AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA

Ficha de Trabalho nº 2 – Sucessões / Progressões

Matemática 11º Ano

Primeira Parte

1) Considere a sucessão de números reais u_n : 2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, ...

a) Defina u_n por recorrência.

b) Obtenha o termo de ordem 10.

2) Considere as sucessões definidas por $\mathbf{u_n} = \frac{3\mathbf{n}+1}{\mathbf{n}+2}$ $\quad \mathbf{v_n} : \begin{cases} \mathbf{v}_1 = 10 \\ \mathbf{v_{n+1}} = \mathbf{v_n} - 2 \end{cases}$ $\quad \mathbf{w_n} : \begin{cases} \mathbf{w}_1 = 5 \\ \mathbf{w_n} = 2\mathbf{w_{n-1}} \end{cases}$

a) Determine os 2º e 3º termos de cada uma das sucessões.

b) Verifique se $\frac{8}{3}$ é termo de u_n e em caso afirmativo indique a sua ordem.

c) Obtenha a ordem a partir da qual todos os termos de u_n são superiores a 2.

d) Estude u_n quanto à monotonia.

e) Mostre que u_n é limitada, indicando um minorante e um majorante do conjunto dos seus termos.

f) Das alíneas d) e e) o que pode concluir ? Justifique.

g) Defina v_n e w_n através do seu termo geral.

3) Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1-n}{2}$.

a) Mostre que u_n é uma progressão aritmética de razão $r = -\frac{1}{2}$.

b) Que pode concluir acerca da monotonia ? Justifique.

c) Calcule a soma dos 13 primeiros termos.

4) Considere a sucessão de termo geral $\mathbf{u_n} = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2\mathbf{n}-1}$.

a) Mostre que u_n é uma progressão geométrica de razão $\mathbf{r} = \frac{1}{4}$ e calcule o primeiro termo.

b) Que pode concluir acerca da monotonia e da convergência? Justifique.

c) Calcule a soma dos 13 primeiros termos e a soma de todos os termos de u_n.

5) Considere a sucessão de termo geral $\boldsymbol{a_n} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{3-\boldsymbol{n}}$.

a) Prove que a sucessão é uma progressão geométrica e indique a sua razão e o 1º termo.

b) Calcule a soma dos primeiros dez primeiros termos da sucessão.

c) Pronuncie-se sobre a monotonia e a convergência da sucessão.

6) Considere as sucessões definidas por $\boldsymbol{u_n} = \frac{8\boldsymbol{n}+3}{4\boldsymbol{n}}$ e $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 9 \\ \boldsymbol{v_{n+1}} = \boldsymbol{v_n} + \frac{1}{3}, \ \forall \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{IN} \end{cases}$

a) Verifique se **5** é termo da sucessão $\boldsymbol{u_n}$ e em caso afirmativo indique a sua ordem.

b) Estude $\boldsymbol{u_n}$ quanto à monotonia. Será $\boldsymbol{u_n}$ uma progressão aritmética? Justifique a resposta.

c) Mostre que $\boldsymbol{u_n}$ é limitada.

d) Calcule o 3º termo de $\boldsymbol{v_n}$ e obtenha uma expressão para o termo geral de $\boldsymbol{v_n}$.
Será $\boldsymbol{v_n}$ uma progressão aritmética ? Em caso afirmativo indique a razão.

7) O gerente de um parque de estacionamento privado estabeleceu que cada carro estacionado no parque paga 50 cêntimos de taxa fixa e mais 1 euro por cada hora que permanece no parque.

a) Defina a sucessão $\boldsymbol{c_n}$ que dá o valor, em euros, que o dono de um carro deverá pagar ao fim de $\boldsymbol{n}$ horas que esteja estacionado no parque.

b) Mostre que $\boldsymbol{c_n}$ define uma progressão aritmética crescente.

c) Durante 8 dias um indivíduo estacionou o carro no parque do seguinte modo: 1 hora no 1º dia, 2 horas no 2º dia, 3 horas no 3º dia, e assim sucessivamente. Determine, utilizando os conhecimentos de progressões aritméticas, quanto terá pago o indivíduo ao fim de 8 dias.

8) Considere as sucessões $\mathbf{u_n} = 2\mathbf{n} + 7$ e $\mathbf{v_n} = 5 \times 2^{4-2\mathbf{n}}$.

a) Calcule o primeiro e o quinto termo de cada uma.
b) Prove que u_n é uma progressão aritmética e que v_n é uma progressão geométrica.
c) Escreva u_n na forma $\mathbf{u_n} = \mathbf{u}_1 + (\mathbf{n}-1)\mathbf{r}$ e $\mathbf{v_n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}^{\mathbf{n}-1}$.
d) Calcule a soma dos primeiros 10 termos de cada uma das sucessões.
e) Calcule a soma de todos os termos de v_n.

9) Um professor da disciplina X fez a seguinte estimativa para o tempo dispendido, em média, na sua atividade docente:

- preparar e dar aulas : 35 horas por semana;
- corrigir trabalhos e testes : 12 minutos por cada aluno por semana.

Se o número de alunos pudesse ser um número natural qualquer, considere a sucessão $\boldsymbol{a_n}$, cujo termo geral permite determinar o tempo dedicado à atividade docente, por semana, pelo professor, sendo $\boldsymbol{n}$ o número de alunos.

a) Calcule o 10º e o 20º termos da sucessão e diga o que representa cada um.
b) Determine o termo geral da sucessão $\boldsymbol{a_n}$.
c) Se o professor tem 4 turmas de 25 alunos cada uma, quanto tempo gasta, em média, por semana, no seu trabalho docente?

10) O relógio de uma torre, além das badaladas indicando as horas, bate 1 badalada ao quarto de hora, 2 à meia hora e 3 aos três quartos de hora. Quantas badaladas bate ao fim de 1 dia ?
(Note que o relógio, por exemplo, ás 15 horas bate apenas 3 badaladas)

11) Comente cada uma das afirmações, apresentando contraexemplos em caso de serem falsas.

a) Toda a sucessão convergente é monótona.
b) Toda a sucessão limitada é convergente.
c) Toda a sucessão decrescente e de termos positivos converge para zero.
d) Se uma sucessão $\boldsymbol{a_n} \to +\infty$ então $\boldsymbol{a_n} \times \boldsymbol{b_n} \to +\infty$, qualquer que seja a sucessão $\boldsymbol{b_n}$.

12) Aquiles e a Tartaruga

Aquiles vai correr com uma Tartaruga : por questões de justiça, a Tartaruga parte 100 metros à frente de Aquiles. Em cada segundo Aquiles anda 10 metros e a Tartaruga apenas 1 metro. Será que Aquiles vai conseguir ultrapassar a Tartaruga? Ao fim de quanto tempo?

Segunda Parte

13) Sobre a sucessão $\boldsymbol{a_n} = \dfrac{\boldsymbol{n}^2 - 13}{4}$ pode afirmar-se que:

(A) é limitada. (B) a ordem do termo igual a 3 é 5.
(C) o 3º termo é 5. (D) a ordem do termo igual a 5 é 3.

14) No início do ano 2000 uma cidade tinha 1 500000 habitantes e está a crescer à taxa anual de 20%.
A expressão que permite prever a população existente ao fim de $\boldsymbol{n}$ anos após o ano 2000 é :

$(A)\, 1{,}2^n \times 1{,}5 \times 10^6$ $(B)\, 1{,}2^{n-1} \times 1{,}5 \times 10^6$ $(C)\, 1{,}02^n \times 1{,}5 \times 10^6$ $(D)\, 1{,}5 \times 10^6 \times 2000 \times 1{,}02^n$

15) Seja $\boldsymbol{u_n}$ uma progressão aritmética de razão $\boldsymbol{r}$ igual a **- 5** .
Qual das afirmações é verdadeira ?

$(\boldsymbol{A})\ \boldsymbol{u}_7 = \boldsymbol{u}_3 - 20$ $(\boldsymbol{B})\ \boldsymbol{u}_7 - \boldsymbol{u}_3 = -4\boldsymbol{r}$

$(\boldsymbol{C})\ \boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + 5, \forall \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{IN}$ $(\boldsymbol{D})\ \boldsymbol{u}_{10} = \boldsymbol{u}_2 + 40$

16) É progressão geométrica uma sucessão em que para todo o número natural :

$(A)\mathbf{u}_{n-1} - \mathbf{u}_n = 2$ $\quad$ $(B)\mathbf{u}_{n-1} = 2\mathbf{u}_n$ $\quad$ $(C)\mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_n$ $\quad$ $(D)\mathbf{u}_{n-1} = \dfrac{2}{\mathbf{u}_n}$

17) Seja (v_n) a sucessão cujo termo geral é dado pelo perímetro de cada um dos triângulos equiláteros que se obtém como mostra a figura. O lado do triângulo inicial é 3 e o lado de cada um dos seguintes, é a terça parte do anterior. Então o termo geral da sucessão (v_n) é :

$(A)3^{n+3}$ $\quad$ $(B)4 \times 3^n$ $\quad$ $(C)3^{3-n}$ $\quad$ $(D)\dfrac{9}{3^{-n+3}}$

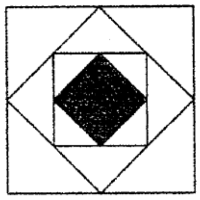
18) Acerca da sucessão definida por $u_n = \begin{cases} 5n-1 \text{ se } n\langle 20 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ se } n \geq 20 \end{cases}$ pode-se afirmar que :

(A) É monótona e limitada. $\quad$ (B) É um infinitésimo.

(C) É um infinitamente grande positivo. $\quad$ (D) É não monótona e não limitada.

19) Para as suas férias em Itália o Ricardo levou 610 Euros. No primeiro dia gastou 20 Euros, no segundo 23, no dia seguinte 26, e assim sucessivamente. Quanto gastou no n-ésimo dia (dia de ordem n) ?

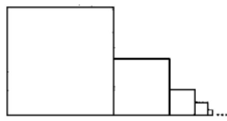
$(A)\ 20$ $\quad$ $(B)\ 3n+17$ $\quad$ $(C)\ 3n$ $\quad$ $(D)\ 3n-20$



20) Na figura ao lado está representado um quadrado [ABCD] de lado 4 cm. Unindo os pontos médios dos lados desse quadrado construiu-se outro quadrado de menor *perímetro. Imagine, agora, que o processo foi continuado indefinidamente. Seja* (p_n) *a* sucessão dos perímetros dos sucessivos quadrados.

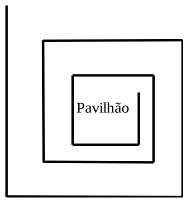
Então o termo geral da sucessão (p_n) é:

$(A)\ p_n = \dfrac{16}{n}$ $\quad$ $(B)\ p_n = 16 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$ $\quad$ $(C)\ p_n = 16^{n-1}$ $\quad$ $(D)16 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^n$



21) Seja (u_n) a sucessão cujo termo geral dá a área de cada um dos quadrados que se obtém como mostra a figura. O lado do quadrado inicial é 3; o lado de cada quadrado é metade do lado do quadrado anterior. Então o termo geral da sucessão (u_n) é:

$(A)\ 9 \times 2^{n-1}$ $\quad$ $(B)\ \dfrac{9}{2^{n-2}}$ $\quad$ $(C)\ \dfrac{9}{2^{2n-2}}$ $\quad$ $(D)\ 9 \times 2^{1-n}$



22) Dado as longas filas na EXPO98, um pavilhão optou por organizar a fila como o esquema ao lado indica. A medida de cada segmento é 75% da medida do segmento anterior, sendo 11 os segmentos. A maior das filas mede 60 metros. Qual a distância, em metros, percorrida por um visitante que está no fim da fila até entrar no pavilhão?

$(A)\ 240$ $\quad$ $(B)\ \dfrac{60+\frac{3}{4}}{2} \times 11$ $\quad$ $(C)240 \times \left(1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{11}\right)$ $\quad$ $(D)\ 60 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{11-1}$

23) Das afirmações seguintes, qual é falsa?

(A) Toda a sucessão decrescente e convergente é limitada.

(B) Um infinitésimo é sempre uma sucessão limitada.

(C) Uma sucessão não monótona pode ser convergente.

(D) Um infinitamente grande positivo é uma sucessão crescente.

$Sol:1.a)\begin{cases} u_1 = u_2 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \end{cases}; b)110; 2.a)\frac{7}{4} e\, 2; 8\, e\, 6; 10\, e\, 20; b) ordem 13; c)4; d) crescente; e)\left[\frac{4}{3}, 3\right[; f) conv; g) v_n = 12 - 2n; w_n = 5 \times 2^{n-1};$

$3.b) dec; c) -39; 4.a) u_1 = \frac{5}{2}; b) dec\, e\, conv;; c)3,(3); \frac{10}{3}; 5.a) r = -2; a_1 = 1; b) -341; c) não\, mon, div(oscil); 6.a) não; b) dec; não; c) \left]0, \frac{11}{4}\right];$

$d) v_3 = \frac{29}{3}; v_n = \frac{26+n}{3}; sim; r = \frac{1}{3}; 7.a) c_n = 0{,}5 + n; c)40; 8.a)9\, e\, 17; 20\, e\, 0{,}078; c) u_n = 9 + (n-1)2\, e\, v_n = 20 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}; d)180\, e\, 26,(6); e)\frac{80}{3};$

$9.a)37\, e\, 39; b) a_n = 35 + 0{,}2n; c)55; 10)300; 11.a)F; b)F; c)F; d)F; 12)11{,}1s; 13)B; 14)A; 15)A; 16)B; 17)C; 18)B; 19)B; 20)B; 21)C; 22)C; 23)D$

joseladeira@gmail.com
www.ladeiramat.no.sapo.pt