Pág. 150

1.1. **a)** O perímetro do triângulo $[ACE]$ é igual a

$\overline{CE}+\overline{AE}+\overline{AC}$.

$\overline{AC}=1$ (raio da circunferência)

$\cos x=\dfrac{\overline{DC}}{\overline{AC}}$, ou seja, $\overline{DC}=\cos x$.

Assim, $\overline{CE}=\overline{DC}+\overline{DE}$, isto é, $\overline{CE}=\cos x+6$.

$\sin x=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$, ou seja, $\overline{AD}=\sin x$.

O triângulo $[ADE]$ é retângulo em D, logo, pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AE}^2=\overline{DE}^2+\overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{AE}^2=6^2+(\sin x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AE}^2=36+\sin^2 x$$

Como $\overline{AE}>0$, $\overline{AE}=\sqrt{36+\sin^2 x}$.

Donde resulta que $P(x)=\cos x+6+\sqrt{36+\sin^2 x}+1$,

ou seja, $P(x)=7+\cos x+\sqrt{36+\sin^2 x}$, c.q.m.

b) Área $\Delta_{[ACE]}=\dfrac{\overline{CE}\times\overline{AD}}{2}=\dfrac{(6+\cos x)\times(\sin x)}{2}=$

$$=\frac{6\sin x+\cos x\times\sin x}{2}=\frac{6\sin x}{2}+\frac{\cos x\sin x}{2}=$$

$$=3\sin x+\frac{\cos x\times\sin x}{2}$$

Portanto, $A(x)=3\sin x+\dfrac{\cos x\sin x}{2}$.

1.2. **(i)** $3+\dfrac{\cos x}{2}=\dfrac{12+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{2}=\dfrac{12+\sqrt{3}}{4}-3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{2}=\frac{12+\sqrt{3}-12}{4} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=\frac{2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $x\in\left]0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, então $x=\dfrac{\pi}{6}$ rad.

(ii) $A_{[ACE]}=3\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\dfrac{\pi}{6}}{2}=$

$$=3\times\frac{1}{2}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{2}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{12+\sqrt{3}}{8}$$

Pág. 151

2.1. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \sin(2x)=\cos\left(2x-\dfrac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-2x=2x-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ \vee$$

$$\vee\ \frac{\pi}{2}-2x=-2x+\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -4x=-\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ \vee$$

$$\vee\ 0x=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -4x=-\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x\in\varnothing$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}-\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in[0\ ,\ 2\pi]$:

Para $k=0$: $x=\dfrac{\pi}{3}$

Para $k=-1$: $x=\dfrac{5\pi}{6}$

Para $k=-2$: $x=\dfrac{4\pi}{3}$

Para $k=-3$: $x=\dfrac{11\pi}{6}$

Portanto, os dois gráficos intersetam-se nos pontos de abcissa $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{6}$, $\dfrac{4\pi}{3}$ e $\dfrac{11\pi}{6}$.

Assim:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(2\times\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)=$$

$$=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\sin\left(2\times\frac{4\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)=\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=f\left(2\times\frac{11\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right)=\sin\left(2\pi+\frac{5\pi}{3}\right)=$$

$$=\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Então, $P_1\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_2\left(\dfrac{5\pi}{6},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_3\left(\dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $P_4\left(\dfrac{11\pi}{6},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2.2. $(f\times g)(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0\vee g(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin(2x)=0\vee\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee 2x-\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\vee 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\vee 2x=\frac{4\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\vee x=\frac{2\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in[0\ ,\ 2\pi]$:

- $0\le\dfrac{k\pi}{2}\le 2\pi \Leftrightarrow 0\le k\pi\le 4\pi \Leftrightarrow 0\le k\le 4 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow k\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

  Portanto: $x=0\vee x=\dfrac{\pi}{2}\vee x=\pi\vee x=\dfrac{3\pi}{2}\vee x=2\pi$

- $0 \le \frac{2\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} \le \frac{k\pi}{2} \le 2\pi - \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} \le \frac{k\pi}{2} \le \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{4\pi}{3} \le k\pi \le \frac{8\pi}{3} \Leftrightarrow$

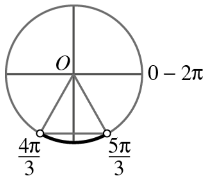
$\Leftrightarrow -\frac{4}{3} \le k \le \frac{8}{3} \Leftrightarrow k \in \{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

Portanto: $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{3}$

Então, os zeros da função $f \times g$ são:

$0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3},\ \pi,\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{3}$ e 2π

2.3. $f(x) < -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) < -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \frac{4\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Como $x \in [0\ ,\ 2\pi]$:

Para $k = 0$, $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}$ e para $k = 1$, $\frac{5\pi}{3} < x < \frac{11\pi}{6}$.

Portanto:

$f(x) < -\frac{\sqrt{3}}{2} \wedge x \in [0\ ,\ 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]\frac{2\pi}{3}\ ,\ \frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}\ ,\ \frac{11\pi}{6}\right[$

2.4. $\frac{11\pi}{6} \le x \le 2\pi \wedge \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) \le y \le \sin(2x)$

3.1. As retas *QB* e *RP* são perpendiculares se os seus vetores diretores o forem, ou seja, se $\overrightarrow{QB} \perp \overrightarrow{RP}$.

Por outro lado, $\overrightarrow{QB} \perp \overrightarrow{RP} \Leftrightarrow \overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{RP} = 0$ e

$P(b,\ 0)$, $B(a,\ a)$, $R(0,\ a-b)$ e $Q(b,\ a-b)$

Então:

$\overrightarrow{QB} = B - Q = (a,\ a) - (b,\ a-b) = (a-b,\ b)$

$\overrightarrow{RP} = P - R = (b,\ 0) - (0,\ a-b) = (b,\ b-a)$

Assim:

$\overrightarrow{QB} \times \overrightarrow{RP} = (a-b,\ b) \cdot (b,\ b-a) = b(a-b) + b(b-a) =$

$= ab - b^2 + b^2 - ab = 0$

Portanto, as retas *QB* e *RP* são perpendiculares.

3.2. A ordenada na origem na reta *RP* é igual à ordenada do ponto *R*, ou seja, igual a $a-b$.

Por outro lado, temos que $\overrightarrow{QB}(a-b,\ b)$ é um vetor diretor da reta *QB*, pelo que, o declive da reta *QB* é igual a $\frac{b}{a-b}$.

A reta *QB* passa pelo ponto *B*(*a*, *a*), portanto:

$QB: y - a = \frac{b}{a-b}(x-a) \Leftrightarrow y = \frac{b}{a-b}x - \frac{ab}{a-b} + a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{b}{a-b}x + \frac{-ab + a^2 - ab}{a-b} \Leftrightarrow y = \frac{b}{a-b}x + \frac{a^2 - 2ab}{a-b}$

A ordenada na origem da reta *QB* é igual $\frac{a^2 - 2ab}{a-b}$.

$k = \frac{a-b}{\frac{a^2-2ab}{a-b}} \Leftrightarrow k = \frac{(a-b)^2}{a^2-2ab} \Leftrightarrow k = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - 2ab} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{a^2-2ab}{a^2-2ab} + \frac{b^2}{a^2-2ab} \Leftrightarrow k = 1 + \frac{b^2}{a^2-2ab}$

Pág. 152

4.1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + z^2 + 4z - 4 = 0 \Leftrightarrow$

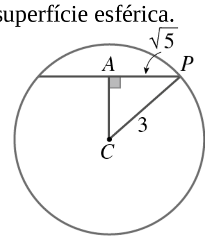
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 + z^2 + 4z + 4 - 4 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 - 1 + (z+2)^2 - 4 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$

Então, $C(0,\ 1,\ -2)$ e $r = 3$.

4.2. Seja *A* o centro da circunferência, interseção do plano α com a superfície esférica, *P* um ponto genérico da circunferência e *C* o centro da superfície esférica.



Recorrendo ao Teorema de Pitágoras:

$\overline{CP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 3^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 4$

Como $\overline{AC} > 0$, então $\overline{AC} = 2$.

Tomando planos paralelos aos planos coordenados distanciados do centro da superfícies esférica duas unidades, temos que três possíveis equações para o plano α são:

$x = -2$, $x = 2$ e $y = 3$

4.3. Dado que o plano tangente, ou seja, θ tem que ser paralelo ao plano β, o vetor normal terá que ser colinear com o vetor $\vec{u}(0,\ 1,\ 1)$. Seja *C* o centro da superfícies esférica e *P* o ponto de tangência.

Assim, sendo, $\left\|\overrightarrow{CP}\right\| = 3$ e $\overrightarrow{CP} = k\hat{u},\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Portanto:

$\left\|\overrightarrow{CP}\right\| = 3 \Leftrightarrow \left\|k\hat{u}\right\| = 3 \Leftrightarrow |k|\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |k| = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |k| = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \vee k = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Então:

$\overrightarrow{CP}\left(0,\ \frac{3\sqrt{2}}{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $\overrightarrow{CP}\left(0,\ -\frac{3\sqrt{2}}{2},\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

Vamos determinar as coordenadas do ponto de tangência *P*.

- Se $\overrightarrow{CP} = \left(0,\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$:

$P = C + \overrightarrow{CP} = (0,\ 1,\ -2) + \left(0,\ \frac{3\sqrt{2}}{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= \left(0,\ 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2},\ -2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

Equação de θ que passa em P de que $\vec{u}(0,\ 1,\ 1)$ é um vetor normal:

$$\theta: \left(y-1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)+\left(z+2-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y+z+1-3\sqrt{2}=0$$

- Se $\overrightarrow{CP}=\left(0,\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}\ ,\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$P=C+\overrightarrow{CP}=(0,\ 1,\ -2)+\left(0,\ -\frac{3\sqrt{2}}{2},\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=\left(0,\ 1-\frac{3\sqrt{2}}{2},\ -2-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Equação de θ que passa em P de que $\vec{u}(0,\ 1,\ 1)$ é um vetor normal:

$$\theta: \left(y-1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)+\left(z+2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y+z+1+3\sqrt{2}=0$$

5.1. O vetor $\vec{u}(0,\ -4,\ 3)$ é normal ao plano α.

Por outro lado, sabe-se que o plano β é paralelo ao plano α, pelo que $\vec{u}(0,\ -4,\ 3)$ é um vetor normal ao plano β.

Assim, o plano β pode ser definido por uma equação do tipo $-4y+3z+d=0$.

Como este plano passa no ponto $V\left(\frac{7}{2},\ \frac{5}{2},\ 2\right)$, então, substituindo as coordenadas de V na equação $-4y+3z+d=0$:

$$-4\left(\frac{5}{2}\right)+3\times 2+d=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10+6+d=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4+d=0 \Leftrightarrow d=4$$

Portanto, uma equação cartesiana do plano β é $-4y+3z+4=0$.

5.2. A reta r é perpendicular ao plano $\propto$, pelo que os vetores diretores da reta r são colineares aos vetores normais do plano $\propto$. Assim, um vetor diretor da reta r, pode ser, $\hat{u}(0,\ -4,\ 3)$.

Por outro lado, a reta r passa pelo ponto V, portanto

$$\begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=\frac{5}{2}-4\lambda \\ z=2+3\lambda \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$$ são equação paramétricas da reta r

5.3. $W\left(\frac{7}{2},\ -\frac{5}{2},\ 2\right)$

A reta VW pode ser definida pela condição $x=\frac{7}{2}\wedge z=2$

Assim, numa condição que define o segmento de reta [VW] é, por exemplo, $x=\frac{7}{2}\wedge z=2\wedge -\frac{5}{2}\leq y\leq\frac{5}{2}$.

5.4. O volume da pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ × área da base × altura

Relativamente à pirâmide em causa, tem-se que:

- área da base é igual a 25 unidade quadradas
- a altura é igual a $\left\|\overrightarrow{VE}\right\|$, sendo E o ponto de interseção do plano $\propto$ com a reta perpendicular a este plano e que passa por V, ou seja, com a reta r.

A reta r pode ser definida pelo seguinte sistema de equações paramétricas

$$\begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=\frac{5}{2}-4\lambda \\ z=2+3\lambda \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$$ e o plano $\propto$ é definido pela equação

$$-4y+3z-11=0$$

Assim, as coordenadas do ponto E satisfazem a condição

$$\begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=\frac{5}{2}-4\lambda \\ z=2+3\lambda \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}\wedge -4y+3z-11=0$$

Tem-se que:

$$-4\left(\frac{5}{2}-4\lambda\right)+3(2+3\lambda)-11=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10+16\lambda+6+9\lambda-11=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda-15=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{15}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda=\frac{3}{5}$$

Portanto, as coordenadas do ponto E são:

$$\begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=\frac{5}{2}-4\left(\frac{3}{5}\right) \\ z=2+3\left(\frac{3}{5}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=\frac{1}{10} \\ z=\frac{19}{5} \end{cases}$$, ou seja, $E\left(\frac{7}{2},\ \frac{1}{10},\ \frac{19}{5}\right)$.

$$\left\|\overrightarrow{VE}\right\|=\|E-V\|=\left\|\left(\frac{7}{2},\ \frac{1}{10},\ \frac{19}{5}\right)-\left(\frac{7}{2},\ \frac{5}{2},\ 2\right)\right\|=$$

$$=\left\|0,\ -\frac{12}{5},\ \frac{9}{5}\right\|=\sqrt{0^2+\left(-\frac{12}{5}\right)^2+\left(\frac{9}{5}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{81}{25}}=\sqrt{\frac{225}{25}}=\sqrt{9}=3$$

Então, a medida do volume da pirâmide é igual a $\frac{1}{3}\times 25\times 3=25$.

Pág. 153

6.1. $u_n=357 \Leftrightarrow n^2+6n+5=357 \Leftrightarrow n^2+6n-352=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times(-352)}}{2} \Leftrightarrow n=\frac{-6\pm\sqrt{1444}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{-6+38}{2}\vee n=\frac{-6-38}{2} \Leftrightarrow n=16\vee n=-22$$

Como $n\in\mathbb{N}$, então n = 16.

Portanto, 357 é o termo de ordem 16 da sucessão (u_n).

6.2. **a)** Temos que $w_n = \dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{\sum_{k=0}^{n}(1+2k)}{n^2+6n+5} =$

$$= \frac{1+3+5+...+(2n-1)+(1+2n)}{n^2+6n+5} =$$

$$= \frac{\frac{1+(1+2n)}{2}\times(n+1)}{n^2+6n+5}$$

Já que as parcelas da soma do numerador são os termos de uma progressão aritmética, cujo primeiro termo é 1 e o termo de ordem n é igual a $1+2n$.

Por outro lado:

$$n^2+6n+5=0 \Leftrightarrow n = \frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-6\pm\sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-6+4}{2} \vee n = \frac{-6-4}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow n=-1 \vee n=-5$, logo, $n^2+6n+5=(n+1)(n+5)$

Assim:

$$\frac{\frac{1+(1+2n)}{2}\times(n+1)}{n^2+6n+5} = \frac{\frac{(2+2n)(n+1)}{2}}{(n+1)(n+5)} =$$

$$= \frac{\frac{2(n+1)(n+1)}{2}}{(n+1)(n+5)} = \frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+5)} = \frac{n+1}{n+5}$$

b) Recorrendo ao algoritmo da divisão:

$$\begin{array}{r|l} n+1 & n+5 \\ \hline -n-5 & 1 \\ \hline -4 & \end{array}$$

Assim, $w_n = \dfrac{n+1}{n+5} = 1 - \dfrac{4}{n+5}$.

Por outro lado:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 0<\frac{1}{n+5}\leq\frac{1}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ 0>-\frac{4}{n+5}\geq-\frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ 1>1-\frac{4}{n+5}\geq1-\frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ \frac{1}{3}\leq w_n<1$$

Como a sucessão (w_n) é minorada e majorada, então é limitada.

7.1. $\dfrac{v_n+1}{v_n} = \dfrac{6u_{n+1}+2}{6u_n+2} = \dfrac{6\left(\frac{u_n-1}{4}\right)+2}{6u_n+2} =$

$$= \frac{\frac{6u_n-6}{4}+2}{6u_n+2} = \frac{\frac{6u_n-6+8}{4}}{6u_n+2} = \frac{\frac{6u_n+2}{4}}{6u_n+2} = \frac{6u_n+2}{4(6u_n+2)} = \frac{1}{4}$$

Como $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{4}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, então (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{4}$.

7.2. O termo geral de (v_n), sendo esta uma progressão geométrica, é $v_n = v_1\times r^{n-1}$, onde v_1 é o 1.º termo e r a respetiva razão.

$$v_1 = 6u_1+2 \Leftrightarrow v_1 = 6\times\frac{1}{3}+2 \Leftrightarrow v_1 = 4$$

$$v_n = v_1\times r^{n-1} = 4\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 4\times4^{1-n} = 4^{1+1-n} = 4^{2-n}$$

Por outro lado:

$v_n = 6u_n+2$, ou seja, $\dfrac{v_n-2}{6} = u_n$ e como $v_n = 4^{2-n}$, vem que $u_n = \dfrac{4^{2-n}-2}{6}$.

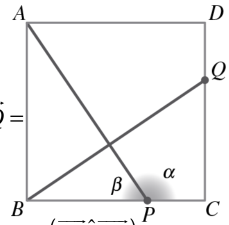
Portanto, $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = 4^{2-n}$ e $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \dfrac{4^{2-n}-2}{6}$.

7.3. $\lim u_n = \lim\dfrac{4^{2-n}-2}{6} = \lim\dfrac{4^2\times4^{-n}-2}{6} =$

$$= \lim\frac{16\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-2}{6} = \frac{16\times0-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Como o limite é um número real, então a sucessão (u_n) é convergente.

8.1. Seja $x=\overline{AB}=\overline{BC}$ e $y=\overline{BP}=\overline{CQ}$.



$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}\right) =$$

$$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ} =$$

$$= 0+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}+0 =$$

$(\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{CQ})$

$$= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{CQ}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{CQ}\right)+\left\|\overrightarrow{BP}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{BP}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}\right) =$$

$$= xy\times\cos\pi+yx\times\cos0 = -xy+xy = 0$$

Logo, como $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$, os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BQ}$ são perpendiculares

8.2. $\alpha = C\hat{P}A$; $\overline{PC} = \dfrac{1}{3}\overline{BP}$

Seja $\beta = A\hat{P}B$ e $\alpha = \pi-\beta$.

$$\tan\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BP}+\overline{PC}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BP}+\frac{1}{3}\overline{BP}}{\overline{BP}} = \frac{\frac{4}{3}\overline{BP}}{\overline{BP}} = \frac{4}{3}$$

$$1+\tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$$

$$1+\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow 1+\frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{9}{25}$$

Como β é um ângulo agudo, $\cos\beta = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$.

$$\cos\alpha = \cos(\pi-\beta) = -\cos\beta = -\frac{3}{5}$$

8.3. $H = D+\overrightarrow{DH} = D+\overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{BF} = F-B = (0,1,0)-(4,1,3) = (-4,0,-3)$

$H = D+\overrightarrow{BF} = (1,6,7)+(-4,0,-3) = (-3,6,4)$

$\overrightarrow{HB} = B-H = (4,1,3)-(-3,6,4) = (7,-5,-1)$

$HB:\ (x,y,z) = (4,1,3)+k(7,-5,-1),\ k\in\mathbb{R}$

Seja R um ponto genérico da reta HB.

Então, $R(4+7k, 1-5k, 3-k),\ k\in\mathbb{R}$

Pretendemos determinar $k\in\mathbb{R}$ de modo que o ponto R pertença ao plano xOy, isto é, ao plano de equação $z=0$.

Nas coordenadas de *R* temos $z = 3 - k$.

Logo, $3 - k = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

Substituindo *k* por 3 nas coordenadas de *R*, obtemos $\left(4 + 7\times 3, 1 - 5\times 3, 3 - 3\right) = \left(25, -14, 0\right)$.

O ponto de interseção da reta *BH* com o plano *xOy* tem coordenadas $\left(25, -14, 0\right)$.

Pág. 154

9.1. $x^2 + x - 6 = x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 =$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} =$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left[\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2}\right]\left[\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}\right] =$$

$$= \left(x - 2\right)\left(x + 3\right)$$

Para decompor em fatores o polinómio $x^3 - 4x^2 + x + 6$, vamos recorrer à regra de Ruffini (experimenta-se os divisores do termo independente).

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & & 2 & -4 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

Portanto, $x^3 - 4x^2 + x + 6 = \left(x - 2\right)\left(x^2 - 2x - 3\right) =$

$$= \left(x - 2\right)\left(x^2 - 2x + 1 - 1 - 3\right) =$$

$$= \left(x - 2\right)\left[\left(x - 1\right)^2 - 4\right] =$$

$$= \left(x - 2\right)\left[\left(x - 1\right) - 2\right]\left[\left(x - 1\right) + 2\right] =$$

$$= \left(x - 2\right)\left(x - 3\right)\left(x + 1\right)$$

$$f\left(x\right) = \frac{\left(x - 2\right)\left(x - 3\right)\left(x + 1\right)}{\left(x - 2\right)\left(x + 3\right)} = \frac{\left(x - 3\right)\left(x + 1\right)}{x + 3} \wedge x \neq 2$$

Construindo um quadro de sinais para estudar o sinal da função f:

	$-\infty$	-3		-1		2		3	$+\infty$
$x - 3$	–	–	–	–	–	–	–	0	+
$x + 1$	–	–	–	0	+	+	+	+	+
$x + 3$	–	0	+	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	–	n.d.	+	0	–	n.d.	–	0	+

Temos, então, que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\ ,\ 2\}$.

Zeros de f: –1 e 3

$f\left(x\right) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-3\ ,\ -1\right[\cup \left]3\ ,\ +\infty\right[$

$f\left(x\right) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ,\ -3\right[\cup \left]-1\ ,\ 2\right[\cup \left]2\ ,\ 3\right[$

9.2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\ ,\ 2\}$

• Assíntotas verticais

$$\lim_{x \to -3^+} f\left(x\right) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 + x - 6} = \frac{-60}{0^+} = +\infty$$

Logo, a reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

$$\lim_{x \to 2^+} f\left(x\right) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 + x - 6}^{\left(\frac{0}{0}\right)} =$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\left(x - 2\right)\left(x - 3\right)\left(x + 1\right)}{\left(x - 2\right)\left(x + 3\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{\left(x - 3\right)\left(x + 1\right)}{x + 3} = \frac{\left(2 - 3\right)\left(2 + 1\right)}{2 + 3} = -\frac{3}{5}$$

Por outro lado, $\lim\limits_{x \to 2^-} f\left(x\right) = -\frac{3}{5}$.

Como nenhum destes dois limites é infinito, a reta de equação $x = 2$ não é assíntota vertical do gráfico de f.

• Assíntotas não verticais

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f\left(x\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 + x - 6}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^3 + x^2 - 6x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x}\right)} = \frac{1 - 0 + 0 + 0}{1 + 0 - 0} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f\left(x\right) - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 + x - 6} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6 - x\left(x^2 + x - 6\right)}{x^2 + x - 6} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6 - x^3 - x^2 + 6x}{x^2 + x - 6} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-5x^2 + 7x + 6}{x^2 + x - 6} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(-5 + \frac{7}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)} = \frac{-5 + 0 + 0}{1 + 0 - 1} = -5$$

Logo, a reta de equação $y = x - 5$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

De modo análogo se mostra que a reta de equação $y = x - 5$, também é, assíntota do gráfico de f em $-\infty$.

Portanto, as equações das assíntotas do gráfico da função f são: $x = -3$ e $y = x - 5$

9.3. Determinemos a expressão da função derivada da função *f*.

$$f'\left(x\right) = \left(\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 + x - 6}\right)' = \left(\frac{\left(x - 3\right)\left(x + 1\right)}{x + 3}\right)' =$$

$$= \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 3}\right)' =$$

$$= \frac{\left(2x - 2\right)\left(x + 3\right) - \left(x^2 - 2x - 3\right)\times 1}{\left(x + 3\right)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 6x - 2x - 6 - x^2 + 2x + 3}{\left(x + 3\right)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 6x - 3}{\left(x + 3\right)^2}$$

Assim, $f'\left(1\right) == \frac{2^2 + 6\times 1 - 3}{\left(1 + 3\right)^2} = \frac{1}{4}$

Logo, o declive da reta *s* é igual a $\frac{1}{4}$ e como esta passa pelo ponde de coordenadas $(1\ ,\ f(1))$:

$f(1)=\dfrac{1-4\times1+1+6}{1+1-6}=\dfrac{4}{-4}=-1$

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y-(-1)=\dfrac{1}{4}(x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4}-1\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$

Portanto, a equação reduzida da reta s é $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$.

10. Ao gráfico 1 corresponde o valor $r_3=0,92$ visto que a associação linear entre as variáveis é positiva. Ao gráfico 2 corresponde o valor $r_1=-0,28$ e ao gráfico 3 corresponde o valor $r_2=-0,75$, pois ambos apresentam uma associação linear entre as variáveis negativa. No entanto, a associação do gráfico 3 é mais forte que a associação do gráfico 2.

11.1. $A(-4\ ,\ 0)$ e $P(\cos x\ ,\ \sin x)$

$\overline{AP}=\sqrt{(-4-\cos x)^2+(0-\sin x)^2}=$

$=\sqrt{16+8\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}=$

$=\sqrt{16+8\cos x+1}=\sqrt{17+8\cos x}$

Portanto, $d(x)=\sqrt{17+8\cos x}$.

11.2. $d(0)=\sqrt{17+8\cos 0}=\sqrt{17+8}=5$

$d(\pi)=\sqrt{17+8\cos\pi}=\sqrt{17-8}=3$

$d(0)\neq\dfrac{3}{5}d(\pi)$, pelo que a proposição p é falsa.

11.3. $d(x)=\sqrt{13}\Leftrightarrow\sqrt{17+8\cos x}=\sqrt{13}\Leftrightarrow 17+8\cos x=13\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8\cos x=13-17\Leftrightarrow\cos x=-\dfrac{1}{2}$

Como x pertence ao intervalo $\left]\pi\ ,\ \dfrac{3\pi}{2}\right[$, então $x=\pi+\dfrac{\pi}{3}$,

ou seja, $x=\dfrac{4\pi}{3}$ rad.

Pág. 155

12. Sejam S, C e B as amplitudes, em graus, dos ângulos ASB, BCA e SBC, respetivamente (C é o centro da Terra).

Comprimento do arco AB = raio da Terra × $B\widehat{C}A$, em radianos.

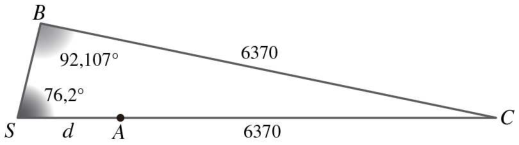
$1300=6370\times B\widehat{C}A$

$B\widehat{C}A=\dfrac{1300}{6370}\text{rad}\Leftrightarrow B\widehat{C}A=\dfrac{10}{49}\text{rad}$

π rad	——	180°
$\dfrac{10}{49}$ rad	——	C

$C=\dfrac{\frac{10}{49}\times180}{\pi}$; $C\approx 11,6930°$

$B\approx 180°-76,2°-11,693°\approx 92,107°$



Pela lei dos senos:

$\dfrac{\sin 92,107°}{d+6370}=\dfrac{\sin 76,2°}{6370}\Leftrightarrow d=\dfrac{6370\times\sin 92,107°}{\sin 76,2°}-6370\Rightarrow$

$\Rightarrow d\approx 184,9$

A distância do satélite ao ponto A é aproximadamente igual a 184,9 km.

13.1. Seja m o declive da reta t e m' o declive da reta r.

$m=\tan(120°)=\tan(180°-60°)=-\tan 60°=-\sqrt{3}$

Dado que as retas t e r são perpendiculares:

$m\times m'=-1$, ou seja, $-\sqrt{3}\times m'=-1\Leftrightarrow m'=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow m'=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Assim, a equação reduzida da reta r é da forma

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+b,\ b\in\mathbb{R}$.

Por outro lado, sabemos que o ponto $A(6\ ,\ 0)$ pertence à reta r, pelo que:

$0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times6+b\Leftrightarrow 0=2\sqrt{3}+b\Leftrightarrow b=-2\sqrt{3}$

Logo, a equação reduzida da reta r é $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-2\sqrt{3}$.

13.2. O ponto C tem abcissa 3 e a reta r passa por C:

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times3-2\sqrt{3}\Leftrightarrow y=\sqrt{3}-2\sqrt{3}\Leftrightarrow y=-\sqrt{3}$

Assim: $C\left(3\ ,\ -\sqrt{3}\right)$

A equação reduzida da reta t é da forma:

$y=-\sqrt{3}x+b',\ b'\in\mathbb{R}$

Como esta reta passa pelo ponto $C\left(3\ ,\ -\sqrt{3}\right)$:

$-\sqrt{3}=-\sqrt{3}\times3+b'\Leftrightarrow-\sqrt{3}+3\sqrt{3}=b'\Leftrightarrow b'=2\sqrt{3}$

Logo, a equação reduzida da reta t é $y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$.

Por outro lado, temos que B pertence ao eixo Ox e à reta t:

$0=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}x=2\sqrt{3}\Leftrightarrow x=2$

Portanto, a abcissa do ponto B é 2.

13.3. A circunferência representada neste referencial tem centro $C\left(3\ ,\ -\sqrt{3}\right)$ e passa pelo ponto $B(2\ ,\ 0)$.

Seja r o raio desta circunferência, então:

$r=d(B,\ C)=\sqrt{(3-2)^2+\left(-\sqrt{3}-0\right)^2}=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=$

$=\sqrt{4}=2$

Logo, a região sombreada da figura pode ser definida pela condição:

$(x-3)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2\leq 4\wedge y\geq 0$

13.4. $A(6\ ,\ 0)$ e $C\left(3\ ,\ -\sqrt{3}\right)$, pelo que $M\left(\dfrac{6+3}{2}\ ,\ \dfrac{0-\sqrt{3}}{2}\right)$, ou seja, $M\left(\dfrac{9}{2}\ ,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Por outro lado:

$\overrightarrow{AC}=C-A=\left(3,\ -\sqrt{3}\right)-(6,\ 0)=\left(-3,\ -\sqrt{3}\right)$

$\overrightarrow{MP}=P-M=(x,\ y)-\left(\dfrac{9}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(x-\dfrac{9}{2},\ y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Então:

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MP} = 0 \Leftrightarrow \left(-3,\ -\sqrt{3}\right) \times \left(x - \frac{9}{2},\ y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\left(x - \frac{9}{2}\right) - \sqrt{3}\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x + \frac{27}{2} - \sqrt{3}y - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x - \sqrt{3}y + 12 = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}y = 3x - 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{\sqrt{3}}x + \frac{12}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$$

O lugar geométrico é a mediatriz do segmento de reta $[AC]$ de equação $y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$.

Pág. 156

14.1. A área lateral do prisma é igual a 96 unidades quadradas, pelo que:

$$96 = 3 \times \text{Área}_{[ABDE]} \Leftrightarrow \frac{96}{3} = \overline{AB} \times \overline{BE} = 32$$

Como $\overline{AB} = 8$, então $8 \times \overline{BE} = 32 \Leftrightarrow \overline{BE} = 4$.

Por outro lado, sabemos que o prisma é triangular regular, portanto as suas bases são triângulos equiláteros, donde $\overline{BC} = \overline{EB} = \overline{EC} = 4$.

Logo, o ponto E tem abcissa 2 , ordenada 8 e cota igual à medida da altura do triângulo $[BCE]$.

Sendo M o ponto médio de $[BC]$:

$$\overline{EB}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{ME}^2 \Leftrightarrow 4^2 = 2^2 + \overline{ME}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 = 4 + \overline{ME}^2 \Leftrightarrow \overline{ME}^2 = 12$$

Como $\overline{ME} > 0$, então $\overline{ME} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Portanto, $E\left(2\ ,\ 8\ ,\ 2\sqrt{3}\right)$.

14.2. Seja A o ponto de interseção do eixo Ox com o plano α: $x + y + z + 3 = 0$.

$$\begin{cases} x + 8 + z + 3 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$A(3,0,0)$

Assim, $(3,0,0)$ são as coordenadas de um ponto da reta r e $\vec{r}(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$ é um vetor diretor desta reta dado que é perpendicular a α.

Logo, $(x,\ y,\ z) = (3,\ 0,\ 0) + \lambda(1,\ 1,\ 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta r .

14.3. $A(4, 0, 0)$, $C(0, 8, 0)$ e $E\left(2,\ 8,\ 2\sqrt{3}\right)$

$$\overrightarrow{EA} = A - E = (4,\ 0,\ 0) - \left(2,\ 8,\ 2\sqrt{3}\right) = \left(2,\ -8,\ -2\sqrt{3}\right)$$

$$\overrightarrow{EC} = C - E = (0,\ 8,\ 0) - \left(2,\ 8,\ 2\sqrt{3}\right) = \left(-2,\ 0,\ -2\sqrt{3}\right)$$

$$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC} = \left(2,\ -8,\ -2\sqrt{3}\right) \cdot \left(-2,\ 0,\ -2\sqrt{3}\right) =$$

$$= 2 \times (-2) + (-8) \times 0 + \left(-2\sqrt{3}\right) \times \left(-2\sqrt{3}\right) = 8$$

$$\left\|\overrightarrow{EA}\right\| = \sqrt{2^2 + (-8)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 64 + 12} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$\left\|\overrightarrow{EC}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\cos\left(A\hat{E}C\right) = \frac{\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC}}{\left\|\overrightarrow{EA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{EC}\right\|} = \frac{8}{4\sqrt{4} \times 4} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

Utilizando, agora, a fórmula fundamental da trigonometria: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, isto é,

$$\sin^2(\alpha) + \left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{5}{100} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{20} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{19}{20}$$

Portanto, $\sin^2\alpha = \frac{19}{20}$.

15.1. Sabemos que $u_7 = u_1 + 6r$, ou seja:

$$u_7 = u_1 + 6 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_7 = u_1 + 3$$

Por outro lado, $u_{19} = u_1 + 18r$, ou seja:

$$u_{19} = u_1 + 18 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_{19} = u_1 + 9$$

Logo, $v_2 = u_1 + 3$ e $v_3 = u_1 + 9$.

Como (v_n) é uma progressão geométrica e $v_1,\ v_2$ e v_3 são termos consecutivos, então as razões $\frac{v_3}{v_2}$ e $\frac{v_2}{v_1}$ são iguais à razão da progressão geométrica (v_n) . Igualando as razões, obtemos:

$$\frac{v_3}{v_2} = \frac{v_2}{v_1} \Leftrightarrow \frac{u_1 + 9}{u_1 + 3} = \frac{u_1 + 3}{u_1} \Leftrightarrow (u_1 + 9) \times u_1 = (u_1 + 3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1^2 + 9u_1 = u_1^2 + 6u_1 + 9 \Leftrightarrow 9u_1 = 6u_1 + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9u_1 - 6u_1 = 9 \Leftrightarrow 3u_1 = 9 \Leftrightarrow u_1 = 3$$

Portanto, $v_1 = 3,\ v_2 = 3 + 3 = 6$ e $v_3 = 3 + 9 = 12$.

Logo, $v_1 + v_2 + v_2 = 3 + 6 + 12 = 21$.

15.2. A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ cujo primeiro termo é $u_1 = 3$.

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r = 3 + (n-1) \times \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$$

$$u_n = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}n$$

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = \frac{3 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}n}{2} \times n$$

Determinemos uma expressão do termo geral de (u_n) .

Como $S_n = 1533$ temos:

$$1533 = \frac{3 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}n}{2} \times n \Leftrightarrow 1533 = \frac{\frac{11}{2} + \frac{1}{2}n}{2} \times n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1533 = \frac{11}{4}n + \frac{1}{4}n^2 \Leftrightarrow n^2 + 11n - 6132 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \times (-6132)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 73 \vee n = -84$$

Como $n \in \mathbb{N}$, então $n = 73$.

16.1. Para $n = 1$, $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$, o que é verdadeiro.

Por outro lado, temos que:
Se a propriedade é verdadeira para um dado $n \in \mathbb{N}$ então deve ser verdadeira para $n + 1$.
Assim, a hipótese de indução é:

$$1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Pretendemos mostrar que:

$$1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)(n+1)^2=$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4(n+1)(n+1)^2}{4}=$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)(n+1)^2}{4}=$$

$$=\frac{(n+1)^2\left[n^2+4(n+1)\right]}{4}=$$

$$=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=$$

$$=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Portanto, se a propriedade é verdadeira para $n = 1$ e é hereditária então é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

16.2. Utilizando a propriedade anterior, temos que:

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}=741\ 321$$

$$n^2(n+1)^2=4\times 741\ 321 \Leftrightarrow \left[n(n+1)\right]^2=2\ 965\ 284 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n^2+n)^2=2\ 965\ 284 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+n=-\sqrt{2\ 965\ 284} \vee n^2+n=\sqrt{2\ 965\ 284}$$

Como $n\in\mathbb{N}$, então $n^2+n>0$, pelo que:

$$n^2+n=\sqrt{2\ 965\ 284} \Leftrightarrow n^2+n=1722 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+n-1722=0 \Leftrightarrow n=\frac{-1\pm\sqrt{6889}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{-1\pm\sqrt{6889}}{2} \Leftrightarrow n=\frac{-1+83}{2} \vee n=\frac{-1-83}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=41 \vee n=-42$$

Como $n\in\mathbb{N}$, então $n = 41$.

17.1. a) Seja δ um número real positivo qualquer.

$$|u_n|<\delta \Leftrightarrow \left|\frac{2}{n+5}\right|<\delta \Leftrightarrow \frac{2}{n+5}<\delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2<n\delta+5\delta \Leftrightarrow n>\frac{2-5\delta}{\delta}$$

Sendo p um número natural maior ou igual $\frac{2-5\delta}{\delta}$,

$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq p \Rightarrow |u_n|<\delta$

Logo, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

b) Seja L um número real positivo qualquer

$$v_n<-L \Leftrightarrow 2-3n<-L \Leftrightarrow -3n<-L-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n>\frac{L+2}{3}$$

Sendo p um número natural maior ou igual $\frac{L+2}{3}$:

$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq p \Rightarrow u_n<-L$

Portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$.

Pág. 157

17.2. a) $u_n\times v_n=\frac{2}{n+5}\times(2-3n)=\frac{4-6n}{n+5}$

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-6n}{n+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6n}{n}=-6$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=-6$, pelo que a proposição p é falsa.

b) Estudemos o sinal de $w_{n+1}-w_n$:

$$w_n=u_n\times v_n=\frac{4-6n}{n+5}$$

$$w_{n+1}-w_n=\frac{4-6(n+1)}{n+1+5}-\frac{4-6n}{n+5}=$$

$$=\frac{4-6n-6}{n+6}-\frac{4-6n}{n+5}=\frac{-6n-2}{n+6}-\frac{4-6n}{n+5}=$$

$$=\frac{(-6n-2)(n+5)-(4-6n)(n+6)}{(n+6)(n+5)}=$$

$$=\frac{-6n^2-30n-2n-10-4n-24+6n^2+36n}{(n+6)(n+5)}=$$

$$=\frac{-34}{(n+6)(n+5)}<0, \forall n\in\mathbb{N}$$

$\forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+1}-w_n<0$, ou seja, a sucessão (w_n) é decrescente.

A proposição q é falsa.

c) Utilizando o algoritmo da divisão:

$$\begin{array}{r|l} -6n+4 & n+5 \\ \cline{2-2} \underline{6n+30} & -6 \\ 34 & \end{array}$$

Portanto, $w_n=-6+\frac{34}{n+5}$

Por outro lado:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 0<\frac{1}{n+5}\leq\frac{1}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ 0<\frac{34}{n+5}\leq\frac{34}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ -6<-6+\frac{34}{n+5}\leq -6+\frac{17}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ -6<-6+\frac{34}{n+5}\leq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ -6<w_n\leq -\frac{1}{3}$$

Logo, a proposição r é verdadeira.

18.1. Visto que a reta de equação $x = 2$ é uma assíntota vertical do gráfico de f, temos:

$c\times 2-4=0 \Leftrightarrow c=2$

Como a reta de equação $y = 1$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ e em $-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{a}{c} = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{a}{c} = 1$.

Como $a = 2$ temos $\dfrac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = 2$.

Como $f(0) = \dfrac{1}{2}$, temos que $\dfrac{2\times 0 + b}{2\times 0 - 4} = \dfrac{1}{2}$, ou seja, $b = -2$.

Portanto, $a = 2$, $b = -2$ e $c = 2$.

18.2. O ponto B é o único ponto do gráfico de f que tem ordenada igual a zero. Assim:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-2}{2x-4} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \wedge 2x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Logo, o ponto B tem coordenadas (1 , 0).

18.3. $A\left(0\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $B(1\ ,\ 0)$, $C(2\ ,\ 1)$ e $D(0\ ,\ 1)$

$$\text{Área}_{[ABCD]} = \text{Área}_{[OBCD]} - \text{Área}_{[AOB]}$$

$$\text{Área}_{[ABCD]} = \frac{\overline{OB} + \overline{DC}}{2} \times \overline{OD} - \frac{\overline{OB}\times\overline{OA}}{2} =$$

$$\frac{1+2}{2}\times 1 - \frac{1\times\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Então, a área do quadrilátero é igual a $\dfrac{5}{4}$.

19.1. a) $$\frac{a(4) - a(0)}{4 - 0} = \frac{\left(-4{,}9\times 4^2 + 58{,}8\times 4 + 2{,}4\right) - 2{,}4}{4} =$$

$$= \frac{-4{,}9\times 4^2 + 58{,}8\times 4}{4} = \frac{156{,}8}{4} = 39{,}2$$

Portanto, a velocidade média nos quatro primeiros segundos foi de 39,2 m/s.

b) $a'(t) = \left(-4{,}9t^2 + 58{,}8t + 2{,}4\right) = -9{,}8t + 58{,}8$

Então, $a'(5) = -9{,}8\times 5 + 58{,}8 = 9{,}8$.

A velocidade no instante $t = 5$ foi de 9,8 m/s.

19.2. $a'(t) = 0 \Leftrightarrow -9{,}8t + 58{,}8 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{58{,}8}{9{,}8} \Leftrightarrow t = 6$

A altura máxima foi atingida quando a velocidade foi nula, ou seja, no instante $t = 6$ segundos.

$a(6) = -4{,}9\times 6^2 + 58{,}8\times 6 + 2{,}4 = 178{,}8$

A altura máximo foi atingida foi $178{,}8$ m .

Pág. 158

20.1. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ existe quando $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = f(4)$

Temos que $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = f(4)$.

$$f(4) = \frac{2\times 4 + 7}{\sqrt{4^2 + 9}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{4x^2 - 17x + 4}{x^2 - 3x - 4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

	4	−17	4
4		16	−4
	4	−1	0

$$= \lim_{x\to 4^+} \frac{(x-4)(4x-1)}{(x-4)(x+1)} =$$

	1	−3	−4
4		4	4
	1	1	0

$$= \frac{15}{5} = 3$$

Como $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$, existe $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ e é igual a 3.

20.2. $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+9}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+7}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{8}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+7}{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+7}{-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2+\frac{7}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{7}{x}}{-\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} = \frac{2+0}{-\sqrt{1+0}} = -2$$

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$, então, $y = -2$ é a equação pedida.

20.3. $x = 5$ pertence ao intervalo $]4\ ,\ +\infty[$.

Assim, para $x > 4$, $f'(x) = \left(\dfrac{4x^2 - 17x + 4}{x^2 - 3x - 4}\right)'$, ou seja:

$$f'(x) = \frac{\left(4x^2 - 17x + 4\right)'\left(x^2 - 2x - 4\right) - \left(4x^2 - 17x + 4\right)\left(x^2 - 3x - 4\right)'}{\left(x^2 - 3x - 4\right)^2}$$

$$= \frac{(8x - 17)\left(x^2 - 3x - 4\right) - \left(4x^2 - 17x + 4\right)(2x - 3)}{\left(x^2 - 3x - 4\right)^2} =$$

$$= \frac{5x^2 - 40x + 80}{\left(x^2 - 3x - 4\right)^2}$$

A equação reduzida da reta t pode ser obtida a partir da seguintes equação:

$$y - f(5) = f'(5)(x - 5)$$

Determinemos $f(5)$ e $f'(5)$:

$$f(5) = \frac{4\times 5^2 - 17\times 5 + 4}{5^2 - 3\times 5 - 4} = \frac{19}{6}$$

$$f'(5) = \frac{5\times 5^2 \times 40\times 5 + 80}{\left(5^2 - 3\times 5 - 4\right)^2} = \frac{5}{36}$$

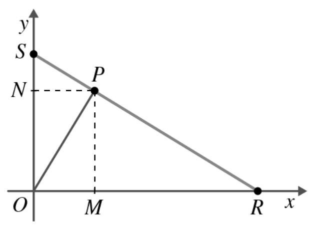
Assim:

$$y - \frac{19}{6} = \frac{5}{36}(x - 5) \Leftrightarrow y = \frac{5}{36}x - \frac{25}{36} + \frac{19}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5}{36}x + \frac{89}{36}$$

Portanto, a equação da reta t , tangente a gráfico de f, no ponto de abcissa $x = 5$ é $y = \dfrac{5}{36}x + \dfrac{89}{36}$.

21.



Os triângulos [ORP] e [OMN] são semelhantes (são triângulos retângulos com um ângulo agudo comum)

$$\frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OR}}{1} = \frac{1}{u} \Leftrightarrow \overline{OR} = \frac{1}{u}$$

De igual modo, os triângulos [*OPS*] e [*OPN*] são semelhantes.

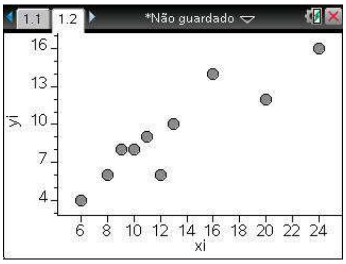
Logo:

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{OP}}{\overline{ON}}\Leftrightarrow\frac{\overline{OS}}{1}=\frac{1}{v}\Leftrightarrow\overline{OS}=\frac{1}{v}$$

Portanto, *R* tem abcissa $\frac{1}{u}$ e *S* tem ordenada $\frac{1}{v}$.

Pág. 159

22.1.



22.2. (i) Seja x a variável correspondente ao número de horas consecutivas sem dormir e y a variável correspondente ao número de erros cometidos, então:

$$\overline{x}=\frac{129}{10}=12{,}9 \quad \text{e} \quad \overline{y}=\frac{93}{10}=9{,}3$$

(ii) $SS_x=\sum_{i=1}^{10}\left(x_i-12{,}9\right)^2=282{,}9$

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{9}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{SS_x}=\frac{1373-1199{,}7}{282{,}9}\approx 0{,}6$$

(iii) $b=\overline{y}-a\overline{x}=9{,}3-\frac{173{,}3}{282{,}9}\times 12{,}9\approx 1{,}4$

Portanto, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y=0{,}6x+1{,}4$.

22.3. Se x = 18, então $y=0{,}6\times 18+1{,}4=12{,}2$.

Assim, espera-se que esse indivíduo cometa, aproximadamente, 12 erros.

23.1. f é contínua em x = 0 quando o limite $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ existe e por sua vez $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ existe quando

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$.

Assim:

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2+\cos x)=2+\cos(0)=2+1=3$, logo $f(0)=3$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{5x+3}{x+1}=\frac{5\times 0+3}{0+1}=3$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$, então f é contínua em x = 0.

23.2. A ordenada do ponto P é o mínimo da função definida por $2+\cos x$.

A abcissa do ponto P é o maior dos minimizantes negativos da mesma função.

$\forall x\in\mathbb{R},\ -1\leq\cos x\leq 1\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ -1+2\leq 2+\cos x\leq 1+2$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ 1\leq 2+\cos x\leq 3$

Então, $2+\cos x=1\Leftrightarrow\cos x=-1$ e o maior número negativo tal que $\cos x=-1$ é $-\pi$, portanto, $P(-\pi\ ,\ 1)$.

23.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+3}{x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x}{x}=5$, logo, a reta r tem equação y = 5.

Determinemos, agora, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa x = 1.

- $f(1)=\frac{5\times 1+3}{1+1}=4$
- $f'(x)$ para x > 0 é:

$$f'(x)=\left(\frac{5x+3}{x+1}\right)'=\frac{(5x+3)'(x+1)-(5x+3)(x+1)'}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{5(x+1)-(5x+3)\times 1}{(x+1)^2}=\frac{5x+5-5x-3}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

Logo, $f'(1)=\frac{2}{(1+1)^2}=\frac{1}{2}$

Assim:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-4=\frac{1}{2}(x-1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+4\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

Logo, $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa x = 1.

Determinemos a interseção desta reta com a reta *r*.

$$\begin{cases}y=5\\ y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5\\ \frac{1}{2}x+\frac{7}{2}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5\\ x+7=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5\\ x=3\end{cases}$$

Portanto, $Q(3\ ,\ 5)$

Pág. 160

24.1. Tem-se que $f(0)=-2$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$.

$$\begin{cases}f(0)=-2\\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b\cos^2(0)=-2\\ a+b\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b\times 1=-2\\ a+b\times 0=3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3+b=-2\\ a=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-5\\ a=3\end{cases}$$

Portanto, *a* = 3 e *b* = –5.

24.2. $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ e como $\tan\alpha=\frac{1}{3}$:

$$1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\frac{10}{9}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{9}{10}$$

Assim:

$$f(\alpha)=3-5\cos^2\alpha=3-5\times\frac{9}{10}=3-\frac{9}{2}=-\frac{3}{2}$$

Então, $f(\alpha)=-\frac{3}{2}$

25.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[ax+b+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x}-(ax+b)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Logo, a reta de equação $y=ax+b$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

25.2. A função f é contínua em $x = 0$ quando existe $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ e por sua vez este limite existe quando:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)$$

$$=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(ax+b+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0^+}(ax+b)+=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x}$$

$$==b+\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\qquad(\text{de } \mathbf{25.1.})$$

$$=b+1$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)=b+1$$

Por outro lado:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}\sin(2x)=\sin(2\times0)=\sin0=0$$

$b + 1 = 0$, ou seja, $b = -1$

26.1. Temos que $f(x)=\dfrac{2x^2+4}{x}$, ou seja, $f(x)=2x+\dfrac{4}{x}$, pelo que $f'(x)=\left(2x+\dfrac{4}{x}\right)'=2-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{2x^2-4}{x^2}$

Determinemos os zeros de f':

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x^2-4}{x^2}=0\Leftrightarrow2x^2-4=0\wedge x^2\neq0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=2\wedge x^2\neq0\Leftrightarrow\left(x=-\sqrt{2}\vee x=\sqrt{2}\right)\wedge x\neq0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}\vee x=\sqrt{2}$$

Construindo um quadro de sinais:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
f'	+	0	–	n.d.	–	0	+
f	↗		↘	n.d.	↘		↗
		Máx.				Mín.	

Assim:

- intervalos de monotonia:

  f é crescente em $\left]-\infty\,,\ -\sqrt{2}\right[$ e em $\left[\sqrt{2}\,,\ +\infty\right[$

  f é decrescente em $\left[-\sqrt{2}\,,\ 0\right[$ e em $\left]0\,,\ \sqrt{2}\right]$

- extremos relativos:

  $f\left(-\sqrt{2}\right)$ é um máximo relativo, pelo que f tem um máximo para $x=-\sqrt{2}$

  $f\left(\sqrt{2}\right)$ é um mínimo relativo, pelo que f tem um mínimo para $x=\sqrt{2}$

26.2. Tem-se que $f'(x)=2-\dfrac{4}{x^2}$.

A equação $y-f(-2)=f'(-2)(x+2)$ é uma equação da reta tangente pedida.

$$f(-2)=\frac{2(-2)^2+4}{-2}=-6\quad\text{e}\quad f'(-2)=2-\frac{4}{(-2)^2}=1$$

$$y-(-6)=1(x+2)\Leftrightarrow y+6=x+2\Leftrightarrow y=x+2-6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=x-4$$

Portanto, $y=x-4$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = -2$.

26.3. **a)** Temos que:

$$(f\circ g)'(a)=g'(a)\times f'(g(a))=$$

$$=5\times f'(2)=5\times\left[2-\frac{4}{2^2}\right]=$$

$$=5\times(2-1)=5$$

b) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)\times g(a)-f(a)\times g'(a)}{\left[g(a)\right]^2}=$$

$$=\frac{f'(a)\times2-f(a)\times5}{2^2}=$$

$$=\frac{2f'(a)-5f(a)}{4}$$

Pág. 161

27.1. A área de uma das bases do primas é igual a x^2, pelo que, a área das duas bases do prisma é igual a $2x^2$.

Por outro lado, temos que o volume do prisma é igual a 10 litros, portanto, a sua altura é igual a $\dfrac{10}{x^2}$ decímetros.

Logo, a área de uma face lateral do prisma é igual $x\times\dfrac{10}{x^2}=\dfrac{10}{x}$ e, sendo assim, a área lateral do prisma é igual a $4\times\dfrac{10}{x}=\dfrac{40}{x}$. Então, $A(x)=2x^2+\dfrac{40}{x}=\dfrac{2x^3+40}{x}$.

27.2. Determinemos a expressão da equação derivada da função A.

$$A'(x)=\left(\frac{2x^3+40}{x}\right)'=\frac{\left(2x^3+40\right)'x\times\left(2x^3+40\right)x'}{x^2}=$$

$$=\frac{6x^2\times x-\left(2x^3+40\right)\times1}{x^2}=\frac{6x^3-2x^3-40}{x^2}=$$

$$=\frac{4x^3-40}{x^2}$$

Determinemos, agora, os zeros de A'

$$A'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4x^3-40}{x^2}=0\Leftrightarrow4x^3-40=0\wedge x^2\neq0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3=10\wedge x\neq0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{10}\wedge x\neq0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{10}$$

Construindo um quadro de sinais, temos:

x	0		$\sqrt[3]{10}$	$+\infty$
A'	n.d.	–	0	+
A	n.d.	↘		↗
			Mín.	

Assim, o valor de x para o qual a área total do recipiente é mínima é igual a $\sqrt[3]{10}$.

28.1. Sabemos que a aresta da base tem a mesma medida do comprimento que a altura da pirâmide.

Seja a essa medida, então $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}=\overline{OV}=a$

Deste modo:

$A\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2},\ 0\right)$, $C\left(-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2},\ 0\right)$ e $V(0,\ 0,\ a)$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=\left(-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2},\ 0\right)-\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2},\ 0\right)=(-a,\ a,\ 0)=a(-1,\ 1,\ 0)$$

$$\overrightarrow{CV}=V-C=(0,\ 0,\ a)-\left(-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2},\ 0\right)=\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2},\ a\right)==a\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1\right)$$

Sendo $\vec{u}(-1,\ 1,\ 0)$ e $\vec{v}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1\right)$ temos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares com $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CV}$, respetivamente. Logo,

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{CV}}\right)=\left(\vec{u}\ \hat{,}\ \vec{v}\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1,\ 1,\ 0)\cdot\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$$

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{u}\ ,\ \vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\widehat{\vec{u}\ ,\ \vec{v}}\right)=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\approx 125{,}3^{\text{o}}$$

Portanto, $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{CV}}\right)=\left(\widehat{\vec{u}\ ,\ \vec{v}}\right)\approx 125{,}3°$

28.2. a) Volume da pirâmide [*ABCDV*]: $\frac{\overline{AB}^2\times\overline{OV}}{3}$, mas

$\overline{AB}=\overline{OV}$ e o volume é igual a 243 unidades cúbicas.

$$243=\frac{\overline{AB}^2\times\overline{AB}}{3}\Leftrightarrow 243\times 3=\overline{AB}^3\Leftrightarrow\overline{AB}^3=729\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\overline{AB}=\sqrt[3]{729}\Leftrightarrow\overline{AB}=9$$

Logo, $B\left(\frac{9}{2},\ \frac{9}{2},\ 0\right)$ e $V(0,\ 0,\ 9)$.

$\overrightarrow{BV}$ é um vetor diretor da reta BV .

$$\overrightarrow{BV}=V-B=(0,\ 0,\ 9)-\left(\frac{9}{2},\ \frac{9}{2},\ 0\right)=\left(-\frac{9}{2},\ -\frac{9}{2},\ 9\right)$$

A reta BV passa pelo ponto V.

Portanto:

$$\begin{cases}x=-\frac{9}{2}\lambda\\ y=-\frac{9}{2}\lambda\\ z=9+9\lambda\end{cases}$$, $\lambda\in\mathbb{R}$ são equações paramétricas da reta *BV*.

b) $B\left(\frac{9}{2},\frac{9}{2},0\right)$, $C\left(-\frac{9}{2},\frac{9}{2},0\right)$ e $V(0,0,9)$

Os vetores $\overrightarrow{BV}$ e $\overrightarrow{BC}$ são vetores diretores do plano *BVC*.

$$\overrightarrow{BV}\left(-\frac{9}{2},-\frac{9}{2},9\right)$$

$$\overrightarrow{BC}=C-B=\left(-\frac{9}{2},\frac{9}{2},0\right)-\left(\frac{9}{2},\frac{9}{2},0\right)=(-9,0,0)$$

Seja $\vec{n}(a,b,c)$ um vetor normal ao plano *BCV*. Então:

$\overrightarrow{BV}\perp\vec{n}$ e $\overrightarrow{BC}\perp\vec{n}$, pelo que,

$$\begin{cases}\overrightarrow{BV}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(-\frac{9}{2},-\frac{9}{2},9\right)\cdot(a,b,c)=0\\ (-9,0,0)\cdot(a,b,c)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{9}{2}a-\frac{9}{2}b+9c=0\\ -9a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{9}{2}b+9c=0\\ a=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{9}{2}b=-9c\\ a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2c\\ a=0\end{cases}$$

Assim, $\vec{n}(0,2c,c)$, $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, é a família de vetores normais ao plano *BCV*. Por exemplo, para $c=1$, $\vec{n}(0,2,1)$ é um vetor normal ao plano *BVC* e como este plano passa em *V*, temos que uma equação que o define é:

$$0(x-0)+2(y-0)+1(z-9)=0\Leftrightarrow 2y+z-9=0$$

Portanto, $2y+z-9=0$ é uma equação do plano *BCV*.

Pág. 162

29.1. Se $\lim v_n=a,\ a\in\mathbb{R}$, então:

$$\lim(u_n\times v_n)=\lim u_n\times\lim v_n=0\times a=0,\ \forall a\in\mathbb{R}$$

o que contradiz uma das condições do enunciado.

Portanto, $\lim v_n$ não pode ser igual a um número real.

29.2. Por exemplo, $v_n=\frac{3}{2}n$, pois:

(i) $\lim v_n=\lim\frac{3}{2}n=+\infty$ (não é um número real)

(ii) $\lim(u_n\times v_n)=\lim\left(\frac{2}{3+n}\times\frac{3}{2}n\right)=\lim\frac{3n}{3+n}=\lim\frac{3n}{n}=3$

30. Como a reta de equação $y=3x-2$ é assíntota do gráfico de *g*, e o domínio da função *g* é $\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=3$.

Como o domínio da função *h* também é $\mathbb{R}^+$, vamos calcular o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$.

Assim:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-[g(x)]^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x^2}-\frac{[g(x)]^2}{x^2}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{[g(x)]^2}{x^2}=\frac{2}{+\infty}-\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{g(x)}{x}\right]^2=$$

$$=0-\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\right]^2=0-3^2=-9$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -9$, o gráfico de h tem uma assíntota horizontal que é a reta de equação $y = -9$.

	5	−10	−15
3		15	15
	5	5	0

31.1. A função f é contínua em $x = 3$ quando $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ existe, ou seja, se $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$.

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = 3 - \cos(3\pi) = 3 - \cos(\pi) = 3 - (-1) = 4$

Por outro lado:

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{5x^2 - 10 - 15}{2x^2 - 7x + 3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{(x-3)(5x+5)}{(x-3)(2x-1)} =$

$= \dfrac{20}{5} = 4$

	2	−7	3
3		6	−3
	2	−1	0

Portanto, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$, então a função f é contínua em $x = 3$, como.

31.2. $f(x) = 2 \wedge x \leq 3 \Leftrightarrow 3 - \cos(\pi x) = 2 \wedge x \leq 3$

$\Leftrightarrow \cos(\pi x) = 1 \wedge x \leq 3 \Leftrightarrow \pi x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge x \leq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \wedge x \leq 3$

$\Leftrightarrow x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}_0^- \cup \{1\}$

32. $(x-7)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 27$

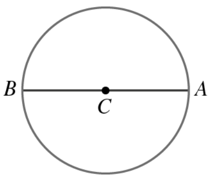
$A(10,\ 5,\ 8)$

$C(7,\ 2,\ 5)$

32.1. $(10-7)^2 + (5-2)^2 + (8-5)^2 = 27 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 + 9 + 9 = 27 \Leftrightarrow 27 = 27$

Logo, o ponto A pertence à superfície esférica



$B = C + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (7,\ 2,\ 5) - (10,\ 5,\ 8) = (-3,\ -3,\ -3)$

$\overrightarrow{AC}(-3,\ -3,\ -3)$

$B = C + \overrightarrow{AC} = (7,\ 2,\ 5) + (-3,\ -3,\ -3) = (4, -1,\ 2)$

B tem coordenadas $(4, -1,\ 2)$

32.2. O plano tangente à superfície esférica no ponto A é perpendicular ao raio [AC]. Portanto, o vetor $\overrightarrow{AC}$ é perpendicular a este plano pelo que uma equação que o define é da forma $-3x - 3y - 3z + d = 0$

Como o ponto A pertence ao plano e tem coordenadas $(10,\ 5,\ 8)$, tem-se

$-3\times 10 - 3\times 5 - 3\times 8 + d = 0 \Leftrightarrow d = 69$

Assim, uma equação do plano tangente à superfície esférica no ponto A é $-3x - 3y - 3z + 69 = 0$.

32.3. $\left\|\overrightarrow{CR}\right\| = \left\|\overrightarrow{CS}\right\| = \sqrt{27}$ (raio da superfície esférica)

$\overrightarrow{CR} \cdot \overrightarrow{CS} = \left\|\overrightarrow{CR}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CS}\right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{CR}, \overrightarrow{CS}}\right) =$

$= \sqrt{27} \times \sqrt{27} \times \cos\theta = 27\cos\theta$

Se $\tan\theta = \sqrt{8}$, então $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

Como $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$, tem-se:

$\left(\sqrt{8}\right)^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 8 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \dfrac{1}{9}$

Atendendo a que $\theta \in \left]0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$.

$\overrightarrow{CR} \cdot \overrightarrow{CS} = 27\cos\theta = 27 \times \dfrac{1}{3} = 9$