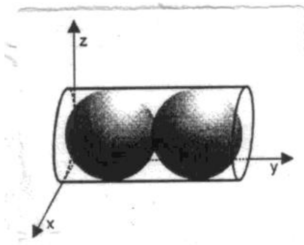
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA
Ficha de Trabalho de Geometria nº 2 - Matemática 11º Ano
Exercícios de Exames Nacionais

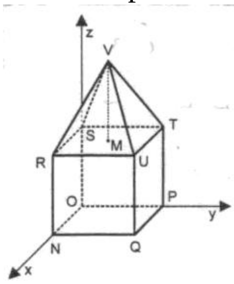
1. Considere num referencial o.n. Oxyz , os pontos A(5,0,0) e B(0,3,1).
a) Mostre que a reta AB está contida no plano de equação $x + 2y - z = 5$.
b) Determine as coordenadas de um ponto C, pertencente ao eixo OZ e de cota positiva, de tal modo que o triângulo [ABC] seja retângulo em C.
c) Determine o volume do cone que resulta da rotação do triângulo [AOB] em torno do eixo OX.

2. Na figura ao lado está representada, em referencial o.n. Oxyz, uma caixa cilíndrica construída num material de espessura desprezável. A caixa contém duas bolas encostadas uma à outra e às bases da caixa cilíndrica. O cilíndro tem uma das bases no plano XOZ e o centro dessa base é o ponto de coordenadas (3,0,3). A outra base está contida no plano de equação y = 12. As bolas são esferas de raio igual a 3 e os seus diâmetros são iguais aos diâmetros das bases do cilindro.



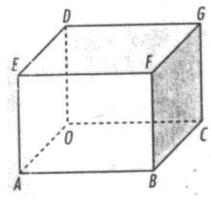
a)Justifique que a superfície esférica correspondente à bola mais afastada do plano XOZ tem centro no ponto (3,9,3) e que o ponto (1,8,1) pertence a essa superfície esférica.
b) Escreva uma equação do plano tangente, no ponto (1,8,1), à superfície esférica referida na alínea anterior. *Nota*: um plano tangente a uma superfície esférica é perpendicular ao raio relativo ao ponto da tangência.
c) Considere agora a caixa vazia. Seccionou-se a caixa pelo plano de equação z = 4. Supondo que a unidade do referencial é o centímetro, determine o perímetro da secção obtida.

3. Na figura está representado, em referencial o.n. Oxyz, um sólido formado por um cubo e uma pirâmide quadrangular regular. A altura da pirâmide, $\overline{VM}$, é igual ao comprimento da aresta do cubo e o vértice V tem coordenadas (3,3,12).



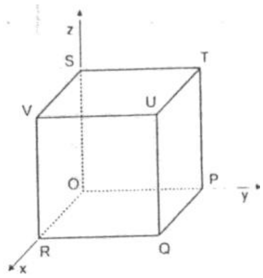
a) Justifique que $\overline{UQ} = 6$ e que $\overline{UV} = 3\sqrt{6}$.
b) Determine a interseção da reta que contém a aresta [UV] com o plano de equação x=4.
c) Considere um ponto A pertencente à aresta [UQ]. Um plano que contenha o ponto A e que seja paralelo ao plano XOY divide o sólido representado na figura em duas partes. Determine a cota do ponto A de modo que sejam iguais os volumes dessas duas partes.

4. Num referencial o.n. do espaço, são dados os pontos A(1,1,0) , B(0,2,0) , C(-1,1,0) e D(0,0,1). Sejam [OABC] e [DEFG] as bases de um prisma quadrangular regular.



a) Determine as coordenadas dos pontos E, F e G.
b) Escreva uma equação cartesiana do plano α definido pelos pontos A, C e D.
c) Determine uma equação vetorial da reta de interseção do plano α com o plano que contém a face [OAED].
d) Calcule o volume do prisma, sabendo que a unidade adotada é o cm.

5. Na figura está representado um cubo. A abcissa de R é 2.

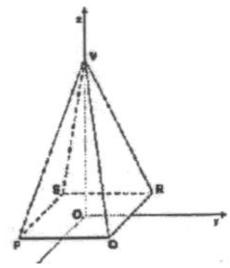


a) Determine uma equação cartesiana do plano PUV.

b) Mostre que o raio da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo é $\sqrt{3}$ e determine uma equação dessa superfície esférica.

c) Calcule a área da região do plano PUV compreendido entre a secção determinada por esse plano, no cubo, e a secção determinada pelo mesmo plano, na superfície esférica referida na alínea anterior.

6. Considere, num referencial Oxyz uma pirâmide regular de base quadrada. O vértice V da pirâmide pertence ao semieixo positivo OZ e a base da pirâmide está contida no plano XOY. A aresta [PQ] é paralela ao eixo OY e o ponto Q tem coordenadas (2,2,0).



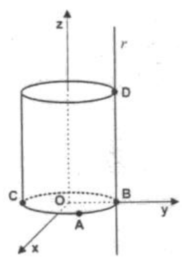
a) Sabendo que o volume da pirâmide é igual a 32, mostre que o vértice V tem coordenadas (0,0,6).

b) Mostre que o plano QRV pode ser definido pela equação $3y + z = 6$.

c) Determine uma condição que defina a reta que passa na origem do referencial e é perpendicular ao plano QRV.

d) Justifique que a interseção da aresta [QV] com o plano de equação $z = 3$ é o ponto M(1,1,3). Determine a área da secção produzida na pirâmide por esse plano.

7. Considere um cilindro de revolução como o representado na figura. A base inferior tem centro na origem e está contida no plano XOY. [BC] é um diâmetro da base inferior, contido no eixo OY e o ponto C tem coordenadas (0,-5,0). O ponto A tem coordenadas (4,3,0). A reta r passa no ponto B e é paralela ao eixo OZ.



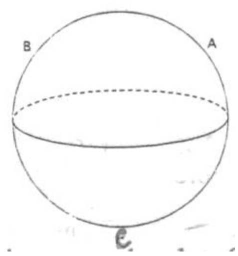
a) Justifique que a reta AC é perpendicular à reta AB.

b) Escreva uma equação vetorial da reta r.

c) Justifique que $\overrightarrow{AC}$ é um vetor perpendicular ao plano ABD. Determine uma equação deste plano.

d) Designando por α a amplitude, em radianos, do ângulo BÔD, mostre que o volume do cilindro é dado por $V(\alpha) = 125\pi \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

8. Considere a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ representada ao lado. Os pontos A e B pertencem à superfície e têm coordenadas, respetivamente, (0,4,3) e (0,-4,3). O ponto C é um ponto de cota negativa do eixo OZ.

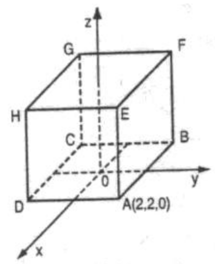


a) Mostre que uma equação do plano tangente à superfície esférica no ponto A é $4y+3z=25$.

b) Justifique que C tem coordenadas (0,0,-5) e determine as coordenadas do ponto de interseção do plano referido na alínea anterior com a reta BC.

c) Calcule o valor da tangente do ângulo $A\hat{C}B$.

9. No referencial, ao lado, está representado um cubo de faces paralelas aos planos coordenados. O perímetro de cada face é, na unidade considerada, igual a 16.



a) Escreva uma equação cartesiana do plano DGF.

b) Defina analiticamente a superfície esférica tangente a todas as faces do cubo.

c) Determine k, caso exista, de modo que o vetor $\vec{u}$ $(k^2+2k\ ,k^2-1,3)$ seja colinear com $\overrightarrow{CH}$.

d) Sendo M e N os pontos médios das arestas [AB] e [EF], respetivamente, determine as coordenadas do ponto P $\in$ [HE] sabendo que a secção plana determinada no cubo pelo plano MNP é um quadrado.

10. A embalagem de certo gelado é uma superfície esférica. Num referencial o.n. essa superfície tem por equação $x^2 + y^2 + z^2 = 13$.

a) O bordo da "tampa" da embalagem é uma circunferência que se obtém seccionando a superfície esférica por um plano β, de cota positiva e paralelo a XOY. Sabendo que, na unidade considerada, o bordo da "tampa" tem perímetro igual a 2π, escreve uma equação do plano β.

b) Verifique que o ponto A(2,3,0) pertence à superfície esférica e determine as coordenadas do ponto B de modo que [AB] seja diâmetro da superfície esférica.

c) Seja α o plano mediador do segmento [AB]. Determine k $\in$ IR de modo que α seja perpendicular ao plano definido por $ky - 2x = z$.

11. Considere, num referencial o.n. $(O\ ;\ \vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$, o vetor $\vec{u} = (2,5,0)$.

a) Indique, justificando, dois vetores que sejam perpendiculares a $\vec{u}$ mas que não sejam colineares.

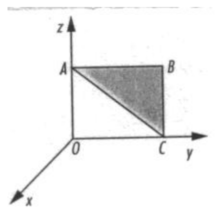
b) Qual o ângulo de $\vec{u}$ com $\vec{e_1}$? (Aproximação a menos de 0,01 radianos).

c) Escreva uma equação cartesiana do plano α perpendicular a $\vec{u}$ e que interseta o eixo OY no ponto (0,1,0).

d) Considere os planos $\beta : x + y + z = 1$ e $\gamma : 3y - 2z = 1$. Indique, justificando, qual a posição relativa dos planos α , β e γ .

Nota: caso não tenha resolvido c) considere $\alpha : 2x +5y + 1 = 0$.

12. No referencial ortonormado Oxyz da figura, [ABC] é um triângulo retângulo em B contido no plano YOZ. Na unidade considerada, $\overline{OC} = 4$ e $\overline{OB} = 5$.



a) Defina por equações cartesianas a reta AC.

b) Considere que o triângulo roda uma volta completa em torno do eixo OY.

b.1) Defina analiticamente a linha que o ponto A descreve no plano XOZ na referida rotação.

b.2) Calcule o volume do sólido gerado pelo triângulo na rotação descrita.

Soluções: 1b)C(0,0,1);c) $\frac{50\pi}{3}$;2b) –2x-y-2z+12=0; c) $24+8\sqrt{2}$;3b)I(4,4,10);c)z=4;
4a)E(1,1,1)F(0,2,1)G(-1,1,1);b)y+z-1=0;c)(x,y,z)=(1,1,0)+k(-1,-1,1),k$\in$IR;d)2;
5a)-x+z=0;5b) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$;c) $3\pi-4\sqrt{2}$;6c)(x,y,z)=k(0,3,1),k$\in$IR;d)4;
7b)(x,y,z)=(0,5,0)+k(0,0,1),k$\in$IR;c)x+2y-10=0;8b)I(0,-20,35);c)1,33;9a)x+z-2=0;
9b) $x^2+y^2+(z-2)^2=4$;c)não existe;d) $P(2,2-2\sqrt{3},4)$;10a) $z=2\sqrt{3}$;b)B(-2,-3,0);

c) $k = \frac{4}{3}$;11a)(-5,2,0)e(5,-2,1);b)1,19rad;c)2x+5y-5=0;d)planos não paralelos intersetandotersectando-se 2 a 2;12a) $\begin{cases} x = 0 \\ 3y + 4z - 12 = 0 \end{cases}$ 12b1) $\begin{cases} x^2 + z^2 = 9 \\ y = 0 \end{cases}$ 12b2) 36π

www.ladeiramat.no.sapo.pt