{ km}$$

    Como a previsão é a de que faça o trajeto em 22 dias, a distância total é:

$$13 \times 22 = 286 \text{ km}$$

    Assim, o pagamento será calculado em três parcelas:
    - Primeiros 100 km: $5 \times 100 = 500$ cêntimos, ou seja, 5 euros
    - Entre os 100 e os 200 km (pagos a 80%, correspondente a um desconto de 20%): $5 \times 100 \times 0{,}8 = 400$ cêntimos, ou seja, 4 euros
    - 86 km acima dos 100 km (com dois descontos de 20%): $5 \times 86 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 2{,}752$ cêntimos, ou seja, 2,75 euros

    Assim, o valor total a pagar pelo Xavier é:

$$5 + 4 + 2{,}75 = 11{,}75 \text{ euros}$$

Exame – 2020, Ép. especial

13. Calculado as despesas totais previstas para cada um dos hotéis, temos:

Hotel 1	**Hotel 2**
Plataforma D: Custos totais de alojamento (2 noites e 5 pessoas): $215 \times 2 = 430$ € Plataforma B: Custos totais de alojamento (2 noites e 5 pessoas, com 10% de desconto, ou seja, 90% do valor): $0{,}9 \times 225 \times 2 = 405$ € Custos de transporte: 0 €	Plataforma A: Custos totais de alojamento (2 noites e 5 pessoas): $155 \times 2 = 310$ € Custos de transporte (3 dias em zonas de 1 a 3 para 5 pessoas): $47{,}25 \times 5 = 236{,}26$ €
Custo total: 405 €	Custo total: $310 + 236{,}26 = 546{,}26$ €

Assim, de acordo com os cálculos anteriores, podemos verificar que, de acordo com os planos dos 5 amigos, a opção mais económica é o Hotel 1 reservado na plataforma B.

Exame – 2020, 2.ª Fase

14. Como o valor final da poupança foi o dobro do depósito inicial, sabemos que o valor depositado inicialmente foi metade da poupança, ou seja, $\frac{240}{2} = 120$ €

Como foram feitos 16 depósitos de uma quantia fixa, e o conjunto desses depósitos totalizaram também 120 €, pelo que, cada um deles tinha o valor de $\frac{120}{16} = 7{,}5$ €

Assim, temos que a percentagem (p) do depósito inicial (120) corresponde a quantia fixa depositada em cada mês (7,5) é:

$$\frac{p}{7{,}5} = \frac{100}{120} \Leftrightarrow p = \frac{100 \times 7{,}5}{120} \Leftrightarrow p = 6{,}25$$

Ou seja, em cada mês o Filipe depositou um montante correspondente a 6,25% do depósito inicial.

Exame – 2020, 1.ª Fase

15. Calculando o valor do arrendamento anual, de acordo com cada uma das propostas, em função do número de pagamentos, temos:

N.º de pagamentos	**Proposta do CCF**	**Proposta do lojista**	**Proposta mais vantajosa**
1	$R(1) = 8000 + 100\left(1 + \frac{2}{1}\right)^1 = 8300$	$8350 + 1 \times 30 = 8380$	CCF
2	$R(2) = 8000 + 100\left(1 + \frac{2}{2}\right)^2 = 8400$	$8350 + 2 \times 30 = 8410$	CCF
3	$R(3) = 8000 + 100\left(1 + \frac{2}{3}\right)^3 \approx 8462{,}96$	$8350 + 3 \times 30 = 8440$	Lojista
4	$R(4) = 8000 + 100\left(1 + \frac{2}{4}\right)^4 = 8502{,}25$	$8350 + 4 \times 30 = 8470$	Lojista
5	$R(5) = 8000 + 100\left(1 + \frac{2}{5}\right)^5 \approx 8537{,}82$	$8350 + 5 \times 30 = 8500$	Lojista
6	$R(6) = 8000 + 100\left(1 + \frac{2}{6}\right)^6 \approx 8561{,}87$	$8350 + 6 \times 30 = 8530$	Lojista
7	$R(7) = 8000 + 100\left(1 + \frac{2}{7}\right)^7 \approx 8580{,}78$	$8350 + 7 \times 30 = 8560$	Lojista
8	$R(8) = 8000 + 100\left(1 + \frac{2}{8}\right)^8 \approx 8596{,}05$	$8350 + 8 \times 30 = 8590$	Lojista
9	$R(9) = 8000 + 100\left(1 + \frac{2}{9}\right)^9 \approx 8608{,}63$	$8350 + 9 \times 30 = 8620$	CCF

Assim, como a tendência de crescimento mais lento da proposta da administração do CCF, se o número de fracionamentos do pagamento do arrendamento anual for superior a 2 ou inferior a 9, a contraproposta do lojista é mais vantajosa do que a proposta apresentada pela administração do CCF.

Exame – 2019, Ép. especial

16.

16.1. Sabendo que todas as carteiras tinham um vale de oferta, podemos analisar as diferentes hipóteses:

N.º de carteiras com vales de 1 carteira	10	9	8	7	...
N.º de carteiras com vales de 5 carteiras	0	1	2	3	...
Total de carteiras grátis	$10 \times 1 + 0 \times 5 =$ $= 10$	$9 \times 1 + 1 \times 5 =$ $= 14$	$8 \times 1 + 2 \times 5 =$ $= 18$	$7 \times 1 + 3 \times 5 =$ $= 22$	...

Assim, podemos verificar que, de entre os valores apresentados, o único que pode pode representar o número de carteiras grátis que o Daniel obteve graças a estes vales de oferta é 18.

Resposta: **Opção D**

16.2. Como o Daniel reuniu 750 cromos, e 46% eram cromos repetidos, todos não dourados, então o número de cromos repetidos é:

$$750 \times 0{,}46 = 345$$

E o número de cromos não repetidos, obtidos pela compra de carteiras, é:

$$485 - 345$$

Como as trocas foram feitas em grupos de 5, temos que o número de cromos dourados que o Daniel obteve nas trocas é:

$$\frac{345}{5} = 69$$

Assim, o número de cromos em falta, após as trocas, é:

$$485 - 405 - 69 = 11$$

Desta forma, o gasto total é dado pela soma dos valores da compra das 131 carteiras, da encomenda dos 11 cromos em falta e dos portes de envio, ou seja:

$$131 \times 0{,}90 + 11 \times 0{,}25 + 2 = 122{,}65 \text{ euros}$$

Exame – 2019, 2.ª Fase

17.

17.1. Calculando o custo total de duas encomendas separadas, uma dos dois artigos mais leves e outra do artigo mais pesado, temos:

- Massa dos dois artigos mais leves: $1{,}9 + 1{,}5 = 3{,}4$ kg
- Custo associado a duas encomendas de 3,4 kg e 3,8 kg: $10{,}80 + 10{,}80 = 21{,}16$€

Calculando o custo total de duas encomendas separadas, uma dos dois artigos mais pesados e outra do artigo mais leve, vem:

- Massa dos dois artigos mais pesados: $3{,}8 + 1{,}9 = 5{,}7$ kg
- Custo associado a duas encomendas de 1,5 kg e 5,7 kg: $5{,}70 + 14{,}60 = 20{,}30$€

Resposta: **Opção C**

17.2. Calculado os custos totais em cada uma das lojas, para uma entrega até 48 horas, temos:

Loja ≪Paga Menos≫	**Loja ≪Sempre a Poupar≫**
Equipamento + IVA: $258{,}22 \times 1{,}23 \approx 317{,}61$ € Portes de envio (3,4 kg): 10,80 € Tarifa expresso (48 h): 25 €	Equipamento + IVA: 347,88 € Portes de envio : 12 € Desconto (40 pontos - 4×10 pontos): $4 \times 2 = 8$ €
Custo total: $317{,}61 + 10{,}80 + 25 = 353{,}41$ €	Custo total: $347{,}88 + 12 - 8 = 351{,}88$ €

Assim, de acordo com os cálculos anteriores, podemos verificar que a proposta da loja ≪Sempre a Poupar≫ é a mais vantajosa para o Nuno.

Exame – 2019, 1.ª Fase

18. Como a família Silva é composta por cinco pessoas e os automóveis do tipo 1, têm capacidade para apenas quatro passageiros, será necessário alugar dois automóveis deste tipo (o que não é um problema porque duas pessoas possuem carta de condução).
Assim, calculando os custos associados a cada uma das propostas, temos:

Automóvel	**Consumo total (litros)**	**Consumo - custo (euros)**	**Aluguer por dia (euros)**	**Custo total (euros)**
Tipo 1 (1 unidade)	$4{,}7 \times \frac{1300}{100} =$ $= 4{,}7 \times 13 =$ $= 61{,}1$	$61{,}1 \times 1{,}3 = 79{,}43$	$40 \times 6 = 240$	$79{,}43 + 240 =$ $= 319{,}43$
Tipo 1 (2 unidades)	—	—	—	$319{,}43 \times 2 =$ $= 638{,}46$
Tipo 2 (1 unidade)	$6{,}8 \times \frac{1300}{100} =$ $= 6{,}8 \times 13 =$ $= 88{,}4$	$88{,}4 \times 1{,}3 = 114{,}92$	$85 \times 6 = 510$	$114{,}92 + 510 =$ $= 624{,}92$

Assim, como se sabe que a família Silva optou pela proposta mais económica, podemos concluir que alugou um automóvel do tipo 2.

Exame – 2018, Ép. especial

19. Calculado as despesas totais previstas para cada uma das propostas, temos:

Proposta A	**Proposta B**
Custos totais de aluguer (10 dias): $10 \times 420 = 4200$ € Custo acrescido (valor fixo): 4800 € Despesas com água e eletricidade: 0 €	Valor do aluguer (10 dias): $V = 3000 \times 1{,}14^{10} - 3000 \approx 8122$ € Despesas com água e eletricidade (10 dias): $10 \times 71 = 710$ €
Custo total: $4200 + 4800 + 0 = 9000$ €	Custo total: $8122 + 710 = 8832$ €

Assim, de acordo com os cálculos anteriores, podemos verificar que a opção do diretor da companhia, pela proposta B, foi a decisão mais económica.

Exame – 2018, 2.ª Fase