Capítulo 5 – Figuras geométricas

F32

Pág. 77

1.1. Na figura observam-se dois pares de ângulos verticalmente opostos.

Logo, $x + x + 100° + 100° = 360° \Leftrightarrow 2x = 360° - 200° \Leftrightarrow 2x = 160° \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{160°}{2} \Leftrightarrow x = 80°$

Portanto, $x = 80°$.

1.2. $x = 90° + 20° = 180° \Leftrightarrow x = 180° - 90° - 20° \Leftrightarrow x = 70°$

1.3. $x = 60°$, pois *r* // *s*.

1.4. $x = 180° - 135° \Leftrightarrow x = 45°$

2.1. *c* e *d*

2.2. *c* e *e*

Pág. 78

3.1.

a) *c* e *b*

b) *b* e *e*

c) *a* e *d*.

3.2. As retas *r* e *s* deveriam ser paralelas.

4.1. $x = 180° - 42°$, ou seja, $x = 138°$, pois *r* // *s*.

$y = 360° - x - 120°$, ou seja, $y = 102°$.

4.2. $x = 180° - 75° = 105°$; $z = x$ e $y = 75°$; $u = x$ e $w = 75°$

Em síntese: $x = u = z = 105°$; $y = w = 75°$

4.3. $x = 37° + 30°$, ou seja, $x = 67°$.

4.4. $u = 180° - (80° + 54°) \Leftrightarrow u = 180° - 80° - 54° \Leftrightarrow u = 46°$

$y = 80°$

$x = 180° - 80° = 100°$

$z = 54°$

$w = 180° - 54° = 126°$

Em síntese, $x = 100°$, $y = 80°$, $z = 54°$, $w = 126°$ e $u = 46°$.

4.5. $x = 30°$; $y = 90° + 30° = 120°$; $z = 90° + 60° = 150°$

Portanto, $x = 30°$, $y = 120°$ e $z = 150°$.

4.6. $a = 180° - 45° = 135°$; $b = c = d = 45°$

Assim, $a = 135°$ e $b = c = d = 45°$.

Pág. 79

5.1. $x = 180° - (90° - 58°) = = 180° - 32° = 148°$

ou

$x = 90° + 58° = = 148°$

Logo, $x = 148°$

5.2. $x = 60° + (180° - 125°) \Leftrightarrow x = 60° + 55° \Leftrightarrow x = 115°$

5.3 $x = 90° - 74° \Leftrightarrow x = 16°$

$y = 90° - 58° \Leftrightarrow y = 32°$

5.4. $x = 85° - 20° \Leftrightarrow x = 65°$

$y = 180° - (63° + 65°) \Leftrightarrow y = 180° - 128° \Leftrightarrow y = 52°$

5.5 $z = 90° + 60° = 150°$; $x = 30°$

$y = 90° + 30° = 120°$

Em síntese, $x = 30°$, $y = 120°$ e $z = 150°$.

Pág. 80

6.1. $A\hat{B}C = 180° - 85°$, ou seja, $A\hat{B}C = 95°$

$B\hat{C}A = 180° - 165°$, ou seja, $B\hat{C}A = 15°$

$C\hat{A}B = 180°(95° + 15°)$, ou seja, $C\hat{A}B = 70°$

6.2. Como num triângulo ao menor ângulo opõe-se o menor lado, então o lado é $[AB]$.

7.1. $C\hat{B}A = A\hat{C}B = 50°$

Logo, os lados $[AB]$ e $[AC]$ são geometricamente iguais.

7.2. Como $P\hat{R}Q = 50°$, o triângulo é escaleno.

Portanto, não tem lados geometricamente iguais.

7.3. $Z\hat{U}L = 40° = U\hat{L}Z$

Portanto, os lados $[LZ]$ e $[UZ]$ são ângulos geometricamente iguais.

8.1. $y = 33°$; $x = 33° + 33° = 66°$

$z = 180° - (66° + 66°) = 180° - 132° = 48°$

Portanto, $x = 66°$, $y = 33°$ e $z = 48°$.

8.2. $x = 180° - 2 \times 62° \Leftrightarrow x = 180° - 124° \Leftrightarrow x = 56°$

$y = (180° - 124°) : 2 \Leftrightarrow y = 56° : 2 \Leftrightarrow y = 28°$

8.3. $y = 60°$ (o triângulo é equilátero)

$x = (180° - 50°) : 2 \Leftrightarrow x = 130° : 2 \Leftrightarrow x = 65°$

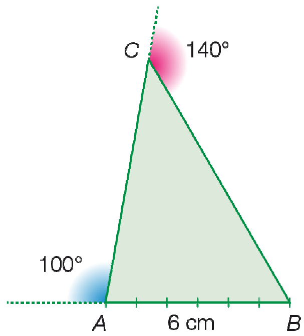
$z = 180° - (60° + 65°) \Leftrightarrow z = 180° - 125° \Leftrightarrow z = 55°$

8.4. $x = 180° - 2 \times 70° \Leftrightarrow x = 180° - 140° \Leftrightarrow x = 40°$

$y = 70°$ (ângulos correspondentes de lados diretamente paralelos)

$z = 70° + x \Leftrightarrow z = 70° + 40° \Leftrightarrow z = 110°$

9. Utilizando material de desenho, obtém-se:



F33

Pág. 81

1.1. São linhas poligonais as figuras: (B), (C), (E), (G) e (J).

São linhas poligonais fechadas as figuras: (B), (G) e (J).

São linhas poligonais abertas as figuras: (C) e (E).

As figuras (A), (D), (F), (H) e (I) não são linhas poligonais.

2. Figura (B). Esta é uma união dos lados de uma linha poligonal fechada simples com a respetiva parte interna.

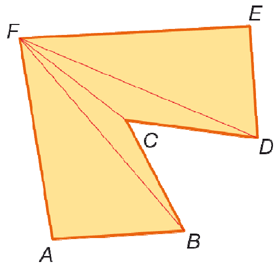
Pág. 82

3.1. O polígono tem seis lados: $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$ e $[FA]$.

3.2. Por exemplo, A e B.

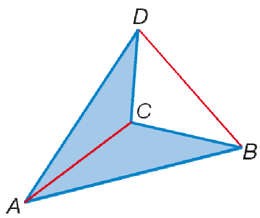
3.3. Por exemplo, $[AB]$ e $[BC]$.

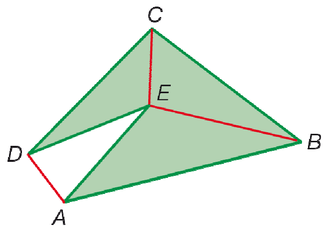
3.4.



3.5. Resposta: (C)

4. A afirmação é falsa. Por exemplo:





As diagonais $[BD]$ e $[AC]$ não se intersetam, assim como as diagonais $[AD]$ e $[BE]$.

5.1. O polígono é côncavo.

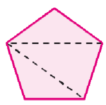
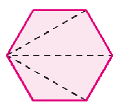
5.2. O polígono tem nove diagonais.

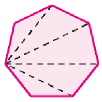
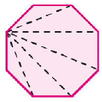
5.3. A afirmação é falsa. O ângulo a não é interno, pois embora tenha lados contendo dois lados consecutivos do polígono e intersetar o interior do mesmo, não interseta esse interior em pontos tão próximos do vértice quanto se queira.

F34

Pág. 83

1.1.

Polígono	N.° de lados	N.° de diagonais traçadas a partir de um dos vértices	Número de triângulos obtidos	Soma das amplitudes dos ângulos internos	Soma das amplitudes dos ângulos externos
Pentágono	5		3	$3\times180°=540°$	360°
Hexágono	6		4	$4\times180°=720°$	360°

Heptágono	7		5	$5\times180° = 900°$	360°
Octógono	8		6	$6\times180° = 1080°$	360°

2. $(n-2)\times180$.

3. Como para cada vértice existem três vértices que não são extremidades de diagonais com origem no vértice dado (ele próprio e os dois consecutivos) e cada diagonal é partilhada por dois vértices distintos, então a expressão $\dfrac{n\times(n-3)}{2}$ determina o número total de diagonais.

4.1. A soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono é $(4-2)\times180$, ou seja, 360°.
Assim, $x = 360° - (125° + 74° + 110°) = 51°$

4.2. $x + x + 2\times120° = (4-2)\times180° \Leftrightarrow 2x + 240° = 360° \Leftrightarrow 2x = 120° \Leftrightarrow x = 60°$

4.3. $75° + 60° + (180° - 75°) = 75° + 60° + 105° = 240°$.

Logo, $x = (4-2)\times180° - 240° \Leftrightarrow x = 360° - 240° \Leftrightarrow x = 120°$.

5.1. $\underbrace{(x-2)\times180°}_{\text{soma das amplitudes dos ângulos internos}} + \underbrace{360°}_{\text{soma das amplitudes dos ângulos externos}} = 1080°$

Resolvendo a equação em $\mathbb{N}$, tem-se:

$$180°n - 360° + 360° = 1080° \Leftrightarrow 180°n = 1080° \Leftrightarrow n = \frac{1080°}{180°} \Leftrightarrow n = 6$$

O polígono tem seis lados.

5.2. Como o polígono é regular e a soma das amplitudes dos ângulos externos é 360°, então:

$$\frac{360°}{n} = 24° \Leftrightarrow \frac{360°}{24°} = n \Leftrightarrow n = 15$$

O polígono tem 15 lados.

6.1. **a)** Sabe-se que a soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono $(18-2)\times180° = 2880°$.

Logo, a amplitude de um ângulo interno é igual a $\dfrac{2880°}{18} = 160°$

b) Como um ângulo externo é suplementar de um ângulo interno com o mesmo vértice, então a amplitude de um ângulo externo do polígono é igual a $180° - 160° = 20°$.

6.2. Dado que o polígono é regular, então a amplitude de cada ângulo externo pode ser obtida pelo quociente $\dfrac{360°}{n}$, sendo n o número de lados do polígono.

Sabe-se que um ângulo interno e um ângulo externo adjacente são ângulos suplementares, pelo que a medida da amplitude, em graus, de cada ângulo interno pode ser obtida pela expressão: $180 - \dfrac{360}{n}$ ou $\dfrac{180n - 360}{n}$

7. Vejamos o caso do polígono do Afonso:

Se a amplitude do ângulo interno é 150°, então a amplitude de um ângulo externo é $180° - 150°$, ou seja, 30°.

Vejamos se existe um n natural, tal que $\dfrac{360°}{n} = 30°$. Ora, $n = \dfrac{360°}{30°} = 12$.

Vejamos o caso do polígono do António:

Se a amplitude do ângulo interno é 130°, então a amplitude de cada ângulo externo é $180° - 130° = 50°$.

Vejamos se existe um n natural, tal que $\dfrac{360°}{n} = 50°$. Ora, $n = \dfrac{360°}{50°} = \dfrac{36°}{5}$.

Como 5 não divide 36, então n não é um número natural.

Conclui-se, portanto, que o Afonso pode estar a desenhar um polígono regular, mas o António não.

8. Determinemos o valor de n, tal que:

$$180° - \frac{360°}{n} = 4 \times \frac{360°}{n} \Leftrightarrow \frac{180°n - 360°}{n} = \frac{4 \times 360°}{n} \Leftrightarrow 180°n - 360° = 1440° \text{, pois } n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow 180°n = 1440° + 360° \Leftrightarrow 180°n = 1800° \Leftrightarrow n = \frac{1800°}{180°} = 10$$

O polígono tem dez lados. É um decágono.

F35

Pág. 85

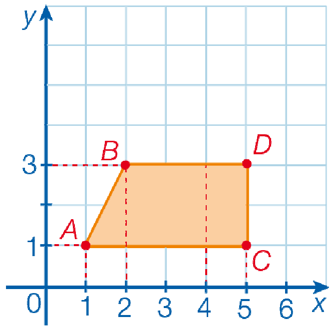
1.1. **a)** Bases: $[AD]$ e $[BC]$. Altura: $[AB]$, por exemplo.

b) Bases: $[AB]$ e $[DC]$. Altura: $[DF]$.

c) Bases: $[AB]$ e $[DC]$. Altura: $[ED]$, por exemplo.

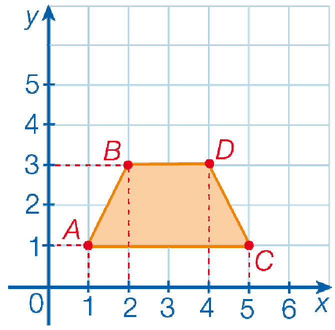
2.1. $A \curvearrowright (1, 1)$ e $C \curvearrowright (5, 1)$

2.2. **a)** Por exemplo:



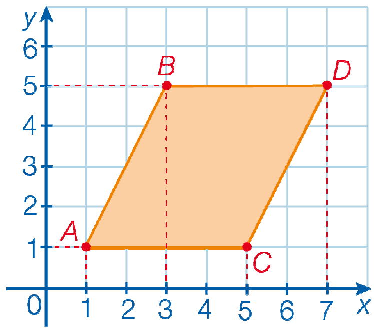
$B \curvearrowright (2,\ 3)$ e $D \curvearrowright (5,\ 3)$

b) Por exemplo:



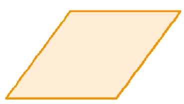
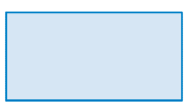
$B \curvearrowright (2,\ 3)$ e $D \curvearrowright (4,\ 3)$

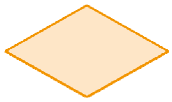
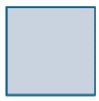
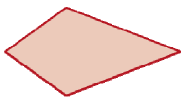
c) Por exemplo:



$B \curvearrowright (3,\ 5)$ e $D \curvearrowright (7,\ 5)$

3.

Quadrilátero	**Representação**	**Propriedades relativas aos lados**	**Propriedades relativas aos ângulos**	**Propriedades relativas às diagonais**	**Simetrias**
Paralelogramo obliquângulo		Lados opostos paralelos e geometricamente iguais	Ângulos opostos são geometricamente iguais. Ângulos adjacentes a um lado não suplementares	As diagonais bissetam-se	Tem duas simetrias de rotação de centro na interseção das diagonais e amplitudes 0° e 180°. Não tem simetria de reflexão.
Retângulo		Lados opostos paralelos e geometricamente iguais	Quatro ângulos retos	As diagonais bissetam-se e são geometricamente iguais	Tem duas simetrias de rotação de centro no ponto de interseção das diagonais e amplitudes 0¨e 180°. Tem duas simetrias de reflexão.

Losango		Lados opostos paralelos e geometricamente iguais	Ângulos opostos geometricamente iguais. Ângulos adjacentes a um lado são suplementares	As diagonais bissetam-se e são perpendiculares	Tem duas simetrias de rotação de centro no ponto de interseção das diagonais de amplitude 0° e 180°. Tem duas simetrias de reflexão
Quadrado		Lados opostos todos paralelos e geometricamente iguais	Quatro ângulos retos	As diagonais bissetam-se, são geometricamente iguais e não perpendiculares	Tem quatro simetrias de rotação de centro no ponto de interseção das diagonais de amplitude 0°, 90°, 180° e 270°. Tem quatro simetrias de reflexão
Trapézio isósceles		Um par de lados opostos paralelos. Um para de lados opostos não paralelos geometricamente iguais	Ângulos adjacentes e lados paralelos geometricamente iguais	Diagonais geometricamente iguais	Não tem simetrias de rotação. Tem uma simetria de reflexão
Papagaio		Dois pares de lados consecutivos geometricamente iguais	Um par de ângulos opostos geometricamente iguais	Perpendiculares e apenas uma é bissetada	Não tem simetrias de rotação. Tem uma simetria de reflexão

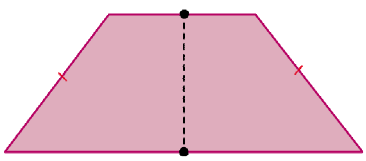
4.1. … retângulo, losango e quadrado

4.2. … retângulo e quadrado.

4.3. … losango e quadrado.

4.4. … losango, quadrado e papagaio.

5.



O trapézio isósceles ficou dividido em dois trapézios retângulos geometricamente iguais.

6. A afirmação é falsa. Um papagaio é um quadrilátero com dois pares de lados consecutivos geometricamente iguais, enquanto o losango tem os quatro lados geometricamente iguais. Assim, o losango é que é um caso particular de um papagaio.

F36

Pág. 87

1.1. Todos, exceto os polígonos *I* e *K*

1.2. *C* e *D*

1.3. *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* e *L*

1.4. *C*, *D*, *F*, *H* e *K*

1.5. *H*, *J* e *K*

1.6. *G*

1.7. *A*, *C*, *D*, *E* e *F*

1.8. *B*

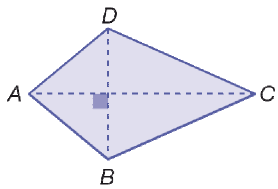
1.9. *C*, *D* e *F*

1.10. *L*

1.11. *A*, *C* e *D*

1.12. *I* e *J*

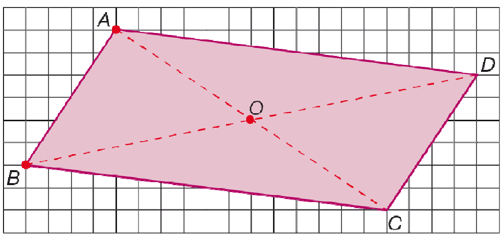
2. Por exemplo, o papagaio $[ABCD]$.



Pág. 88

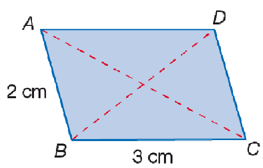
3. Pelas características do paralelogramo, sabemos que as diagonais se bissetam e, portanto, $\overline{AO} = \overline{OC}$ e $\overline{BO} = \overline{OD}$.

Assim, obtém-se:



4. Utilizando material de desenho e medida, tracemos os lados consecutivos $[AB]$ e $[BC]$ com comprimento igual a 2 cm e 3 cm, respetivamente, cujo ângulo formado é obtuso.

Em seguida, tracemos dois segmentos de reta $[CD]$ e $[AD]$ paralelos e geometricamente iguais aos lados $[AB]$ e $[CD]$, respetivamente.



5.1. O primo do Afonso poderá responder losango ou quadrado.

5.2. O Afonso deveria referir:

• Um paralelogramo cujas diagonais são perpendiculares e geometricamente iguais.

ou

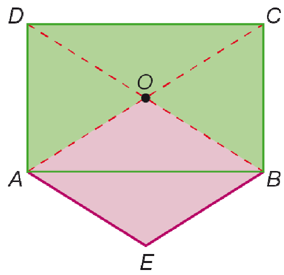
• Um paralelogramo em que os quatro ângulos são retos e os quatro lados geometricamente iguais.

6.1. Efetuando a reflexão do eixo *AB*, obtém-se um triângulo geometricamente igual ao triângulo $[ABO]$.

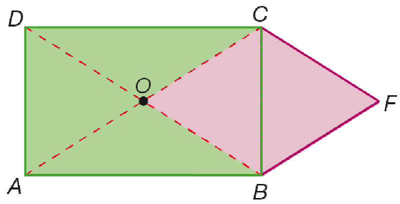
Cada segmento, com extremos distintos de pontos do eixo de reflexão, é transformado num segmento paralelo.

As diagonais do retângulo bissetam e são geometricamente iguais, pelo que $\overline{AO} = \overline{OB}$.

Portanto, os lados opostos do quadrilátero $[AEBO]$ são paralelos e os quatro lados são geometricamente iguais.



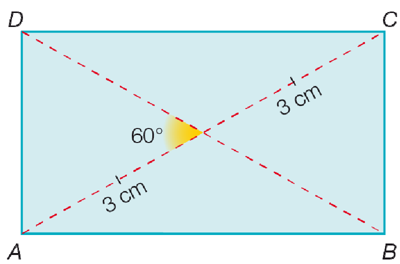
6.2. De forma análoga à questão anterior se constrói o losango $[COBF]$.



7. As diagonais de um retângulo bissetam-se e são geometricamente iguais.

Os lados opostos são paralelos e geometricamente iguais.

Traçando as diagonais com 6 cm de comprimento e formando entre si um ângulo com amplitude 60°, obtém-se:



F37

Pág. 89

1.1. O paralelogramo é equivalente a um quadrado, ou seja, têm a mesma área.

Determinemos a área do paralelogramo: $A=(8\times18)\text{ cm}^2=144\text{ cm}^2$

Como a área do paralelogramo é 144 cm^2, então pretende-se determinar o perímetro de um quadrado de área 144 cm^2.

Determinemos o comprimento do lado do quadrado: $l=\sqrt{144}\text{ cm}=12\text{ cm}$.

Logo, o perímetro do quadrado é igual a 4×12 cm, ou seja, 48 cm.

1.2. **a)** O quadrilátero $[EFCD]$ é um retângulo, pois DE e CF são geometricamente iguais, dado que são perpendiculares às bases do paralelogramo.

b) Os triângulos $[AED]$ e $[BCF]$ são geometricamente iguais, (critério LAL) pois:

- $\overline{AD}=\overline{BC}$ (é um paralelogramo)
- $\overline{DE}=\overline{CF}$
- $A\hat{D}E=B\hat{C}F$ (ângulos de lados paralelos agudos)

c) $A_{[ABCD]}=\left(\frac{2}{3}\times\frac{8}{3}\right)\text{ m}^2=\frac{16}{9}\text{m}^2$

A área do paralelogramo $[ABCD]$ é igual a $\frac{16}{9}$ m^2.

2. A área do losango é dada pela expressão: $A=\frac{D\times d}{2}$, de onde D é o comprimento da diagonal maior e d é o comprimento da diagonal menor.

$$\frac{D\times d}{2}=120\Leftrightarrow\frac{24\times d}{2}=120\Leftrightarrow24\times d=2\times120\Leftrightarrow d=\frac{240}{24}\Leftrightarrow d=10$$

O comprimento da diagonal do losango é igual a 10 cm.

Pág. 90

3.1. A área da figura é dada por:

$$A=\left[(4\times2{,}5)+\frac{2{,}5\times2{,}3}{2}\right]\text{cm}^2=(10+2{,}875)\text{cm}^2=12{,}875\text{ cm}^2$$

A área da figura é igual a 12,875 cm^2.

3.2. A área do losango é dada por:

$$A=\left(\frac{4\times2}{2}\right)\text{cm}^2=4\text{ cm}^2$$

A área do losango é igual a 4 cm^2.

3.3. A área do paralelogramo é dada por:

$A = (3 \times 2,8)\,\text{cm}^2 = 8,4\ \text{cm}^2$

A área do paralelogramo é igual a 8,4 cm^2.

3.4. A área, em cm^2, da figura pode ser obtida da seguinte forma:

$$A = 3^2 - \frac{3+2,5}{2} \times 2 = 9 - (3+2,5) = 9 - 5,5 = 3,5$$

A área da figura é igual a 3,5 cm^2.

4. A área, em cm^2, do quadrado maior é dada por:

$$A = \left(2+\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{6}{3}+\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9}$$

A área, em cm^2, do quadrado colorido a verde á dada por:

$A = 1^2\ \text{cm}^2 = 1\ \text{cm}^2$.

A área, em cm^2, dos quatro trapézios é dada por:

$$A = \frac{64}{9} - 1 = \frac{64}{9} - \frac{9}{9} = \frac{55}{9}.$$

Assim, cada trapézio tem de área $\frac{55}{9} : 4$ cm^2, ou seja, $\frac{55}{36}$ cm^2.

Determinemos a altura, *a*, do trapézio:

$$\frac{\left(2+\frac{2}{3}\right)+1}{2} \times a = \frac{55}{36} \Leftrightarrow \frac{\frac{8}{3}+1}{2} \times a = \frac{55}{36} \Leftrightarrow \frac{11}{6}a = \frac{55}{36} \Leftrightarrow a = \frac{55}{36} : \frac{11}{6} \Leftrightarrow a = \frac{55}{36} \times \frac{6}{11} \Leftrightarrow a = \frac{5}{6}$$

A altura do trapézio é igual a $\frac{5}{6}$ cm.

Vejamos outro processo para resolver a questão, bem mais simples:

Podemos observar a seguinte igualdade:

$$2a + 1 = 2 + \frac{2}{3}$$

Determinemos o valor de *a*:

$$2a + 1 = 2 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2a = 2 + \frac{2}{3} - 1 \Leftrightarrow 2a = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{2a}{2} = \frac{5}{3} : 2 \Leftrightarrow a = \frac{5}{6}$$

A medida da altura do trapézio é igual a $\frac{5}{6}$ cm.

5. Os triângulos $[ABE]$ e $[AED]$ são geometricamente iguais, pois $[AC]$ bisseta a diagonal $[DB]$ e é-lhe perpendicular.

Assim, a área do triângulo $[ABD]$ é 10 cm^2.

Determinemos $\overline{DB}$, em cm:

$$\frac{\overline{DB}\times\overline{AE}}{2}=10 \Leftrightarrow \overline{DB}\times 3=20 \Leftrightarrow \overline{DB}=\frac{20}{3}$$

Portanto, a área do papagaio $[ABCD]$ é dada por:

$$A_{[ABCD]}=\frac{5\times\frac{20}{3}}{2}=\frac{\frac{100}{3}}{2}=\frac{100}{6}=\frac{50}{3}$$

A área do papagaio $[ABCD]$ é $\frac{50}{3}$ cm^2.

6. Ora, $6\frac{2}{5}=6+\frac{2}{5}=\frac{32}{5}$

Como a área do trapézio é dada por $\frac{B+b}{2}\times a$, onde B e b são os comprimentos das bases maior e menor, respetivamente e a é a altura.

Assim, $\frac{B+b}{2}\times a=11 \Leftrightarrow \frac{\frac{32}{5}}{2}\times a=11 \Leftrightarrow \frac{32}{10}a=11 \Leftrightarrow a=\frac{110}{32}=\frac{55}{16}$

A altura do trapézio é $\frac{55}{16}$ cm.

F38

Pág. 91

1.1. **a)** A figura *Q*. **b)** As figuras *M* ou *L*.

c) As figuras *E* e *G*; as figuras *N* e *P* ou as figuras *J* e *L*.

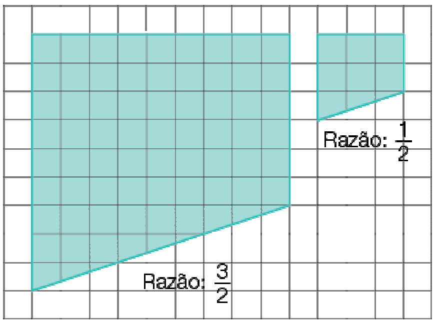
d) A figura *M*. **e)** A figura *A*.

f) Por exemplo, as figuras *I* e *H* ou *F* e *G*.

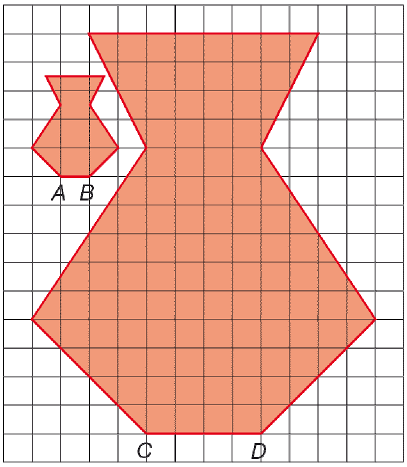
Pág. 92

---

2. Ampliação; r = 1,5; Redução: r = 0,5



3.



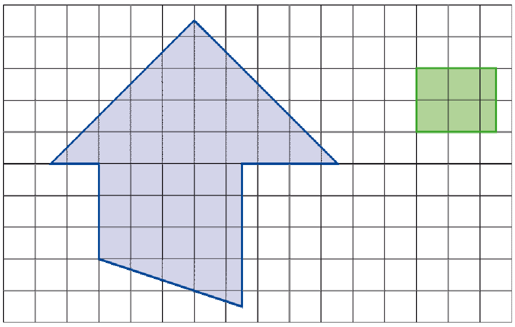
4.1. Resposta: (C)

4.2. Resposta: (C)

F39

Pág. 93

1.1.



1.2. **a)** Ora, $\frac{5,25}{3,5} = 1,5$

Logo, a razão de semelhança é 1,5.

b) Estabelecemos as seguintes igualdades:

$$\frac{5,25}{3,5} = \frac{3,9}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3,5 \times 3,9}{5,25} \Leftrightarrow x = 2,6$$

Por outro lado,

$$\frac{5,25}{3,5} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = \frac{5,25 \times 2}{3,5} \Leftrightarrow y = 3$$

Portanto, $x = 2,6$ cm e $y = 3$ cm.

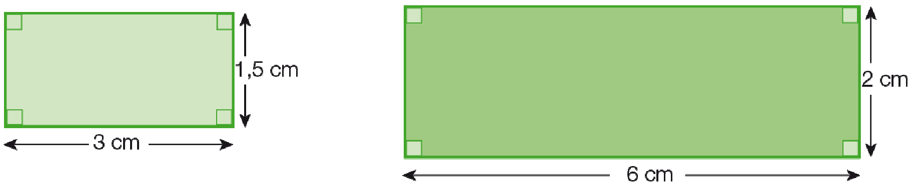
2.1. A afirmação é verdadeira.

Quaisquer dois quadrados são semelhantes, pois os ângulos internos de cada um são todos retos, logo geometricamente iguais, e é sempre igual a $\frac{y}{x}$ qualquer quociente entre os comprimentos de dois lados.

2.2. A afirmação é falsa.

Os comprimentos dos lados correspondentes têm de ser diretamente proporcionais.

Por exemplo: os retângulos têm os ângulos geometricamente iguais, mas nem sempre são semelhantes.

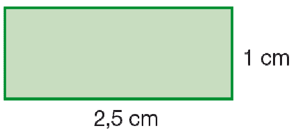


2.3. Falsa. Dois polígonos regulares com o mesmo número de lados são semelhantes.

3.1. Ora, o perímetro do retângulo $[ABCD]$ é igual a 14 cm.

Se se pretende um retângulo $[A'B'C'D']$ semelhante ao retângulo dado com perímetro igual a 7 cm, conclui-se que a razão de semelhança. r, é $r = \frac{7\text{ cm}}{14\text{ cm}} = 0{,}5\text{ cm}$.

Assim, pretende-se desenhar um retângulo com comprimento 2,5 cm e largura 1 cm.



A razão de semelhança é 0,5.

3.2. Analogamente, conclui-se que a razão de semelhança é $r = \frac{21\text{ cm}}{14\text{ cm}} = 1{,}5\text{ cm}$.

Assim, pretende-se desenhar um retângulo com comprimento 7,5 cm e largura 3 cm.

A razão de semelhança é 1,5.

3.3. Sabe-se que a razão entre os perímetros de dois polígonos A e B é igual à razão de semelhança que transforma o polígono B no polígono A.

Por outro lado, a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Ora, $r = \frac{28 \text{ cm}}{14 \text{ cm}} = 2 \text{ cm}$. Como a área do retângulo $[ABCD]$ é igual a $(2 \times 5) \text{cm}^2$, ou seja, 10 cm^2, então a área do retângulo pedido é igual a $(2^2 \times 10) \text{cm}^2$, ou seja, 40 cm^2.

4. Vejamos se existe uma correspondência que preserve as condições de proporcionalidade entre os lados:

$$\frac{6}{4} = \frac{3,45}{2,3} = \frac{4,5}{3} = 1,5$$

Portanto, os quadriláteros são semelhantes, pois têm o mesmo número de lados e existe uma correspondência entre eles tal que os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente proporcionais e os ângulos formados por esses lados são geometricamente iguais.

A razão de semelhança é 1,5.

F40

Pág. 95

1.1. **a) a$_1$)** $\overline{OF} = 3\overline{OB}$; $\overline{OE} = 3\overline{OA}$; $\overline{EF} = 3\overline{AB}$

Assim, $\frac{\overline{OF}}{\overline{OB}} = 3$; $\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} = 3$ e $\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = 3$

Logo, $\frac{\overline{OF}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}$

a$_2$) $\overline{OG} = 4\overline{OA}$ e $\overline{OE} = 3\overline{OA}$. Logo, $\frac{\overline{OG}}{\overline{OE}} = \frac{4\overline{OA}}{3\overline{OA}} = \frac{4}{3}$

Da mesma forma, $\overline{OH} = 4\overline{OA}$ e $\overline{OF} = 3\overline{OA}$. Logo, $\frac{\overline{OH}}{\overline{OF}} = \frac{4\overline{OA}}{3\overline{OA}} = \frac{4}{3}$

Analogamente,

$\overline{GH} = 4\overline{AB}$ e $\overline{EF} = 3\overline{AB}$. Logo, $\frac{\overline{GH}}{\overline{EF}} = \frac{4\overline{AB}}{3\overline{AB}} = \frac{4}{3}$.

Conclui-se, assim, que $\frac{\overline{OG}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{EF}}$.

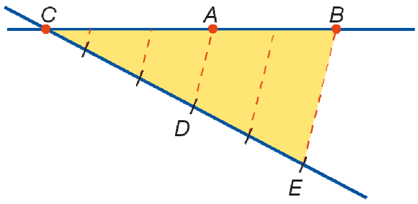
b) $\dfrac{\overline{OI}}{\overline{OC}}=\dfrac{\overline{AJ}}{\overline{OD}}=\dfrac{\overline{IJ}}{\overline{CD}}$

1.2. **a)** $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$

b) Como $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$, então $\dfrac{6}{2}=\dfrac{9}{\overline{DE}}$.

Logo, $\overline{DE}=\left(\dfrac{2\times 9}{6}\right)$ cm $=3$ cm.

2. Por exemplo:



3.1. Pelo Teorema de Tales, tem-se

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}\Leftrightarrow\frac{4\text{ cm}}{2\text{ cm}}=\frac{\overline{MN}}{1{,}5\text{ cm}}\Leftrightarrow\overline{MN}=\frac{1{,}5\text{ cm}\times 4\text{ cm}}{2\text{ cm}}=3\text{ cm}$$

Portanto, $\overline{MN}=3$ cm

3.2. Pelo Teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{CN}}\Leftrightarrow\frac{4\text{ cm}}{2\text{ cm}}=\frac{\overline{AN}}{2{,}5\text{ cm}}\Leftrightarrow\overline{AN}=\frac{4\text{ cm}\times 2{,}5\text{ cm}}{2\text{ cm}}=5\text{ cm}$$

Logo, $\overline{CN}=5\text{ cm}-2{,}5\text{ cm}=2{,}5\text{ cm}$.

4.1. Pelo Teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}\Leftrightarrow\frac{6\text{ cm}}{4\text{ cm}}=\frac{9\text{ cm}}{\overline{OB}}\Leftrightarrow\overline{OB}=\frac{9\text{ cm}\times 4\text{ cm}}{6\text{ cm}}=6\text{ cm}$$

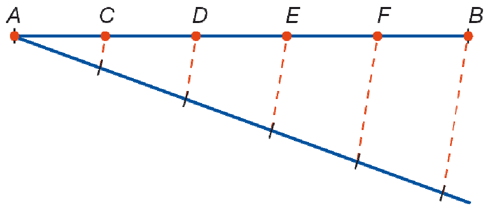
Logo, $\overline{OB}=6$ cm.

4.2. Pelo Teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}\Leftrightarrow\frac{6\text{ cm}}{4\text{ cm}}=\frac{4{,}5\text{ cm}}{\overline{AB}}\Leftrightarrow\overline{AB}=\frac{4{,}5\text{ cm}\times 4\text{ cm}}{6\text{ cm}}=3\text{ cm}$$

$\overline{AB}=3$ cm

5. Utilizando régua e compasso, obtém-se:



$$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FB}=\frac{1}{5}\overline{AB}$$

F41

Pág. 97

1.1. Os triângulos *A* e *B* são semelhantes atendendo ao critério AA.

1.2. Os triângulos *A* e *B* são semelhantes atendendo ao critério AA.

1.3. Os triângulos *A* e *B* são semelhantes atendendo ao critério AA.

1.4. Vejamos se os comprimentos dos lados do triângulo *B* são diretamente proporcionais aos comprimentos dos lados correspondentes do triângulo *A* (critério LLL):

$$\frac{7{,}5}{5}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

Logo os triângulos *A* e *B* são semelhantes.

1.5. Os triângulos *A* e *B* são semelhantes atendendo ao critério LAL.

1.6. Não se pode afirmar nada sobre a semelhança dos triângulos.

Em síntese, os pares de triângulos semelhantes são os de: **1.1.**; **1.2.**; **1.3.**; **1.4.** e **1.5.**.

Pág. 98

2.1. Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°, então:

$M\hat{R}A=63°$ e $S\hat{L}O=72°$.

2.2. Os triângulos são semelhantes pelo critério AA.

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{OL}}=\frac{\overline{AR}}{\overline{SL}}=\frac{\overline{MR}}{\overline{SO}}$$

3. Os triângulos da figura são semelhantes pelo critério AA.

Assim, a altura, *h*, do ecrã, em centímetros é dada por:

$$\frac{40}{h}=\frac{50}{1200}\Leftrightarrow h=\frac{40\times 1200}{50}=960$$

A altura do ecrã é igual a 9,6 m.

4. Sabe-se que os triângulos são semelhantes.

Pelos dados da figura, tem-se:

$$\frac{15}{5}=\frac{x+20}{x}\Leftrightarrow 15x=5x+100\Leftrightarrow 15x-5x=100\Leftrightarrow 10x=100\Leftrightarrow \frac{10x}{10}=\frac{100}{10}\Leftrightarrow x=10$$

5. Os triângulos da figura são semelhantes de acordo com o critério AA.

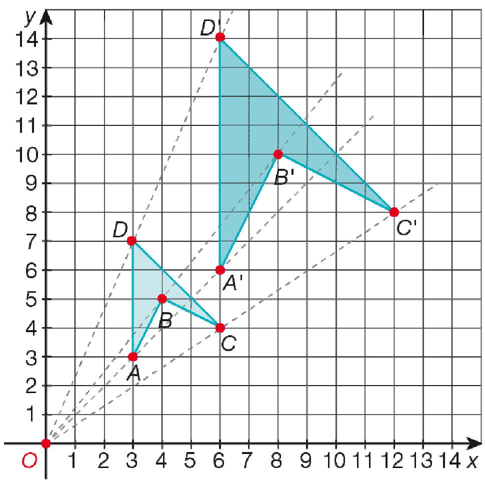
$$\frac{15}{6}=\frac{h}{5}\Leftrightarrow h=\frac{5\times 15}{6}\Leftrightarrow h=12{,}5$$

A altura do castelo é igual a 12,5 m.

F42

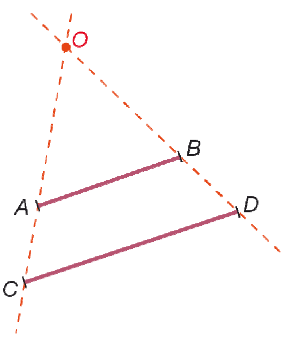
Pág. 99

1.1.



1.2. Homotetia direta de centro O e

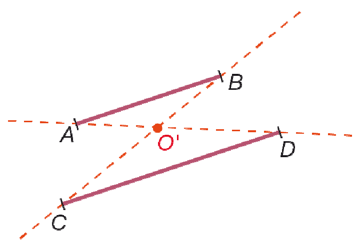
razão $r=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{9}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$



$H\left(O,\ \frac{3}{2}\right)$

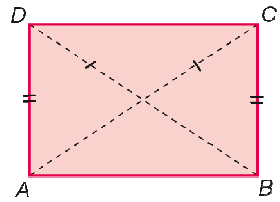
Homotetia inversa de centro O' e

razão $r=-\frac{3}{2}$



$H\left(O',\ -\frac{3}{2}\right)$

2.1. Consideremos o paralelogramo $[ABCD]$, onde as diagonais são geometricamente iguais. Pelo critério LLL, os triângulos $[ABD]$ e $[ACD]$ são geometricamente iguais (nota que $\overline{AD} = \overline{BC}$). Logo, os ângulos ADC e DAB são geometricamente iguais, pois opõem-se a lados geometricamente iguais em triângulos geometricamente iguais.



Como os ângulos são suplementares, então $A\hat{D}C = D\hat{A}B = 90°$.

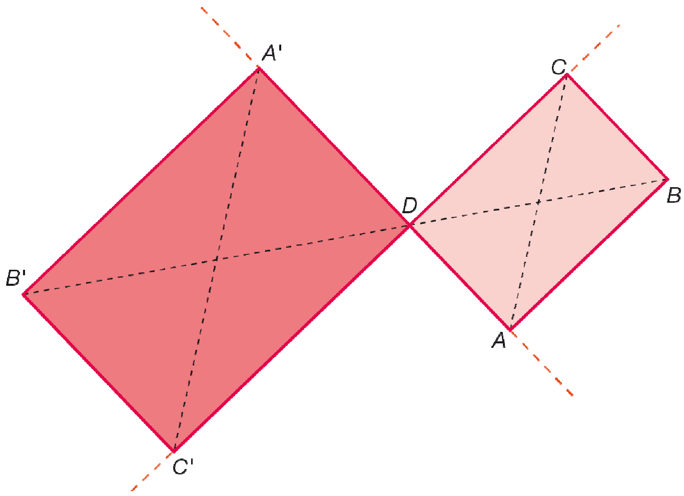
Da mesma forma se conclui que $D\hat{C}B = C\hat{B}A = 90°$.

Logo, o paralelogramo $[ABCD]$ é um retângulo.

Mostremos que as diagonais de um retângulo são geometricamente iguais.

Consideremos que o paralelogramo $[ABCD]$ é um retângulo. Pelo critério LAL, os triângulos $[ABD]$ e $[ACD]$ são geometricamente iguais. Logo, $\overline{DB} = \overline{AC}$, pois opõem-se a ângulos geometricamente iguais em triângulos geometricamente iguais.

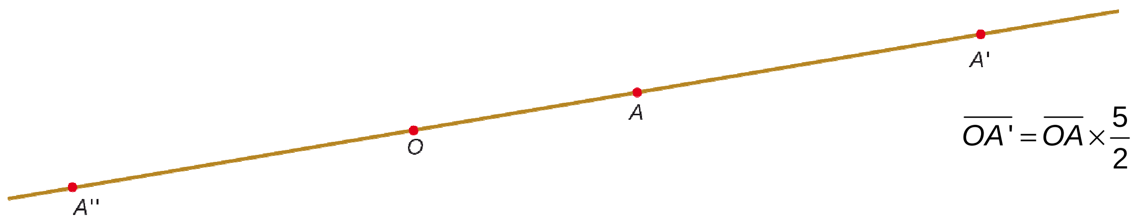
2.2.



2.3. Pelo Teorema de Tales tem-se que: $\frac{\overline{DA'}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{DC'}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$.

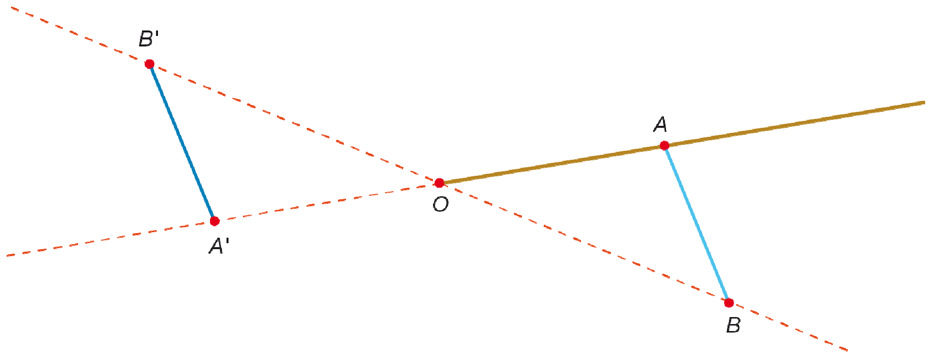
Logo, pelo critério LLL os triângulos são semelhantes.

3.1. e **3.2.**

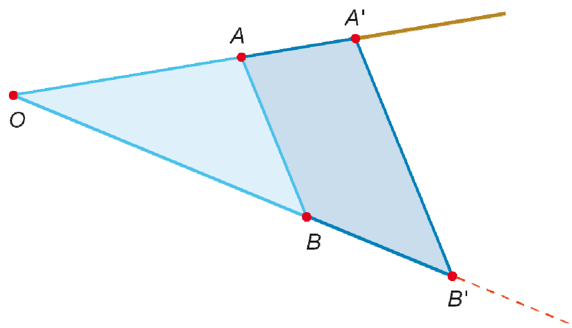


$\overline{OA'} = \overline{OA} \times \frac{5}{2}$

3.3. **a)** Consideremos, por exemplo, o ponto B.



b) $1\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$



$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{3}{2}$$

F43

Pág. 101

1.1. **a)** Área do círculo B: $\pi\times(3\times r)^2=9\pi r^2$

Área do círculo A: $\pi\times 3^2=9\pi$

Logo, a razão entre as áreas dos círculos B e A é $\frac{9\pi r^2}{9\pi}=r^2$.

A razão entre as áreas dos círculos é igual ao quadrado da razão dos seus raios, ou seja, igual ao quadrado da razão de semelhança.

b) Área do quadrado C: 4^2

Área do quadrado D: $(4\times r^2)=4^2\times r^2$

Logo, a razão entre as áreas dos quadrados D e C é $\frac{4^2\times r^2}{4^2}=r^2$.

A razão entre as áreas dos quadrados D e C é igual ao quadrado da razão dos comprimentos dos seus lados, ou seja, igual ao quadrado da razão de semelhança.

2.1. $A=\left(\frac{6\times 8}{2}\right)\text{ cm}^2=24\text{ cm}^2$; $P=(6+8+10)\text{ cm}=24\text{ cm}$.

A área do triângulo é 24 cm^2 e o perímetro é 24 cm.

2.2. **a)** $A'=(A\times 2^2)\text{ cm}^2=(24\times 4)\text{ cm}^2=96\text{ cm}^2$; $P'=(P\times 2)\text{ cm}=(24\times 2)\text{ cm}=48\text{ cm}$

b) $A'=\left(A\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)\text{cm}^2=\left(24\times\frac{1}{16}\right)\text{cm}^2=\frac{3}{2}\text{ cm}^2$ (ou 1,5 cm^2)

$P'=\left(P\times\frac{1}{4}\right)\text{cm}=\left(24\times\frac{1}{4}\right)\text{cm}=6\text{ cm}$

Pág. 102

3.1. Determinemos a razão de semelhança, r, que transforma o triângulo A no triângulo B:

$r=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

Logo, $h=\left(\frac{3}{2}\times 4\right)\text{cm}=6\text{ cm}$.

3.2. $P_A=(2\times 5+6)\text{ cm}=16\text{ cm}$

O perímetro do triângulo A tem 16 cm de medida.

3.3. $P_B=\frac{3}{2}\times P_A=\left(\frac{3}{2}\times 16\right)\text{cm}=24\text{ cm}$

O perímetro do triângulo B tem 24 cm de medida.

3.4. Determinemos a área do triângulo A:

$A_A=\left(\frac{6\times 4}{2}\right)\text{cm}^2=12\text{ cm}^2$

Como a razão entre as áreas dos triângulos é igual ao quadrado da razão de semelhança, então:

$A_B=\left[12\times\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\text{cm}^2=\left(12\times\frac{9}{4}\right)\text{cm}^2=27\text{ cm}^2$

A área do triângulo B é igual a 27 cm^2.

4.1. **a)** $r=\frac{\overline{GF}}{\overline{CB}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ **b)** $r=\frac{\overline{KJ}}{\overline{CB}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

4.2. **a)** $r=\frac{12}{3}=4$ **b)** $r=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$

4.3. **a)** $P_{[ABC]} = (3+4+5)\text{ cm} = 12\text{ cm}$

b) $P_{[EFH]} = \frac{1}{2} \times P_{[ABC]} = \left(\frac{1}{2} \times 12\right)\text{ cm} = 6\text{ cm}$

c) $P_{[IJL]} = \frac{3}{2} \times P_{[ABC]} = \left(\frac{3}{2} \times 12\right)\text{ cm} = \frac{36}{2}\text{ cm} = 18\text{ cm}$

F44

Pág. 103

1.1. **a)** $\overline{CF} = 6\overline{DE}$; $\overline{AB} = 4\overline{DE}$

Logo, $\frac{\overline{CF}}{\overline{AB}} = \frac{6\overline{DE}}{4\overline{DE}} = \frac{3}{2}$.

b) $\overline{CF} = 2\overline{DF}$; $\overline{AB} = 4\overline{DE}$

$\overline{DF} = 3\overline{DE} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\overline{DF} = \overline{DE}$

Portanto, $\overline{AB} = 4 \times \frac{1}{3}\overline{DF} = \frac{4}{3}\overline{DF}$

Logo, $\frac{\overline{CF}}{\overline{AB}} = \frac{2\overline{DF}}{\frac{4}{3} \times \overline{DF}} = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$

c) $\overline{CF} = 6\overline{DE}$ e $\overline{CE} = 4\overline{DE}$, pelo que $\overline{DE} = \frac{1}{4}\overline{CE}$

Portanto, $\overline{CF} = 6 \times \frac{1}{4}\overline{CE} = \frac{3}{2}\overline{CE}$

Como $\overline{AB} = \overline{CE}$, então $\frac{\overline{CF}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{3}{2} \times \overline{CE}}{\overline{CE}} = \frac{3}{2}$.

1.2. Os quocientes mantêm-se independentemente da unidade de comprimento considerada.

1.3. **a)** $\overline{AF} = 12\overline{DE}$

Portanto, $\overline{AF} = 12$ unidades, tomando o comprimento de $[DE]$ como unidade.

b) $\overline{CE} = 4\overline{DE}$. Logo, $\frac{\overline{AF}}{\overline{CE}} = \frac{12 \times \overline{DE}}{4 \times \overline{DE}} = 3$.

Portanto, $\overline{AF} = 3$ unidades, tomando o comprimento de $[CE]$ como unidade.

c) $\overline{BD} = 5\overline{DE}$. Logo, $\frac{\overline{AF}}{\overline{BD}} = \frac{12 \times \overline{DE}}{5 \times \overline{DE}} = \frac{12}{5}$.

Portanto, $\overline{AF} = \frac{12}{5}$ unidades, tomando o comprimento de $[BD]$ como unidade.

Pág. 104

2.1. $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{m'}{m}$

2.2. $v = 2u$; $\overline{AB} = 2m$; $\overline{CD} = 2m'$

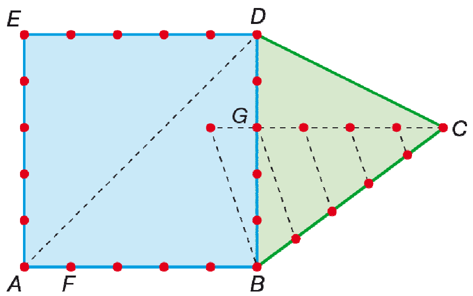
Logo, $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{2m'}{2m} = \frac{m'}{m}$

2.3. $\overline{EF} = 3\overline{CD}$; $\overline{CD} = m'$, tendo u por unidade.

Logo, $\overline{EF} = 3m'$.

3.1. Ora, $\overline{AB} = 5\overline{AF}$

Determinemos $\overline{BC}$ a partir da seguinte construção:



Logo, $\overline{BC} = 5\overline{AF}$. Portanto, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{5\overline{AF}}{5\overline{AF}} = 1$.

3.2. Não, pois o cateto e a hipotenusa de um triângulo isósceles não são comensuráveis.

3.3. $A_{[ABCDE]} = \left(5 \times \overline{AF}\right)^2 = \frac{3\overline{AF} \times 4\overline{AF}}{2} = 25 \times \overline{AF}^2 + 6 \times \overline{AF}^2 = 31 \times \overline{AF}^2$

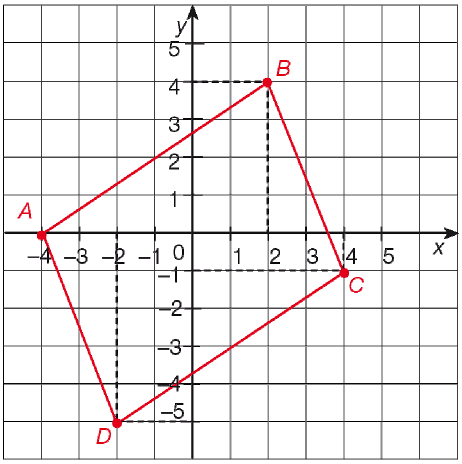
A área da figura é igual a $31 \times \overline{AF}^2$.

A5

Pág. 105

1.1. $A \curvearrowright (-4,\ 0)$; $B \curvearrowright (2,\ 4)$; $C \curvearrowright (4,\ -1)$

1.2. Consideremos o referencial e os pontos A, B e C.



Portanto, $D \curvearrowright (-2,\ -5)$.

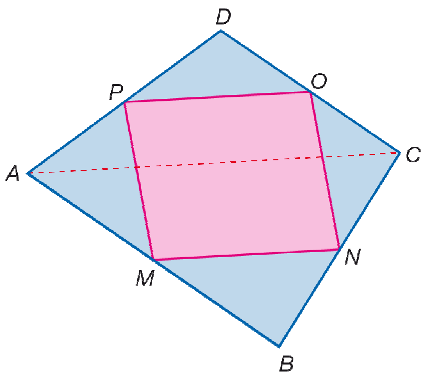
2.1. Os triângulos $[AMP]$ e $[CNM]$ são geometricamente iguais atendendo ao critério LAL de igualdade de triângulos.

- $\overline{CM} = \overline{MA}$, pois M é o ponto médio do lado $[AC]$.
- $N\hat{M}C = P\hat{M}A$, pois são ângulos verticalmente opostos.
- $\overline{PM} = \overline{MN}$, por hipótese.

2.2. Como os triângulos $[AMP]$ e $[CNM]$ são geometricamente iguais, então $C\hat{N}M = A\hat{P}M$.

Logo, os lados $[AP]$ e $[BN]$ são paralelos. Como, $\frac{\overline{CA}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CN}} = 2$, então pelo recíproco do Teorema de Tales, os lados $[PN]$ e $[AB]$ são paralelos. Portanto, $[ABNP]$ é um paralelogramo pois é um quadrilátero com os lados opostos paralelos.

3.1. Consideremos a diagonal $[AC]$ do quadrilátero $[ABCD]$. Dado que os pontos O e P são ponto médio de $[CD]$ e $[AD]$, respetivamente, então $\frac{\overline{DA}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DO}} = 2$.



Pelo recíproco do Teorema de Tales conclui-se que $[PO]$ é paralelo a $[AC]$.

De forma, análoga, conclui-se que $[MN] // [AC]$.

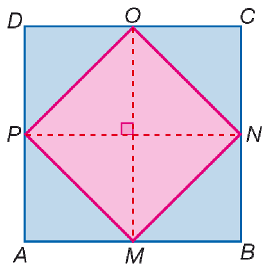
Pela relação de transitividade do paralelismo, conclui-se que os lados $[MN]$ e $[PO]$ são paralelos.

De forma semelhante, os lados $[PM]$ e $[ON]$ também são paralelos.

Portanto, o quadrilátero $[MNOP]$ é um polígono com os lados opostos paralelos, pelo que é um paralelogramo.

3.2. **a)** Como $\overline{ON} = \overline{OP} = \overline{PM} = \overline{MN}$, pois são diagonais de quadrados geometricamente iguais, $[MNOP]$ é um losango.

Como as diagonais $[PN]$ e $[OM]$ são perpendiculares e geometricamente iguais, então $[MNOP]$ é um quadrado.



b) Como os triângulos em que foi decomposto o quadrado $[ABCD]$ são geometricamente iguais, conclui-se que a área do quadrado $[ABCD]$ é igual ao dobro da área do quadrado $[MNOP]$. Ou seja, $A_{[ABCD]} = 2 \times A_{[MNOP]}$.

Pág. 106

---

4. Determinemos a razão de semelhança que transforma o triângulo $[MAR]$ num triângulo cujo comprimento do lado maior mede 39 cm. Ora, $r = \frac{39}{26}$. Assim, o lado do triângulo transformado, correspondente ao lado $[MA]$ do triângulo $[MAR]$ tem de comprimento $\left(24 \times \frac{39}{26}\right) \text{cm} = 36 \text{ cm}$. Por sua vez, o lado do triângulo transformado, corresponde ao lado $[AR]$ do triângulo $[MAR]$ tem de comprimento $\left(10 \times \frac{39}{26}\right) \text{cm} = \frac{65}{6} \text{ cm}$.

Portanto, o triângulo transformado tem os lados com comprimento 38 cm, 36 cm e $\frac{65}{6}$ cm.

5.1. Os triângulos $[ABC]$ e $[CDE]$ são semelhantes atendendo ao critério LAL.

$\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} = 0 \text{ e } D\hat{C}E = A\hat{C}B, \text{ pois são ângulos verticalmente opostos}\right)$.

5.2. Ora, como os triângulos são semelhantes, então $\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow 8 = \frac{\overline{AB}}{6} \Leftrightarrow \overline{AB} = 48$.

A distância entre as lanchas é 48 m.

6. Determinemos a razão da redução: $r = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Como a razão entra as áreas dos polígonos semelhantes *A* e *B* é igual ao quadrado da razão de semelhança que transforma o polígono *B* no polígono *A*, então a área, em cm^2, do triângulo novo é dada por: $50 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 50 \times \frac{4}{25} = 8$

A área do novo triângulo é 8 cm^2.

7.1. Os triângulos dados são semelhantes atendendo ao critério LAL.

• partilham o mesmo ângulo.

• $\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{ON'}}{\overline{ON}} = 1{,}5$

7.2. A razão de semelhança é igual ao valor absoluto da razão da homotetia.

Como a razão de semelhança de semelhança que transforma o triângulo $[ONM]$ no triângulo $[O'N'M']$ é 1,5, então a razão de semelhança que transforma o triângulo $[O'N'M']$ no triângulo $[ONM]$ é $\frac{1}{1{,}5}$, ou seja, $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$.

7.3. $\overline{N'M'} = \frac{3}{2} \times \overline{NM} = \frac{3}{2} \times 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$

8. Se a razão entre as áreas do quadrado $[ABCD]$ e o quadrado transformado é $\frac{9}{16}$, então a razão de semelhança associada é $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$.