Ficha para praticar 15 **Págs. 72 a 75**

1.1. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$ e 1 é ponto aderente a D_f.

Seja (x_n) uma sucessão qualquer tal que $x_n \in D_f$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \to 1$.

Seja $(f(x_n))$ a sucessão das imagens dos termos de sucessão (x_n).

Assim:

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{4x_n}{x_n - 3} = \frac{\lim(4x_n)}{\lim(x_n-3)} = \frac{4\lim x_n}{\lim x_n - 3} =$$

$$= \frac{4-1}{1-3} = \frac{4}{-2} = -2$$

Logo, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2$.

1.2. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$ e -2 é ponto aderente a D_f.

Seja (x_n) uma sucessão qualquer tal que $x_n \in D_f$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \to -2$.

Seja $(f(x_n))$ a sucessão das imagens dos termos da sucessão (x_n).

Assim:

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{4x_n}{x_n - 3} = \frac{\lim(4x_n)}{\lim(x_n-3)} = \frac{4\times(-2)}{-2-3} = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$$

Logo, $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \frac{8}{5}$.

2. Sejam (x_n) uma sucessão tal que $x_n \to 2$ e, a partir de certa ordem, $x_n \neq 2$ e (y_n) uma sucessão tal que, a partir de certa ordem, $y_n = 2$.

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{1}{2}(x_n)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\lim(x_n)^2 = \frac{1}{2}\left[\lim(x_n)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\times 2^2 = 2$$

$$\lim f(y_n) = \lim 2 = 2$$

Portanto, qualquer que seja a sucessão (u_n) de elementos do domínio de f tal que $u_n \to 2$, a correspondente sucessão $(f(u_n))$ tende para 2.

Logo, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$.

3. Seja (x_n) uma sucessão qualquer de elementos de D_f (ou seja, uma sucessão qualquer de termos não nulos) tal que $x_n \to +\infty$.

Assim, temos:

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^2 + 10}{x_n^2} =$$

$$= \lim\left(\frac{x_n^2}{x_n^2} + \frac{10}{x_n^2}\right) =$$

$$= \lim\left(1 + \frac{10}{x_n^2}\right) = 1$$

uma vez que. $x_n \to +\infty \Rightarrow x_n^2 \to +\infty \Rightarrow \frac{10}{x_n^2} = 0$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+10}{x^2} = 1$.

4.1. a) Seja (u_n) uma sucessão qualquer de elementos de D_f tal que $u_n \to -1$ e $u_n < -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $f(u_n) = u_n$ e $\lim f(u_n) = -1$.

Por outro lado, seja (v_n) uma sucessão qualquer de elementos de D_f tal que:
$v_n \to -1$ e $v_n > -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Então, $f(v_n) = (v_n)^2$ e $\lim f(v_n) = (-1)^2 = 1$.

Assim, como existem duas sucessões (u_n) e (v_n) de elementos de D_f a tender para -1 tais que as correspondentes sucessões $f(u_n)$ e $f(v_n)$ tem limites diferentes, não existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

b) Seja (u_n) uma sucessão qualquer de elementos de D_g tal que $u_n \to -1$ e $u_n < -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $g(u_n) = 3$ e $\lim g(u_n) = 3$.

Por outro lado, seja (v_n) uma sucessão qualquer de elementos de D_g tal que $v_n \to -1$ e $v_n > -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $g(v_n) = -v_n$ e $\lim g(v_n) = -(-1) = 1$.

Portanto, como existem duas sucessões (u_n) e (v_n) de elementos de D_g a tender para -1 tais que as correspondentes sucessões $g(u_n)$ e $g(v_n)$ tem limites diferentes, não existe $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$.

4.2. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) =$

$$= \begin{cases} x+3 & \text{se } x \le -1 \\ x^2 - x & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

Assim:

- $\lim\limits_{x\to -1^-} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (x+3) = -1+3 = 2$
- $\lim\limits_{x\to -1^+} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2 - x) = (-1)^2 - (-1) = 2$
- $(f+g)(-1) = -1+3 = 2$

Como, $\lim\limits_{x\to -1^-} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (f+g)(x) = (f+g)(-1)$, então podemos concluir que a função $f+g$ tem limite quando x tenda para -1, pelo que a posição p é verdadeira.

5.1. **a)** $\lim\limits_{x\to 0^+} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$

5.2. **a)** Por exemplo, $u_n = \frac{1}{n}$, já que $\lim u_n = \lim \frac{1}{n} = 0$, logo u_n é convergente e $\lim f(u_n) = -\infty$, pelo que $f(u_n)$ é divergente.

b) Por exemplo, $u_n = n$, já que $\lim u_n = \lim n = +\infty$, logo u_n é divergente e $\lim f(u_n) = 1$, pelo que $f(u_n)$ é convergente.

6.1. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+3}{x^2-4} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$

6.2. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x}{1-x} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

6.3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+1}{x-x^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

6.4. $|3-x| = \begin{cases} 3-x & \text{se } 3-x \geq 0 \\ -(3-x) & \text{se } 3-x < 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} 3-x & \text{se } x \leq 3 \\ -(3-x) & \text{se } x > 3 \end{cases}$

Pelo que:

$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{-5}{|3-x|} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{-5}{3-x} = \dfrac{-5}{0^+} = -\infty$

6.5. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-2x}{8-x^3} = \dfrac{-4}{0^+} = -\infty$

6.6. $|1-x^2| = \begin{cases} 1-x^2 & \text{se } 1-x^2 \geq 0 \\ -(1-x^2) & \text{se } 1-x^2 < 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} 1-x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -(1-x^2) & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$

Pelo que:

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{|1-x^2|} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{1-x^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

7.1. $\lim\limits_{x\to +\infty} (4x^2+2x-3) = +\infty$

7.2. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2-10x) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = (+\infty)^2 = +\infty$

7.3. $\lim\limits_{x\to -\infty} (1-3x^2+x) = -\infty$

7.4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2}+x\right) \overset{(\infty-\infty)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)}{\sqrt{x^2+2}-x} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+2}-x} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}-x} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}-x} =$

$= \dfrac{2}{+\infty-(-\infty)} = \dfrac{2}{+\infty} = 0$

7.5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right) \overset{(\infty-\infty)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-(x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} =$

$= \dfrac{-1}{+\infty+\infty} = \dfrac{-1}{+\infty} = 0$

7.6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+4}{x^2+1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = 3$

7.7. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^4-6x}{x^3-8} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^4}{x^3} = \lim\limits_{x\to -\infty} (2x) = 2(-\infty) = -\infty$

7.8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x+2}{(2x^2+1)^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x+2}{4x^4+4x^2+1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{4x^4} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{4x^2} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

7.9. $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$|3-x| = \begin{cases} 3-x & \text{se } 3-x \geq 0 \\ -(3-x) & \text{se } 3-x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3-x & \text{se } x \leq 3 \\ -(3-x) & \text{se } x > 3 \end{cases}$

Assim:

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{|3-x|+2x}{|x|} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-(3-x)+2x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x-3}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x}{x} = 3$

7.10. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[\dfrac{3}{3x+2} \times (x^2-2x+4)\right] \overset{(0\times\infty)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3(x^2-2x+4)}{3x+2} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2-6x+12}{3x+2} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2}{3x} = \lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$

7.11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{1-\sqrt{x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\dfrac{\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[6]{x^3}} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[6]{\dfrac{x^2}{x^3}} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[6]{\dfrac{1}{x}} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2} = \dfrac{\sqrt[6]{\dfrac{1}{+\infty}} + \dfrac{2}{+\infty}}{\dfrac{1}{+\infty} - 2} = \dfrac{0+0}{0-2} = 0$

7.12. $|x-\sqrt{3}| = \begin{cases} x-\sqrt{3} & \text{se } x-\sqrt{3} \geq 0 \\ -(x-\sqrt{3}) & \text{se } x-\sqrt{3} < 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} x-\sqrt{3} & \text{se } x \geq \sqrt{3} \\ -(x-\sqrt{3}) & \text{se } x < \sqrt{3} \end{cases}$

Portanto:

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-3}{|x-\sqrt{3}| \times x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-3}{-(x-\sqrt{3}) \times x} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-3}{-x^2+\sqrt{3}x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{-x^2} = -1$

8.1. $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3}{x^2-4}=\frac{3}{0^-}=-\infty$

8.2. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{(x-2)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x+2}{x-2}$

Como o denominador continua a anular-se, temos que calcular os limites laterais. Assim:

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-4}{(x-2)^2}=\lim_{x\to2^+}\frac{x+2}{x-2}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-4}{(x-2)^2}=\lim_{x\to2^-}\frac{x+2}{x-2}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

Os limites laterais são diferentes, pelo que não existe $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{(x-2)^2}$.

8.3. $\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{9-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to9}\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{(9-x)\left(\sqrt{x}+3\right)}=$

$$=\lim_{x\to9}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-3^2}{(9-x)\left(\sqrt{x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{x-9}{(9-x)\left(\sqrt{x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{-(9-x)}{(9-x)\left(\sqrt{x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{-1}{\sqrt{x}+3}=\frac{-1}{\sqrt{9}+3}=-\frac{1}{6}$$

8.4. $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x-2}\times\sqrt{x-2}}{\left(x^2-4\right)\sqrt{x-2}}=$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}{\left(x^2-4\right)\sqrt{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)\sqrt{x-2}}=$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{1}{(x+2)\sqrt{x-2}}=$$

$$=\frac{1}{4\times0^+}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

8.5. $\lim\limits_{x\to3}\left[(x-3)\times\frac{x}{9-x^2}\right]\overset{(0\times\infty)}{=}\lim\limits_{x\to3}\frac{(x-3)x}{9-x^2}=$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)x}{-(x-3)(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x}{-(x+3)}=\frac{3}{-(3+3)}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$$

8.6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\times\left(x^2+10\right)\right]\overset{(0\times\infty)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+10}{\sqrt{x}}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{\sqrt{x}}+\frac{10}{\sqrt{x}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{10}{\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}+0=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x}\right)=+\infty$$

8.7. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+3}-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{5x}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5x}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{5x}+\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left[\left(\sqrt{5x}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2\right]\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left[\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2\right]\left(\sqrt{5x}+\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(5x-5)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x+3-4)\left(\sqrt{5x}+\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{5(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{5x}+\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{5\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\sqrt{5x}+5}=$$

$$=\frac{5\left(\sqrt{4}+2\right)}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}=\frac{20}{2\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$$

8.8. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2+4x}{x-2\sqrt{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\left(x^2+4x\right)\left(x+2\sqrt{x}\right)}{\left(x-2\sqrt{x}\right)\left(x+2\sqrt{x}\right)}=$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(x^2+4x\right)\left(x+2\sqrt{x}\right)}{x^2-\left(2\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(x^2+4x\right)\left(x+2\sqrt{x}\right)}{x^2-4x}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x+4)\left(x+2\sqrt{x}\right)}{x(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{(x+4)\left(x+2\sqrt{x}\right)}{x-4}=\frac{0}{-4}=0$$

9.1. $\lim\limits_{x\to-4}f(x)=-\infty$

9.2. $\lim f(u_n)=\lim f\left(-4-\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{x\to-4^-}f(x)=-\infty$

9.3. Não existe $\lim\limits_{x\to4}f(x)$ porque $4\in D_f$ e $\lim\limits_{x\to4^-}f(x)\neq f(4)$.

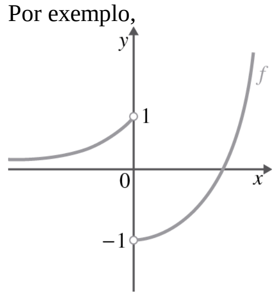
9.4. $\lim f(v_n)=\lim f\left(5^n\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$

9.5. $\lim f(w_n)=\lim f\left(\frac{1-4n}{n}\right)=\lim f\left(\frac{1}{n}-4\right)=$

$$=\lim_{x\to-4^+}f(x)=-\infty$$

9.6. $\lim f(t_n)=\lim f(3-n)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

10. Por exemplo,



11. Por exemplo:

11.1. $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$, pois $\lim u_n = 2^+$ (é um número real) e

$\lim g(u_n) \in \mathbb{R}$.

11.2. $u_n = \dfrac{1}{n}$, pois $\lim u_n = 0^+$ (é um número real) e

$\lim g(u_n) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ (não é um número real)

11.3. $u_n = n$, pois $\lim u_n = +\infty$ (não é um número real) e

$\lim g(u_n) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ (é um número real).

12. Temos que $0 \in D_f$ e $f(0) = \dfrac{1}{0-1} = -1$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe quando e apenas quando

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = -1$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x-2)}{\sqrt{x^2(x+4)}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x-2)}{|x|\sqrt{x+4}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x-2)}{x\sqrt{x+4}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-2}{\sqrt{x+4}} =$$

$$= \frac{0-2}{\sqrt{0+4}} = \frac{-2}{\sqrt{4}} = \frac{-2}{2} = -1$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$, pelo que, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe e é igual a -1 .

13.1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3 - x^2 + 3) = -\infty$

13.2. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 27}{x+3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

Recorrendo à regra de Ruffini vamos decompor em fatores o polinómio $P(x) = x^3 + 27$.

	1	0	0	27
–3		–3	9	–27
	1	–3	9	0

Logo:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^3 + 27}{x+3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x^2 - 3x + 9)}{x+3} =$$

$$= \lim_{x \to -3} (x^2 - 3x + 9) =$$

$$= (-3)^2 - 3 \times (-3) + 9 =$$

$$= 9 + 9 + 9 = 27$$

13.3. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 + 2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

Recorrendo à regra de Ruffini vamos decompor em fatores o polinómio $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

	1	1	–4	–4
–2		–2	2	4
	1	–1	–2	0

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^2 - x - 2)}{x(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{(-2)^2 - (-1) - 2}{-2} = -2$$

13.4. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+5} - 3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$\lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x+5} - 3)(\sqrt{x} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+5} + 3)}{(\sqrt{x+5} - 3)(\sqrt{x+5} + 3)(\sqrt{x} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+5} + 3)}{[(x+5) - 9](\sqrt{x} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+5} + 3)}{(x-4)(\sqrt{x} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x+5} + 3}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{9} + 3}{\sqrt{4} + 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

13.5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - x^4 + x}{x+2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^4}{x} = \lim(-x)^3 = -(+\infty)^3 = -\infty$$

13.6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}\right) \overset{(\infty - \infty)}{=}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}\right)\left(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 4}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)^2}{\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \frac{1 - 0}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 + 0}} = \frac{1}{2}$$

13.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)}{\sqrt{x^2+x}-x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}=\dfrac{1}{-\sqrt{1+0}-1}=-\dfrac{1}{2}$

13.8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x+3|}{2x-4}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

Temos que $|x+3|=\begin{cases}x+3 & \text{se } x\geq-3\\ -(x+3) & \text{se } x<-3\end{cases}$, pelo que,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-(x+3)}{2x-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

13.9. $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{x^2+5x-6}{\sqrt{24+4x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{\left(x^2+5x-6\right)\sqrt{24+4x}}{\sqrt{24+4x}\sqrt{24+4x}}=\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{\left(x^2+5x-6\right)\sqrt{24+4x}}{24+4x}=$

$=\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{(x+6)(x-1)\sqrt{24+4x}}{4(x+6)}=\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{(x-1)\sqrt{24+4x}}{4}=$

$=\dfrac{(-6-1)\sqrt{24+4\times(-6)}}{4}=\dfrac{-7\times0}{4}=0$

13.10. $\lim\limits_{x\to4^+}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{2}{x^2-16}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$

$\lim\limits_{x\to4^+}\left[\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{2}{(x-4)(x+4)}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to4^+}\left[\dfrac{x+4}{(x-4)(x+4)}-\dfrac{2}{(x-4)(x+4)}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{x+2}{(x-4)(x+4)}=\dfrac{6}{0^+}=+\infty$

14.1. $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ existe se e somente se

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=f(-1)$

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)=(-1)^3-k=-1-k$

Por outro lado, temos que

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3x^2-3}{x^2-x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3\left(x^2-1\right)}{(x+1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3(x-1)}{x-2}=$

$=\dfrac{3(-1-1)}{-1-2}=\dfrac{-6}{-3}=2$

Logo, $-1-k=2\Leftrightarrow k=-3$

14.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-3}{x^2-x-2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$

15. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x+1}{|4-4x|}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

Temos que:

$|4-4x|=\begin{cases}4-4x & \text{se } x\leq1\\ -(4-4x) & \text{se } x>1\end{cases}$

Logo, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x+1}{4-4x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{-4x}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x+1}-2x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{4x^2+2x+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{4x^2+2x+1}\right)^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+2x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+2x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}=$

$=\dfrac{2+0}{\sqrt{4+0+0}+2}=$

$=\dfrac{2}{2+2}=\dfrac{1}{2}$

Portanto, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$

Ficha para praticar 16 **Págs. 76 a 79**

1. Vamos averiguar se existe $\lim\limits_{x\to4}f(x)$.

$$\lim_{x\to4^-} f(x)=\lim_{x\to4^+} f(x)=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

Temos, ainda, que $f(4)=\frac{1}{4}$, portanto, $\lim\limits_{x\to4} f(x)$ existe e é igual a $\frac{1}{4}$.

Logo, a função f é contínua em $x = 4$.

2. A função g é contínua em $x = 1$ quando o $\lim\limits_{x\to1} g(x)$ existe.

Assim sendo:

- $$\lim_{x\to1^+} g(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\left(\sqrt{x}+1\right)=\sqrt{1}+1=2$$

- $$\lim_{x\to1^-} g(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{8\sqrt{x+3}-16}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{8\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{8\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{8\left[\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2\right]}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{8(x+3-4)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{8(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{8}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{8}{\sqrt{4}-2}=2$$

- $g(1) = 2$

Como $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=g(1)$, então existe $\lim\limits_{x\to1} g(x)$, pelo que a função g é contínua em $x = 1$.

3. Determinemos os limites laterais em $k = -1$

Assim:

- $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(2x-k)=-2-k$

$f(-1)=-2-k$

- $$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{\sqrt{2x+3}-1}{x+1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{\left(\sqrt{2x+3}-1\right)\left(\sqrt{2x+3}+1\right)}{(x+1)\left(\sqrt{2x+3}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{\left(\sqrt{2x+3}\right)^2-1^2}{(x+1)\left(\sqrt{2x+3}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{2x+3-1}{(x+1)\left(\sqrt{2x+3}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{2x+2}{(x+1)\left(\sqrt{2x+3}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{2(x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{2x+3}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{2}{\sqrt{2x+3}+1}=\frac{2}{\sqrt{1}+1}=1$$

A função f é contínua em $x = -1$ quando existe $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$, portanto, $-2-k=1 \Leftrightarrow k=-3$

Então, $k = -3$.

4. Averiguemos se existe $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{1-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{1-x}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x+1}{-1}=-2$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{-6x^2+6x}{x^2+x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{-6x(x-1)}{(x-1)(x+2)}=$$

	1	1	−2
1		1	2
	1	2	0

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{-6x}{x+2}=\frac{-6}{3}=-2$$

Temos, ainda, que $f(1)=-2$, pelo que

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$, logo existe $\lim\limits_{x\to1} f(x)$.

Portanto, f é contínua em $x = 1$.

5. A função $f(x)=\sin(\cos(x))$ é contínua porque é a composta de duas funções contínuas, as funções seno e cosseno.

6.
- Em $]-\infty\,,\,0[$ a função é contínua por ser definida pelo quociente de duas funções contínuas, ambas funções polinomiais.
- Em $]0\,,\,+\infty[$ a função é contínua por ser definida pelo quociente de duas funções contínuas, ambas funções polinomiais.
- Em $x = 0$:

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^3+x^2}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{x^2(x+1)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0^-}(x+1)=1$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{5x+3}{2x+3}=\frac{3}{3}=1$$

$f(0) = 1$

Como $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$, então existe $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, pelo que a função f é contínua em $x = 0$.

Podemos, portanto, concluir que a função f é contínua em $\mathbb{R}$.

A proposição p é verdadeira.

7. A função f é contínua em $x = a$ quando

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) = a^2 - 3a$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} \left(x^2 - x + 4\right) = a^2 - a + 4$

$a^2 - 3a = a^2 - a + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3a = -a + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2a = 4 \Leftrightarrow a = -2$

Logo, $a = -2$.

8.1. $D_f = \mathbb{R}$

- Em $]-\infty\ ,\ 1[$ a função f é contínua por ser definida pelo quociente de duas funções, ambas funções polinomiais.
- Em $]1\ ,\ +\infty[$ a função f é contínua por ser definida por uma função polinomial.
- Em $x = 1$:

  $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{4x}{-x+10} = \dfrac{4}{9}$

  $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 3 - 1^2 = 2$

  Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, não existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, pelo que a função f não é contínua em $x = 1$.

Portanto, a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

8.2. $D_g = \mathbb{R}$, assim, vem:

- Em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ a função g é contínua pois é definida pelo quociente de duas funções contínuas:
  - o módulo de uma função afim;
  - uma função afim.
- Em $x = 1$:

  $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{se } x < 1 \end{cases}$

  $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|x-1|}{x-1} =$

  $= \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-(x-1)}{x-1} = -1$

  $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{|x-1|}{x-1} =$

  $= \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x-1} = 1$

  Logo, não existe $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$, pois os limites laterais são diferentes.

  Assim, a função g não é contínua em $x = 1$.

Portanto, a função g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

8.3. $D_h = \mathbb{R}$

- Em $]-\infty\ ,\ -2[$ a função h é contínua por ser definida pelo quociente entre duas funções contínuas:
  - uma é a diferença entre uma função constante e a raiz quadrada de uma função quadrática;
  - a outra é uma função afim.
- Em $]-2\ ,\ +\infty[$ a função h é contínua por ser definida por uma função polinomial.
- Em $x = -2$:

$$\lim_{x \to -2^-} h(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{1 - \sqrt{x^2 - 3}}{x + 2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x \to -2^-} \frac{\left(1 - \sqrt{x^2-3}\right)\left(1 + \sqrt{x^2-3}\right)}{(x+2)\left(1 + \sqrt{x^2-3}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -2^-} \frac{1^2 - \left(\sqrt{x^2-3}\right)^2}{(x+2)\left(1 + \sqrt{x^2-3}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -2^-} \frac{1 - \left(x^2-3\right)}{(x+2)\left(1 + \sqrt{x^2-3}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -2^-} \frac{-x^2 + 4}{(x+2)\left(1 + \sqrt{x^2-3}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{(x+2)\left(1 + \sqrt{x^2-3}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -2^-} \frac{-(x-2)}{1 + \sqrt{x^2-3}} = \frac{-(-2-2)}{1 + \sqrt{1}} = 2$$

$\lim\limits_{x \to -2^+} h(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \left(\dfrac{x^2}{2}\right) = \dfrac{4}{2} = 2$, logo, $h(x) = 2$

Como $\lim\limits_{x \to -2^-} h(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} h(x) = h(-2)$, então, existe $\lim\limits_{x \to -2} h(x)$, pelo que a função h é contínua em $x = -2$.

Portanto, a função h é contínua em $\mathbb{R}$.

9. A função f é contínua em $x = 2$ quando existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Assim $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(x^2 - 2x\right) = 2^2 - 2 \times 2 = 0$.

Logo, $f(2) = 0$.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{x}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi^-}{2}\right)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Como $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$, existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, pelo que a função f é contínua em $x = 2$.

10. A função g é contínua em $x = 1$ se e somente se existe $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

Por sua vez $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ existe quando e apenas quando $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = g(1)$.

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \left[\frac{a-3}{4} + x\right] = \frac{a-3}{4} + 1 = g(1)$$

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{\left(\sqrt{4+3} - 2\right)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2 - 2^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x + 3 - 4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{\sqrt{1+3} + 2} = \frac{1}{4}$$

Então, $\dfrac{a-3}{4} = 1 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{a-3}{4} = \dfrac{1}{4} - 1 \Leftrightarrow \dfrac{a-3}{4} = -\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow a = 0$

Logo, $a = 0$.

11. Sabemos que a função é contínua em $\mathbb{R}$.

Portanto, a função é contínua em $x = 0$, pelo que terá de existir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Sendo assim, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(a + \frac{x^2-2x}{x^2+x}\right)^{\left(\frac{0}{0}\right)} =$$

$$= a + \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-2x}{x^2+x} = a + \lim_{x\to 0^-}\frac{x(x-2)}{x(x+1)} =$$

$$= a + \lim_{x\to 0^-}\frac{x-2}{x+1} = a + \frac{0-2}{0+1} = a-2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{a} = \frac{0-1}{a} = -\frac{1}{a}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$:

$$a-2 = -\frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2-2a = -1 \wedge a\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2-2a+1 = 0 \wedge a \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \wedge a\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a-1 = 0 \wedge a \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

$$b = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{1} = -1$$

Portanto, $a = 1$ e $b = -1$.

12. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}^{\left(\frac{0}{0}\right)} =$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}(\sqrt{x}+1) = \sqrt{1}+1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}^{\left(\frac{0}{0}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 1+1 = 2$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$, assim e para que a função f não seja contínua em $x = 1$, $f(1)$ terá de ser diferente de 2, ou seja, $a \neq 2$.

Logo, $a \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

13.1. $D_f = \{x\in\mathbb{R}:\ x^3-8\neq 0\} = \{x\in\mathbb{R}:\ x^3 \neq 8\} =$

$$= \{x\in\mathbb{R}:\ x\neq 2\} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$$

A função f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

13.2. $D_g = \{x\in\mathbb{R}:\ x\geq 0 \wedge x-3\neq 0\} = \{x\in\mathbb{R}:\ x\geq 0\wedge x\neq 3\} =$

$$= [0\ ,\ +\infty[\ \setminus\{3\}$$

A função g é contínua em $[0\ ,\ +\infty[\ \setminus\{3\}$.

13.3. $D_h = \{x\in\mathbb{R}:\ |x|-1\neq 0\} = \{x\in\mathbb{R}:\ |x|\neq 1\} =$

$$= \{x\in\mathbb{R}:\ x\neq -1\wedge x\neq 1\} = \mathbb{R}\setminus\{-1\ ,\ 1\}$$

A função h é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1\ ,\ 1\}$.

13.4. $D_j = \{x\in\mathbb{R}:\ x^2+3\neq 0\} = \mathbb{R}$, uma vez que $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+3\geq 3$

A função j é contínua em $\mathbb{R}$.

13.5. $D_p = \{x\in\mathbb{R}:\ 1-x^2\geq 0\} = \{x\in\mathbb{R}:\ -1\leq x\leq 1\} =$

$$= [-1\ ,\ 1]$$

A função p é contínua em $[-1\ ,\ 1]$.

13.6. $D_m = \{x\in\mathbb{R}:\ x-1\geq 0 \wedge 4-x^2 > 0\} =$

$$= \{x\in\mathbb{R}:\ x\geq 1 \wedge -2 < x < 2\} =$$

$$= \{x\in\mathbb{R}:\ 1\leq x < 2\} = [1,\ 2[$$

A função m é contínua em $[1\ ,\ 2[$.

14. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2x+1) = 2\times 1+1 = 3$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 = 1$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, podemos, desde já concluir que f não é contínua em $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 3x = 3\times 1 = 3$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$, podemos, desde já concluir que g não é contínua em $x = 1$.

Por outro lado, temos que:

$$(f+g)(x) = \begin{cases}(2x+1)+x & \text{se } x\leq 1\\ x^2+3x & \text{se } x>1\end{cases} = \begin{cases}3x+1 & \text{se } x\leq 1\\ x^2+3x & \text{se } x>1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-}(f+g)(x) = \lim_{x\to 1^-}(3x+1) = 3\times 1+1 = 4 = (f+g)(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+}(f+g)(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2+3x) = 1^2+3\times 1 = 4$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(f+g)(x) = (f+g)(1)$, a função $f+g$ é contínua em $x = 1$.

15. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}^{\left(\frac{0}{0}\right)} =$

Recorrendo à regra de Ruffini vamos decompor o polinómio $P(x) = x^3+8$ em fatores.

	1	0	0	8
–2		–2	4	–8
	1	–2	4	0

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = \lim_{x\to -2}(x^2-2x+4) =$$

$$= (-2)^2-2(-2)+4 = 4+4+4 = 12$$

Portanto, se f é contínua, então é contínua em $x = -2$ pelo que existe $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

Logo, terá de ser $f(-2) = 12$.

16.
- g é contínua no intervalo $]-\infty\ ,\ -1[$ pois é definida pelo quociente de duas funções contínuas: uma função constante uma função afim.
- g é contínua no intervalo $[-1\ ,\ 1]$ pois é definida pela raiz quadrada de uma função polinomial.
- g é contínua no intervalo $]1\ ,\ +\infty[$ pis é definida pelo quociente de duas funções polinomiais.
- $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$g(-1)=\sqrt{1-(-1)^2}=\sqrt{1-1}=0$

Portanto, g não é contínua em $x=-1$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=1-1=0$

$g(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-1^2}=0$

Portanto, g é contínua em $x=1$

Conclusão: g é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

17. • f é contínua no intervalo $]-\infty\,,\,4[$ pois é definida por uma função contínua: uma função afim.

• f é contínua no intervalo $]4\,,\,+\infty[$ pois é definida pelo quociente de duas funções contínuas: uma é uma função afim e a outra é a diferença entre uma função constante e a raiz quadrada de uma função afim.

• $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{8-2x}{2-\sqrt{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{(8-2x)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{(8-2x)(2+\sqrt{x})}{2^2-(\sqrt{x})^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{(8-2x)(2+\sqrt{x})}{4-x}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{2(4-x)(2+\sqrt{x})}{4-x}=$

$=\lim\limits_{x\to 4^+}\left[2\left(2+\sqrt{x}\right)\right]=2\left(2+\sqrt{4}\right)=8$

• $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(12-2x)=12-2\times 4=4=f(4)$

Como $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$ não existe $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, pelo que, a função f não é contínua em $x=4$.

Logo, a afirmação é falsa.

18. A função g é continua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ porque é o produto de uma função contínua pela composta de duas funções contínuas.

Visto que $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ e $-1\leq\cos\leq 1$, para todo o $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, temos que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\cos\dfrac{1}{x}\right)=0$, dado que se $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ e se h é uma função limitada, então $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\times h(x)\right]=0$.

Daqui resulta que: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\cos\dfrac{1}{x}\right)=0=g(0)$ e, portanto, existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ pelo que g é também contínua em $x=0$.

Logo, g é contínua em $\mathbb{R}$.

19. $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{(x-1)^2}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

Como este limite não é um número real, não é possível definir uma função f, contínua em $\mathbb{R}$ tal que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ g(x)=f(x)$

Logo, a afirmação é falsa.

Ficha de teste 8 — Págs. 80 e 81

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3x-5}{1-x}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty$

Resposta: **(D)**

2. $g(-2)>0$ e $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0^+$, portanto, $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=+\infty$

Resposta: **(D)**

3. $\lim f(x_n)=\lim f(4-n^2)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

Resposta: **(B)**

4. A função f é contínua em $x=1$ quando existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Assim:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2-2x}{|x-1|}=$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2-2x}{-(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2-2x}{1-x}=$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2(1-x)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}2=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{4}{x}+k\right)=4+k$, logo $f(1)=4+k$.

Portanto, $4+k=2\Leftrightarrow k=-2$.

Resposta: **(A)**

5. Por exemplo:

Gráfico 1

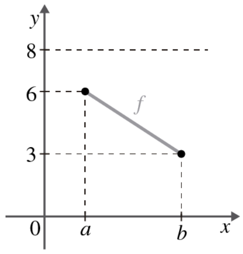
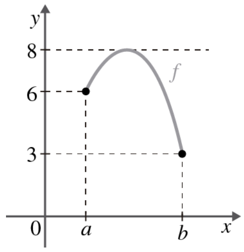


Gráfico 2



O gráfico 1 verifica a opção **(A)** e exclui a opção **(D)**.

O gráfico 2 exclui as opções **(B)** e **(C)**.

Resposta: **(A)**

6. Seja (x_n) uma sucessão qualquer tal que $x_n\in D_f$, $\forall n\in\mathbb{N}$ e $x_n\to 3$.

$f(x_n)=4-2x_n$, pelo que:

$\lim f(x_n)=\lim(4-2x_n)=$

$=\lim 4-\lim(2x_n)=4-2\lim x_n=$

$=4-2\times 3=4-6=-2$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 3}(4-2x)=-2$.

7.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-8}{4-x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4(x-2)}{-(x-2)(x+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{-(x+2)}=\dfrac{4}{-4}=-1$

7.2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{-2x^2-6x-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

	1	−2	−3
−1		−1	3
	1	−3	0

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(-2x-4)}=$

	−2	−6	−4
−1		2	4
	−2	−4	0

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-3}{-2x-4}=\dfrac{-1-3}{2-4}=2$

7.3. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-3}{\sqrt{x^2+3}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-3}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-3}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4-\frac{3}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=\frac{4-0}{-\sqrt{1+0}}=-4$$

7.4. $$\left|x-2x^2\right|=\begin{cases}x-2x^2 & \text{se } x-2x^2\geq 0\\ -\left(x-2x^2\right) & \text{se } x-2x^2<0\end{cases}$$

Por outro lado, temos que:

$$x-2x^2\geq 0\Leftrightarrow x(1-2x)\geq 0\Leftrightarrow 0\leq x\leq\frac{1}{2}$$

Assim:

$$\left|x-2x^2\right|=\begin{cases}x-2x^2 & \text{se } 0\leq x\leq\frac{1}{2}\\ -\left(x-2x^2\right) & \text{se } x<0\vee x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

Logo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left|x-2x^2\right|}{3x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\left(x-2x^2\right)}{3x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x}{3x^2+2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

8.1. $$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x^2=(-\infty)^2=+\infty$$

8.2. A função g é contínua em $x = 1$ quando existe $\lim\limits_{x\to1}g(x)$, ou seja, quando $\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=g(1)$

Assim:

$$\lim_{x\to1^+}g(x)=g(1)=1-2k \quad \text{e} \quad \lim_{x\to1^-}\frac{x^3-1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \quad (1)$$

Recorrendo à regra de Ruffini, para fatorizar o polinómio x^3-1, temos que:

	1	0	0	–1
1		1	1	1
	1	1	1	0

Então, $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$

Voltando a (1), temos:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\left(x^2+x+1\right)=3$$

Logo, $1-2k=3\Leftrightarrow 2k=1-3\Leftrightarrow k=-1$

Portanto, $k = -1$

9.1. **a)** Por exemplo, $g(x)=2x-x^2$, pois

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to2}\frac{-x^2+4}{2x-x^2}=\lim_{x\to2}\frac{(2-x)(2+x)}{x(2-x)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2+x}{x}=\frac{2+2}{2}=2$$

b) Por exemplo, $h(x)=(2-x)^3$, pois

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to2}\frac{-x^2+4}{(2-x)^3}=\lim_{x\to2}\frac{(2-x)(2+x)}{(2-x)^3}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2+x}{(2-x)^2}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

9.2. **a)** $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{|x|\times x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+4}{-x\times x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+4}{-x^2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{-x^2}=1$$

b) $$\lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt{f(x)}}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt{-x^2+4}}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt{-x^2+4}\times\sqrt{-x^2+4}}{(x-2)\times\left(\sqrt{-x^2+4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2^-}\frac{\left(\sqrt{-x^2+4}\right)^2}{(x-2)\sqrt{-x^2+4}}=\lim_{x\to2^-}\frac{-x^2+4}{(x-2)\sqrt{-x^2+4}}=$$

$$=\lim_{x\to2^-}\frac{-(x-2)(x+2)}{(x-2)\sqrt{-x^2+4}}=\lim_{x\to2^-}\frac{-(x+2)}{\sqrt{-x^2+4}}=\frac{-4}{0^+}=-\infty$$

10.1. $$D_{f\circ g}=\left\{x:\ x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\right\}=$$

$$=\left\{x:\ x\in\mathbb{R}\wedge\cos x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}=$$

$$=\left\{x:\ x\in\mathbb{R}\wedge\cos x\neq-1\right\}=$$

$$=\left\{x:\ \cos x\neq-1\right\}=$$

$$=\left\{x:\ x\neq\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}=$$

$$=\mathbb{R}\setminus\left\{\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

A função $f\circ g$ é contínua no seu domínio pois:

- g é contínua em $\mathbb{R}\setminus\left\{\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
- f é contínua em $g(a)$, sendo $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

10.2. $$\lim_{x\to\pi^+}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to\pi}f\left(g(x)\right)$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2g(x)}{g(x)+1}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\cos x}{\cos x+1}$$

$$=\frac{2\cos\pi}{\cos\pi+1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

Ficha para praticar 17 **Págs. 82 a 85**

1. Para que exista assíntota vertical no ponto a, tem-se que:
- $a \in D_f$ e f não é contínua em a

ou
- $a \notin D_f$ e a é ponto aderente a D_f.

1.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 2x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x(x+2) \neq 0\} =$
$= \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$

A função f é contínua.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x+4}{x^2+2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2(x+2)}{x(x+2)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x+4}{x^2+2x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{2x+4}{x^2+2x} = \lim_{x \to -2} \frac{2(x+2)}{x(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{2}{x} = \frac{2}{-2} = -1$$

Como este limite não é infinito então a reta de equação $x = -2$ não é assíntota vertical ao gráfico de f.

A reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

1.2. $D_g = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 2 \neq 0\} = \mathbb{R}$, já que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2 \neq 0$.

A função g é uma contínua em $\mathbb{R}$ pelo que o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

1.3. $D_h = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1 , 1\}$

A função h é uma função contínua.

$$\lim_{x \to -1^-} h(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} = \frac{-4}{-0^-} = +\infty$$

Logo, a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de h.

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} = \frac{-6}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} = \frac{-6}{0^+} = -\infty$$

Logo, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de h .

As retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são as assíntotas verticais ao gráfico de h .

1.4. $D_j = \{x \in \mathbb{R}: |x| - 3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: |x| \neq 3\} =$
$= \{x \in \mathbb{R}: x \neq -3 \wedge x \neq 3\} = \mathbb{R} \setminus \{-3 , 3\}$

A função j é contínua.

$$\lim_{x \to -3^-} j(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{x-3}{|x|-3} = \frac{-6}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} j(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{x-3}{|x|-3} = \frac{-6}{0^-} = +\infty$$

Logo, a reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico de j .

$$\lim_{x \to 3} j(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{|x|-3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

Como este limite não é infinito, então, a reta de equação $x = 3$ não á assíntota vertical ao gráfico de j .

A reta de equação $x = -3$ é a única assíntota vertical ao gráfico de j .

1.5. $D_r = \mathbb{R}$

Em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a função r é contínua.

$$\lim_{x \to 1^-} r(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2}{1-x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} r(x) = \lim_{x \to 1^+} x = 1$$

A reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de r .

1.6. $D_s = \{x \in \mathbb{R}: 4 - x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2 , 2\}$

A função s é contínua.

$$\lim_{x \to -2} s(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x|x| - 2x}{4 - x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to -2} \frac{x(-x) - 2x}{4 - x^2} = \lim_{x \to -2} \frac{-x^2 - 2x}{4 - x^2} = \lim_{x \to -2} \frac{-x(x+2)}{-(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x}{x-2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Como este limite não é infinito, então, a reta de equação $x = -2$ não é assíntota vertical ao gráfico de s .

$$\lim_{x \to 2} s(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x|x| - 2x}{4 - x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 2} \frac{x \times x - 2x}{4 - x^2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{4 - x^2} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)}{-(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x}{-x(x+2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Como este limite não é infinito, então, a reta de equação $x = 2$ não é assíntota vertical ao gráfico de s .

O gráfico de s não tem assíntotas verticais.

2.1. $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x^2+5} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

De igual modo, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Logo, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, em $+\infty$ e em $-\infty$.

2.2. $$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 4}{2x^2 + x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

De igual modo, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \dfrac{3}{2}$.

Logo, a reta de equação $y = \frac{3}{2}$ é assíntota horizontal ao gráfico de g, em $+\infty$ e em $-\infty$.

2.3. $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 5}{x^2 + 2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (2x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x) = -\infty$

Como nenhum destes dois limites é igual a um número real, o gráfico de h não tem assíntotas horizontais.

3. $D_f = \mathbb{R}$

Para que a reta de equação $y = 2x$ seja uma assíntota não vertical ao gráfico da função *f* terá de ser:

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = 0$

ou

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = 0$

Assim, vem que:

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^3 + 5}{x^2 + 1} - 2x \right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 5 - 2x^3 - 2x}{x^2 + 1} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 5 - 2x^3 - 2x}{x^2 + 1} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x + 5}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{x} = \frac{-2}{+\infty} = 0$

De igual modo:

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - 2x] =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2}{x} = \frac{-2}{-\infty} = 0$

Logo, a reta de equação $y = 2x$ é uma assíntota não vertical ao gráfico de *f*, em $+\infty$ e em $-\infty$.

4. $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

Logo, a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$, logo a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$.

Portanto, as retas de equação $y = 1$ e $y = 0$ são assíntotas horizontais ao gráfico de f, em $+\infty$ e em $-\infty$, respetivamente.

5.1. $y = 5$

5.2. $y = -\frac{3}{4}$, pois $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{3}{4} \right) \right] = 0$

5.3. $y = -x + 4$

5.4. $y = 2x - 3$, pois $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x - 3)] = 0$

5.5. $y = -x + 6$, pois $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-x + 6)] = 0$

5.6. $y = -\sqrt{2}x$, pois $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(-\sqrt{2}x \right) \right] = 0$

6.1.
- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Assíntotas verticais

A função f é contínua

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x + \frac{3}{x} \right) = 0 + \frac{3}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(x + \frac{3}{x} \right) = 0 + \frac{3}{0^-} = -\infty$

Logo, a reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical no gráfico de f.

- Assíntotas não verticais

Em $+\infty$:

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + \frac{3}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{3}{x^2} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2} \right) = 1 + \frac{3}{(+\infty)^2} = 1 + 0 = 1$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \frac{3}{x} - x \right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{+\infty} = 0$

Assim, a reta de equação $y = x$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

Em $-\infty$:

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2} \right) = 1 + \frac{3}{(-\infty)^2} = 1 + 0 = 1$

$b = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{-\infty} = 0$

Assim, a reta de equação $y = x$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

As retas de equações $x = 0$ e $y = x$ são as assíntotas de f

6.2.
- $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- Assíntotas verticais

A função g é contínua.

$\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{2x - 4}{(x - 2)^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{2(x - 2)}{(x - 2)^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{2}{x - 2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{2}{x - 2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

Assim, a reta de equação $x = 2$ é a única assíntota vertical ao gráfico da função g.

- Assíntotas não verticais

Em $+\infty$:

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x - 4}{(x - 2)^2}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - 4}{x(x - 2)^2} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = \frac{2}{(+\infty)^2} = 0$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-mx\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{(x-2)^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Logo, $y = 0$ é a equação da assíntota não vertical, no caso é horizontal, ao gráfico de g, em $+\infty$.

De modo, análogo, $m = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x} = 0$ e

$b = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)-mx\right] = 0$, pelo que, a reta de equação $y = 0$, também é assíntota ao gráfico de g em $-\infty$.

As retas de equações $x = 2$ e $y = 0$ são as assíntotas ao gráfico de g .

6.3. • $D_h = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

• Assíntotas verticais

A função h é contínua.

$$\lim_{x\to-1^-}h(x) = \lim_{x\to-1^-}\frac{2x^2+4x-1}{x+1} = \frac{-3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}h(x) = \lim_{x\to-1^+}\frac{2x^2+4x-1}{x+1} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

Logo, a reta de equação $x = -1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de h .

• Assíntotas não verticais

Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2+4x-1}{x+1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+4x-1}{x^2+x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[h(x)-mx\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2+4x-1}{x+1}-2x\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+4x-1-2x(x+1)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+4x-1-2x^2-2x}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x} = 2$$

Logo, a reta de equação $y = 2x+2$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de h com $+\infty$.

• De igual modo, em $-\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = 2 \quad \text{e} \quad b = \lim_{x\to-\infty}\left[h(x)-mx\right] = 2$$

Portanto, a reta de equação $y = 2x+2$ é uma assíntota ao gráfico de h em $-\infty$.

As retas de equações $x = -1$ e $y = 2x+2$ são as assíntotas ao gráfico de h .

6.4. • $D_j = \mathbb{R}$

• Assíntotas verticais

A função j é contínua em $\mathbb{R}$, logo, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

• Assíntotas não verticais

Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{j(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} =$$

$$= \sqrt{1+\frac{3}{(+\infty)^2}} = \sqrt{1+0} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[j(x)-mx\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}{\sqrt{x^2+3}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+4} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Logo, a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de j em $+\infty$.

Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{j(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} =$$

$$= -\sqrt{1+\frac{3}{(-\infty)^2}} = -\sqrt{1+0} = -1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left[j(x)-mx\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+3}+x\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)}{\sqrt{x^2+3}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+3}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}-x} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

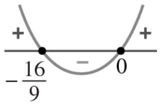
Logo, a reta de equação $y = -x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de j em $-\infty$.

As retas de equações $y = x$ e $y = -x$ são as assíntotas do gráfico de j .

6.5. • $D_r = \left\{x \in \mathbb{R}: \; 9x^2 + 16x \geq 0 \wedge x - 1 \neq 0\right\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R}: \; x(9x+16) \geq 0 \wedge x \neq 1\right\} =$

$= \left(\left]-\infty \, , \; -\dfrac{16}{9}\right] \cup \left[0 \, , \; +\infty\right[\right) \setminus \{1\}$



• Assíntotas verticais

A função r é contínua .

$$\lim_{x \to 1^+} r(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{9x^2+16x}}{x-1} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} r(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{9x^2+16x}}{x-1} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

Logo, a reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de r .

• Assíntotas não verticais

Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2+16x}}{x-1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+16x}}{x^2 - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(9+\frac{16}{x}\right)}}{x^2-x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|\sqrt{9+\frac{16}{x}}}{x(x-1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{9+\frac{16}{x}}}{x(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9+\frac{16}{x}}}{x-1} = \frac{\sqrt{9+0}}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[r(x) - mx\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+16x}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{9+\frac{16}{x}}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9+\frac{16}{x}}}{1-\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{\sqrt{9+0}}{1-0} = 3$$

Logo, a reta de equação $y = 3$ é a assíntota ao gráfico de r em $+\infty$.

Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2+16x}}{x-1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+16x}}{x^2-x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{9+\frac{16}{x}}}{x(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{9+\frac{16}{x}}}{x-1} =$$

$$= \frac{-\sqrt{9+0}}{-\infty} = 0$$

Logo, a reta de equação $y = -3$ é a assíntota ao gráfico de r em $-\infty$.

As retas de equações $x = 1$, $y = 3$ e $y = -3$ são as assíntotas ao gráfico de r .

6.6. • $D_s = \left\{x \in \mathbb{R}: \; |1-x| \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Assíntotas verticais

A função s é

$$\lim_{x \to 1} s(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2}{|1-x|} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Logo, a reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de s .

• Assíntotas não verticais

Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{s(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{-1+x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{-x+x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[s(x) - mx\right] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{-1+x} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x(-1+x)}{-1+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{-1+x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{-1+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Logo, a reta de equação $y = x + 1$ é a assíntota ao gráfico de s em $+\infty$.

Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{s(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2}{1-x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left[s(x) - mx\right] = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{1-x} + x\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x(1-x)}{1-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x-x^2}{1-x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

Logo, a reta de equação $y = -x - 1$ é a assíntota ao gráfico de s em $-\infty$.

As retas de equações $x = 1$, $y = x + 1$ e $y = -x - 1$ são as assíntotas do gráfico de s .

7. (i) $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{x^2-4x+3}{x+2}}{x} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-4x+3}{x^2+2x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2-4x+3}{x+2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-4x+3-x(x+2)}{x+2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x+3-x^2-2x}{x+2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-6x+3}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-6x}{x} = -6$$

Logo, $y = x - 6$ é a equação da assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

(ii) $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{x^2-4x+3}{-x+2}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-4x+3}{-x^2+2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{-x^2} = -1$

$b = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - mx\right] =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\dfrac{x^2-4x+3}{-x+2}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-4x+3+x(-x+2)}{-x+2} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-4x+3-x^2+2x}{-x+2} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x+3}{-x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x}{-x} = -2$

Logo, $y = -x + 2$ é a equação da assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

(iii) $\begin{cases} y = x-6 \\ y = -x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-6 \\ x-6 = -x+2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x-6 \\ 2x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 4 \end{cases}$

Portanto, $P(4\ ,\ -2)$

(iv) $d(0\ ,\ P) = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

A distância pedida é igual a $2\sqrt{5}$

8. Dado que a reta de equação $y = -x-2$ é assíntota ao gráfico de f e o domínio de f é $\mathbb{R}^+$, temos:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) + x\right] = -2$

Assim:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{x^2}{f(x)}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{xf(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{f(x)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{f(x)}{x}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}} =$

$= \dfrac{1}{-1} = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left[h(x) - mx\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^2}{f(x)} + x\right] =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + xf(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(x+f(x))}{f(x)} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left[(x+f(x)) \times \dfrac{x}{f(x)}\right]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + x) \times \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{f(x)} =$

$= -2 \times (-1) = 2$

Portanto, a reta de equação $y = -x+2$ é assíntota ao gráfico da função h.

9. Como $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$, a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -5$, a reta de equação $y = -5$ é assíntota horizontal ao gráfico de f.

E, como $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) + 3x\right] = 0$, a reta de equação $y = -3x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f.

10. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x-1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

Portanto, a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x}{2x^2-2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$

Portanto, a reta de equação $y = \dfrac{1}{2}$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$.

11.1. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} :\ \dfrac{1}{x} \geq 0 \wedge x \neq 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} :\ x > 0\} = \mathbb{R}^+$

- Assíntotas verticais

  A função f é contínua em $\mathbb{R}^+$

  $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{\dfrac{1}{x}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x}} = \sqrt{\dfrac{1}{0^+}} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

A reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

- Assíntotas não verticais

  $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x^2}} =$

  $= \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x^3}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3}} =$

  $= \sqrt{\dfrac{1}{+\infty}} = \sqrt{0} = 0$

  $b = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x}} =$

  $= \sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}} =$

  $= \sqrt{\dfrac{1}{+\infty}} = \sqrt{0} = 0$

  O gráfico de f admite uma única assíntota não vertical que é a reta de equação $y = 0$.

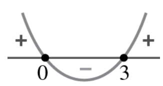
As retas de equações $x = 0$ e $y = 0$ são as assíntotas ao gráfico de f.

11.2. $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} :\ 4x^2 - 12x \geq 0\right\}$

$4x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 4x(x-3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x = 0 \vee x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$



Assim, $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \vee x \geq 3\} =$

$= \left]-\infty\ ,\ 0\right] \cup \left[3\ ,\ +\infty\right[$

- Assíntotas verticais

  A função g é contínua em $D_g = \left]-\infty\ ,\ 0\right] \cup \left[3\ ,\ +\infty\right[$.

Logo, o gráfico de *g* não admite assíntotas verticais.

- Assíntotas não verticais
- Em $-\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-12}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4-\frac{12}{x}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{4-\frac{12}{x}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4-\frac{12}{x}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{4-\frac{12}{x}} =$$

$$= -\sqrt{4-0} = -2$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left[g(x)-mx\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{4x^2-12x}+2x\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2-12x}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2-12x}-2x\right)}{\sqrt{4x^2-12x}-2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2-12x}\right)^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2-12x}-2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-12x-4x^2}{\sqrt{4x^2-12x}-2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-12x}{\sqrt{4x^2-12x}-2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-12x}{-x\sqrt{4-\frac{12}{x}}-2x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-12x}{-x\left[\sqrt{4-\frac{12}{x}}+2\right]} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{12}{\sqrt{4-\frac{12}{x}}+2} = \frac{12}{\sqrt{4-0}+2} = \frac{12}{4} = 3$$

Portanto, a reta de equação $y=-2x+3$ é assíntota ao gráfico de *g* em $-\infty$.

- Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2-12x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{4-\frac{12}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{4-\frac{12}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4-\frac{12}{x}} =$$

$$= \sqrt{4-0} = 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-mx\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-12x}-2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2-12x}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-12x}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-12x}+2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-12x}{\sqrt{4x^2-12x}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-12x}{x\sqrt{4-\frac{12}{x}}+2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-12}{\sqrt{4-\frac{12}{x}}+2} = \frac{-12}{\sqrt{4-0}+2} = -3$$

Portanto a reta de equação $y=2x-3$ é assíntota ao gráfico de *g* em $+\infty$.

As retas de equações $y=-2x+3$ e $y=2x-3$ são as assíntotas ao gráfico de *g*.

11.3. $D_h = \mathbb{R}$

- Assíntotas verticais:

A função *h* é contínua em $]3,+\infty[$ e em $]-\infty,3[$

$\lim_{x\to3^-} h(x) = \lim_{x\to3^-} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$, portanto a reta de equação $x=3$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *h*.

- Assíntotas não verticais:
  - Em $-\infty$:

    $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{-\infty} = 0$, logo a reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de *h* em $-\infty$.
  - Em $+\infty$:

    $$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

    Como $m \notin \mathbb{R}$, o gráfico de *h* não admite assíntotas não verticais em $+\infty$.

As retas de equações $x=3$ e $y=0$ são as assíntotas ao gráfico de *h*.

11.4. $D_p = \{x\in\mathbb{R} : x-5\neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{5\}$

$$p(x) = \frac{|x-5|}{x-5} = \begin{cases} \frac{x-5}{x-5} & \text{se } x\geq 5 \\ \frac{-(x-5)}{x-5} & \text{se } x<5 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } x\geq 5 \\ -1 & \text{se } x<5 \end{cases}$$

- Assíntotas verticais:

$\lim_{x\to5^+} p(x) = 1$ e $\lim_{x\to5^-} p(x) = -1$

Como nenhum destes limites é infinito e a função é contínua em $]-\infty,5[$ e em $]5,+\infty[$, podemos concluir que o gráfico de *p* não admite assíntotas verticais.

- Assíntotas não verticais:

$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -1$ e $\lim_{x\to+\infty} p(x) = 1$, portanto, $y=-1$ e $y=1$ são assíntotas ao gráfico de *p*, respetivamente, em $-\infty$ e em $+\infty$.

As retas de equações $y=-1$ e $y=0$ são as assíntotas ao gráfico de *p*.

12.1. Verdadeira, já que se *f* é contínua em $x=a$ existe $\lim_{x\to a} f(x)$ e é igual a $f(a)$, logo diferente de $+\infty$ ou de $-\infty$.

12.2. Falso, o gráfico de uma função *f* tem, no máximo, duas assíntotas horizontais, uma em $-\infty$ e outra em $+\infty$.

12.3. Falso, por exemplo se $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ e $\lim_{x\to a^-} f(x) = c$, sendo *b* e *c* números reais e, a função *f* não é contínua em $x=a$, já que os limites são diferentes e como nenhum deles é infinito, a reta de equação $x=a$ não é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

12.4. Falso, o gráfico de uma função *f* pode ter, no máximo, uma assíntota não vertical em $+\infty$ e esta pode ser horizontal ou oblíqua.

12.5. Falso, o domínio de uma função *f* pode ser $\mathbb{R}$ mas a função pode não ser contínua em algum ponto e neste (ou nestes) admitir limites infinitos que impliquem que o gráfico da função possa admitir assíntotas verticais.

12.6. Falso, o gráfico de uma função *f* pode não admitir assíntotas verticais, mas pode, também, admitir uma infinidade de assíntotas verticais.

13. ■ Assíntotas verticais:

$D_f =]0,4[$ e a função *f* é contínua em $]0,2[$ e em $]2,4[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2-8}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \frac{-8}{-\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 2^-} = \frac{2x^2-8}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(2x^2-8)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{2(x-2)(x+2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \left[2(x+2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})\right] =$$

$$= 2(2+2)(\sqrt{2}+\sqrt{2}) = 16\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{12-3x}}{x^2-16} = \frac{\sqrt{12-3\times 2}}{2^2-16} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{12-3x}}{x^2-16} =$$

$$= \lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{12-3x}\times\sqrt{12-3x}}{(x^2-16)\sqrt{12-3x}} =$$

$$= \lim_{x\to 4^-} \frac{12-3x}{(x^2-16)\sqrt{12-3x}} =$$

$$= \lim_{x\to 4^-} \frac{-3(x-4)}{(x-4)(x+4)\sqrt{12-3x}}$$

$$= \lim_{x\to 4^-} \frac{-3}{(x+4)\sqrt{12+3x}} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x = 4$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *f*.

■ Assíntotas não verticais:

Como o domínio de *f* é um intervalo limitado então o gráfico de *f* não tem assíntotas não verticais.

A reta de equação $x = 4$ é a única assíntota ao gráfico de f.

15. A reta de equação $y = 4x - 1$ é assíntota ao gráfico de *f* em $-\infty$, pelo que $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m = 4$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)(3-ax)}{x^2} = 5 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\times\frac{3-ax}{x}\right] = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\times\lim_{x\to x-\infty}\frac{3-ax}{x} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\times\lim_{x\to-\infty}\frac{-ax}{x} = 5 \Leftrightarrow 4\times(-a) = 5 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{4}$$

Portanto, $a = -\frac{5}{4}$.

16.1. A função *f* é contínua em $x = 3$ se e somente se existe $\lim_{x\to 3} f(x)$ e por sua vez existe quando $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$.

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(\sqrt{x^2+7}-x\right) = \sqrt{3^2+7}-3 =$$

$$= \sqrt{16}-3 = 4-3 = 1 = f(3)$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\frac{x-3}{x-\sqrt{3x}} = \lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)(x+\sqrt{3x})}{(x-\sqrt{3x})(x+\sqrt{3x})} =$$

$$= \lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)(x+\sqrt{3x})}{x^2-3x} = \lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)(x+\sqrt{3x})}{x(x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+\sqrt{3x}}{x} = \frac{3+\sqrt{3\times 3}}{3} = 2$$

Como $\lim_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim_{x\to 3^-} f(x)$, a função *f* não é contínua em $x = 3$.

16.2. $D_f = \mathbb{R}^+$

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+7}-x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{7}{x^2}\right)}-x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\sqrt{\frac{7}{x^2}}-x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\sqrt{\frac{7}{x^2}}-x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}-1\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}-1\right) =$$

$$= \sqrt{1+0}-1 = 1-1 = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+7}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+7}-x\right)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}{\sqrt{x^2+7}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+7-x^2}{\sqrt{x^2+7}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{7}{\sqrt{x^2+7}+x} = \frac{7}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

17. Como $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+3x\right] = 0$, tem-se que a reta de equação $y = -3x$ é assíntota ao gráfico de *f*, pelo que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = m = -3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}+\frac{x^3}{x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+x^2\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} + \lim_{x\to+\infty}x^2 = -3+(+\infty)$$

Como, $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ não é um número real, podemos concluir que o gráfico de g não tem assíntotas oblíquas.

Ficha para praticar 18 **Págs. 86 a 89**

1.1.

$$\begin{array}{r|l} 2x & -x+3 \\ \cline{2-2} -2x+6 & -2 \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

$f(x) = -2 + \dfrac{6}{-x+3}$, ou seja, $f(x) = -2 + \dfrac{-6}{x-3}$.

Assim:

Equação da assíntota vertical: $x = 3$

Equação da assíntota horizontal: $y = -2$

1.2. $\dfrac{4}{x+2} = 0 + \dfrac{4}{x+2}$

Portanto, $f(x) = 0 + \dfrac{4}{x+2}$.

Equação da assíntota vertical: $x = -2$

Equação da assíntota horizontal: $y = 0$

1.3.

$$\begin{array}{r|l} 4x-3 & 2x+1 \\ \cline{2-2} -4x-2 & 2 \\ \cline{1-1} -5 & \end{array}$$

$f(x) = 2 + \dfrac{-5}{2x+1}$, ou seja,

$f(x) = 2 + \dfrac{-\frac{5}{2}}{x+\frac{1}{2}}$

Equação da assíntota vertical: $x = -\dfrac{1}{2}$

Equação da assíntota horizontal: $y = 2$

1.4.

$$\begin{array}{r|l} -3x+2 & -6x+6 \\ \cline{2-2} 3x-3 & \frac{1}{2} \\ \cline{1-1} -1 & \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-1}{-6x+6}$, ou seja, $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\frac{1}{6}}{x-1}$

Equação da assíntota vertical: $x = 1$

Equação da assíntota horizontal: $y = \dfrac{1}{2}$

1.5.

$$\begin{array}{r|l} x-2 & 3x-4 \\ \cline{2-2} -x+\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \cline{1-1} -\frac{2}{3} & \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{-\frac{2}{3}}{3x-4}$, ou seja, $f(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{-\frac{2}{9}}{x-\frac{4}{3}}$,

Equação da assíntota vertical: $x = \dfrac{4}{3}$

Equação da assíntota horizontal: $y = \dfrac{1}{3}$

1.6. $f(x) = x + \dfrac{2-x^2}{x+1} = \dfrac{x(x+1)+2-x^2}{x+1} =$

$= \dfrac{x^2+x+2-x^2}{x+1} = \dfrac{x+2}{x+1}$

$$\begin{array}{r|l} x+2 & x+1 \\ \cline{2-2} -x-1 & 1 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1}$

Equação da assíntota vertical: $x = -1$

Equação da assíntota horizontal: $y = 1$

2.1. **(i)**

$$\begin{array}{r|l} 2x-6 & x-2 \\ \cline{2-2} -2x+4 & 2 \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

$f(x) = 2 + \dfrac{-2}{x-2}$

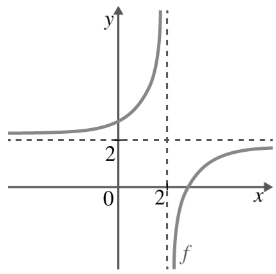
(ii) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

(iii) Equação da assíntota vertical: $x = 2$

Equação da assíntota horizontal: $y = 2$

(iv) $D_f^2 = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

(v)



2.2. **(i)**

$$\begin{array}{r|l} 2x-5 & -x+3 \\ \cline{2-2} -2x+6 & -2 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

$g(x) = -2 + \dfrac{1}{-x+3} = -2 + \dfrac{-1}{x-3}$

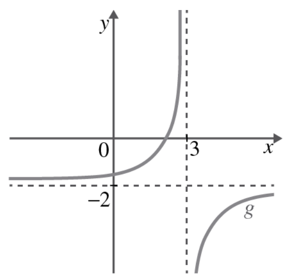
(ii) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

(iii) Equação da assíntota vertical: $x = 3$

Equação da assíntota horizontal: $y = -2$

(iv) $D_g' = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

(v)



2.3. **(i)**

$$\begin{array}{r|l} 3x+6 & -2x+4 \\ \cline{2-2} 3x+6 & -\frac{3}{2} \\ \cline{1-1} 12 & \end{array}$$

$h(x) = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{12}{-2x+4}$, ou seja,

$h(x) = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{-6}{x-2}$

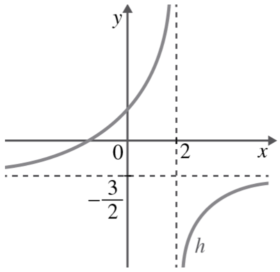
(ii) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

(iii) Equação da assíntota vertical: $x = 2$

Equação da assíntota horizontal: $y = -\dfrac{3}{2}$

(iv) $D'_h = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

(v)



2.4. **(i)**

$$\begin{array}{r|l} x & -3x+2 \\ \hline -x+\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \hline \frac{2}{3} & \end{array}$$

$j(x) = 2 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{\frac{2}{3}}{-3x+2}$, ou seja, $j(x) = \dfrac{5}{3} + \dfrac{-\frac{2}{9}}{x - \frac{2}{3}}$

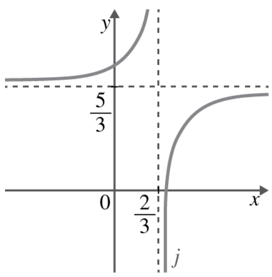
(ii) $D_j = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

(iii) Equação da assíntota vertical: $x = \dfrac{2}{3}$

Equação da assíntota horizontal: $y = \dfrac{5}{3}$

(iv) $D'_j = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$

(v)



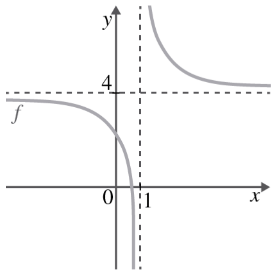
3.1.

$$\begin{array}{r|l} 3x-1 & x-1 \\ \hline -3x+3 & 3 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$f(x) = 1 + 3 + \dfrac{2}{x-1}$, ou seja, $f(x) = 4 + \dfrac{2}{x-1}$.

Temos que, $a = 4, b = 2$ e $c = 1$.

3.2. As equações das assíntotas ao gráfico de *f* são: $x = 1$ e $y = 4$.



O gráfico da função *g* pode obter-se a partir do gráfico da função *f* pela translação de vetor $\vec{u}(3, -2)$.

As equações das assíntotas ao gráfico de *f* são: $x = 1$ e $y = 4$, portanto, $x = 4$ e $y = 2$ são as equações das assíntotas ao gráfico de *g*.

4.1. $\dfrac{x^2 - 5x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \wedge x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-5) = 0 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x - 5 = 0) \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 5) \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$

$S = \{0, 5\}$

4.2. $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \wedge x^2 + 2x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2} \wedge x(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \wedge (x \neq 0 \wedge x + 2 \neq 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = \dfrac{1+3}{2} \vee x = \dfrac{1-3}{2}\right) \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq -2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 2 \vee x = -1) \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq -2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$

$S = \{-1, 2\}$

4.3. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{x-3} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x-3) + x^2}{x(x-3)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x - 6 + x^2}{x(x-3)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 6 = 0 \wedge x(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times (-6)}}{2} \wedge (x \neq 0 \wedge x - 3 \neq 0)$

$S = \left\{-1 - \sqrt{7}, -1 + \sqrt{7}\right\}$

4.4. $\dfrac{x}{x^2 - 4} = \dfrac{1}{2 - x} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2 - 4} - \dfrac{1}{2 - x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2 - 4} + \dfrac{1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{(x-2)(x+2)} + \dfrac{1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x + x + 2}{(x-2)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x + 2}{(x-2)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \wedge (x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1 \wedge (x \neq 2 \wedge x \neq -2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1$

$S = \{-1\}$

4.5. $x^2 = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - \dfrac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3-1}{x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 - 1 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$

$S = \{1\}$

4.6. $\dfrac{2}{(x+2)^2} = \dfrac{4x}{(x+2)^3} \Leftrightarrow \dfrac{2}{(x+2)^2} - \dfrac{4x}{(x+2)^3} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(x+2)-4x}{(x+2)^3} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+4-4x}{(x+2)^3} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 - 2x = 0 \wedge (x+2)^3 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 4 \wedge x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2$

$S = \{2\}$

4.7. $\dfrac{x+2}{2x-x^2} + \dfrac{x}{x-2} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x(2-x)} - \dfrac{x}{2-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+2-x^2-2x(2-x)}{x(2-x)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+2-x^2-4x+2x^2}{x(2-x)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x+2}{x(2-x)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \wedge x(2-x) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\times 2}}{2} \wedge (x \neq 0 \wedge 2 - x \neq 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = \dfrac{3+1}{2} \vee x = \dfrac{3-1}{2}\right) \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 2 \vee x = 1) \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1$

$S = \{1\}$

4.8. $\dfrac{1-x}{x-2} = x + 1 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x-2} - (x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-x-(x+1)(x-2)}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-x-x^2+2x-x+2}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+3}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2 + 3 = 0 \wedge x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 3 \wedge \Leftrightarrow x \neq 2 \Leftrightarrow \left(x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}\right) \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$

$S = \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$

4.9. $2 - \dfrac{3}{x^2-x} = -\dfrac{3}{x} \Leftrightarrow 2 - \dfrac{3}{x(x-1)} + \dfrac{3}{x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x(x-1)-3+3(x-1)}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2-2x-3+3x-3}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2+x-6}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 6 = 0 \wedge x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times 2\times(-6)}}{2\times 2} \wedge (x \neq 0 \wedge x - 1 \neq 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm 7}{4} \wedge (x \neq 0 \wedge x - 1 \neq 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \left(\dfrac{-1-7}{4} \vee x = \dfrac{-1+7}{4}\right) \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = -2 \vee x = \dfrac{3}{2}\right) \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = \dfrac{3}{2}$

$S = \left\{-2, \dfrac{3}{2}\right\}$

5.1. $\dfrac{4-x^2}{x^2-2x} \geq \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{4-x^2}{x(x-2)} - \dfrac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{4-x^2-(x-2)}{x(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{4-x^2-x+2}{x(x-2)} \Leftrightarrow \dfrac{-x^2-x+6}{x(x-2)} \geq 0$

- Zeros do numerador

  $-x^2 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times(-1)\times 6}}{2(-1)} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{-2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$

- Zeros do denominador

  $x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

x	$-\infty$	-3		0		2	$+\infty$
$-x^2-x+6$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x(x-2)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\dfrac{-x^2-x+6}{x(x-2)}$	$-$	0	$+$	n.d.	$-$	n.d.	$-$

Assim, o conjunto-solução da inequação $\dfrac{4-x^2}{x^2-2x} \geq \dfrac{1}{x}$, é

$S = [-3, 0[$.

5.2. $2x < \dfrac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow 2x - \dfrac{x+2}{x-1} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x(x-1)-(x+2)}{x-1} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2-2x-x-2}{x-1} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2-3x-2}{x-1} < 0$

- Zeros do numerador

  $2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} \vee x = 2$

- Zeros do denominador

  $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1		2	$+\infty$
$2x^2-3x-2$	+	0	–	–	–	0	+
$x-1$	–	–	–	0	+	+	+
$\frac{2x^2-3x-2}{x-1}$	–	0	+	n.d.	–	0	+

Assim, o conjunto-solução da inequação $2x < \frac{x+2}{x-1}$ é,

$S = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]1, 2\right[$

5.3. ■ Zeros do numerador:

$(3-x)^3 = 0 \Leftrightarrow 3-x=0 \Leftrightarrow x=3$

■ Zeros do denominador:

$x^2(x+1)^3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee (x+1)^3 = 0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x+1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$

x	$-\infty$	-1		0		3	$+\infty$
$(3-x)^3$	+	0	–	–	–	0	+
$x^2(x+1)^3$	–	0	+	0	+	+	+
$\frac{(3-x)^3}{x^2(x+1)^3}$	–	n.d.	+	n.d.	+	0	+

Assim, o conjunto-solução da inequação $\frac{(3-x)^3}{x^2(x+1)^3} > 0$ é,

$S = \left]-1, 0\right[\cup \left]0, 3\right[$.

5.4. $\frac{1}{x+1} + \frac{2x^2-x-1}{1-x^2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{2x^2-x-1}{(1-x)(1+x)} \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1-x+2x^2-x-1}{(1-x)(1+x)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-2x}{(1-x)(1+x)} \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-2x(1-x)}{(1-x)(1+x)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{1+x} \le 0 \wedge x \ne 1$

■ Zero do numerador:

$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

■ Zeros do denominador:

$1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$-2x$	+	+	+	0	–	–	–
$1+x$	–	0	+	+	+	+	+
$\frac{-2x}{1+x}$	–	n.d.	+	0	–	n.d.	–

Assim, o conjunto-solução da inequação:

$\frac{1}{x+1} + \frac{2x^2-x-1}{1-x^2} \le 0$ é $S = \left]-\infty, -1\right[\cup [0, 1[\cup \left]1, +\infty\right[$

6. $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1} - 2x = \frac{x^2-3x+2-2x(x-1)}{x-1} =$

$= \frac{x^3-3x+2-2x^2+2x}{x-1} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x-1}$

■ Zeros de f:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3-2x^2-x+2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0 \wedge x-1 \ne 0$

No polinómio $P(x) = x^3-2x^2-x+2$ tiver uma raiz inteira, será divisor do termo independente. Os divisores inteiros de 2 são: -2 , -1 , 1 e 2.
Verifica-se, por exemplo, que $p(-1)=0$, logo, podemos fatorizar $P(x)$ utilizando a raiz -1 e a regra de Ruffini.
Assim, vem:

	1	–2	–1	2
–1		–1	3	–2
	1	–3	2	0

$P(x) = (x+1)(x^2-3x+2)$

$x^3-2x^2-x+2=0 \wedge x-1 \ne 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-3x+2) = 0 \wedge x \ne 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1=0 \vee x^2-3x+2=0) \wedge x \ne 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x=-1 \vee x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2-4x^2}}{2}\right) \wedge x \ne 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x=-1 \vee x=\frac{3\pm1}{2}\right) \wedge x \ne 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=-1 \vee x=-2 \vee x=1) \wedge x \ne 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$

Então, os zeros de f são -1 e 2.

■ Sinal de f:

Construindo uma tabela determinemos o sinal da expressão:

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
$x+1$	–	0	+	+	+	+	+
x^2-3x+2	+	+	+	0	–	0	+
$x-1$	–	–	–	0	+	+	+
$f(x)$	+	0	–	n.d.	–	0	+

Portanto:

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]2, +\infty\right[$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1, 1\right[\cup \left]1, 2\right[$

7.1. O instante em que a árvore foi plantada corresponde a $t=0$, pelo que $a(0) = \frac{8\times0+1}{0+4} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Portanto, a árvore no instante em que foi plantada, tinha 0,25 metros, ou seja, 25 centímetros de altura.

7.2. 3 anos e nove meses corresponde a 3,75 anos.

Assim:

$a(3,75) = \frac{8\times3,75+1}{3,75+4} = 4$

Portanto, nesse instante a árvore tinha 4 metros de altura.

7.3. Temos que $a(6) = \frac{8\times6+1}{6+4} = 4,9$

O valor pedido é dado pela diferença $a(6)-a(0)$

Assim:

$a(6)-a(0) = 4,9-0,25 = 4,65$

Portanto, aos primeiros 6 anos após ter sido plantada a árvore cresceu 4,65 metros.

7.4. Pretende-se determinar *t* tal que $a(t)=6,45$.

Assim:

$a(t)=6,45 \Leftrightarrow \frac{8t+1}{t+4}=6,45 \Leftrightarrow \frac{8t+1}{t+4}-6,45=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{8t+1-6,45(t+4)}{t+4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{8t+1-6,45t-25,8}{t+4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1,55t-24,8}{t+4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1,55t-24,8=0 \wedge t+4 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\frac{24,8}{1,55} \wedge t \neq -4 \Leftrightarrow t=16$

Decorreram 16 anos.

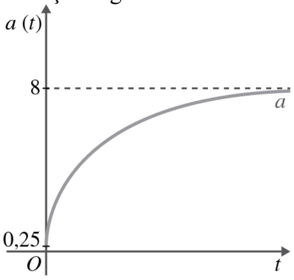
7.5. Temos que:

$$\begin{array}{r|l} 8t+1 & t+4 \\ \cline{2-2} -8t-32 & 8 \\ \hline -31 & \end{array}$$

$a(t)=8-\frac{31}{t+4}$

- Equação da assíntota horizontal: $y=8$
- Não tem assíntota vertical
- $D_a=\mathbb{R}_0^+$

Esboço do gráfico de *a*:



A equação da assíntota ao gráfico de *a* é $y=8$, significa que com o decorrer do tempo, a altura da árvore tende a estabilizar aos 8 metros.

8.1. A reta de equação $y=2$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*, portanto $a=2$.

A reta de equação $x=3$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*, portanto $c=3$.

Assim, temos: $f(x)=2+\frac{b}{x-3}$

Como $A\left(0,\frac{4}{3}\right)$ pertence ao gráfico de *f*, vem que:

$f(0)=\frac{4}{3} \Leftrightarrow 2+\frac{b}{0-3}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-\frac{b}{3}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow 2-\frac{4}{3}=\frac{b}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}=\frac{b}{3} \Leftrightarrow b=2$

Logo, $a=2, b=2$ e $c=3$

8.2. $f(x)=0 \Leftrightarrow 2+\frac{2}{x-3}=0 \Leftrightarrow \frac{2(x-3)+2}{x-3}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2x-4}{x-3}=0 \Leftrightarrow 2x-4=0 \wedge x-3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x=2 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x=2$

Logo, $B(2,0)$

8.3. $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2] \cup]3,+\infty[$

8.4. **a)** $\lim f(u_n)=\lim f(1-n)=\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=2$

b) $\lim f(v_n)=\lim f\left(\frac{1+3n}{n}\right)=\lim f\left(3+\frac{1}{n}\right)$

$=\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)=+\infty$

9.1. $f(x) \geq x \wedge x>0 \Leftrightarrow \frac{3x}{x+1} \geq x \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3x}{x+1}-x \geq 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3x-x(x+1)}{x+1} \geq 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3x-x^2-x}{x+1} \geq 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow \frac{2x-x^2}{x+1} \geq 0 \wedge x>0$

- Zeros de $2x-x^2$

  $2x-x^2=0 \Leftrightarrow x(2-x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

- Zeros de $x+1$

  $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Vamos, agora, construir uma tabela, mas tendo em conta que $x>0$.

x	0		2	$+\infty$
$2x-x^2$		+	0	–
$x+1$		+	+	+
$\frac{2x-x^2}{x+1}$		+	0	–

Portanto, $\frac{2x-x^2}{x+1} \geq 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow x \in]0,2]$

9.2. $(g \circ f)(-1)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow g[f(-1)]=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g\left(\frac{-3 \times (-1)+6}{(-1)^2-3 \times (-1)+2}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g\left(\frac{9}{6}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow g\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k \times \frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}k=-\frac{1}{2}-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}k=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow k=-1$

Portanto, $k=-1$.

9.3.
- Em $+\infty$:

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{x+1}=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{x}=3$

  Portanto, a reta de equação $y=3$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* em $+\infty$.

- Em $-\infty$:

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-3x+6}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-3x}{x^2}=\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-3}{x}=0$

  Portanto, a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* em $-\infty$.

As equações das assíntotas não verticais ao gráfico de *f* são $y=3$ e $y=0$.

10.1. $f(x) \le g(x) \Leftrightarrow \frac{6-x}{x-2} \le \frac{4-x}{x+2} \Leftrightarrow \frac{6-x}{x-2} - \frac{4-x}{x+2} \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(6-x)(x+2)-(4-x)(x-2)}{(x-2)(x+2)} \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{6x+12-x^2-2x-4x+8+x^2-2x}{(x-2)(x+2)} \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-2x+20}{(x-2)(x+2)} \le 0$

- Zeros do numerador: $-2x+20=0 \Leftrightarrow x=10$
- Zeros do denominador:
$(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$

x	$-\infty$	-2		2		10	$+\infty$
$-2x+20$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x-2)(x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-2x+20}{(x-2)(x+2)}$	$+$	n.d.	$-$	n.d.	$+$	0	$-$

Logo, $\frac{-2x+20}{(x-2)(x+2)} \le 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 2[\cup [10, +\infty[$

10.2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{6-x}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} = -1$, de modo análogo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

Por outro lado, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4-x}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} = -1$.

De modo análogo $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$.

Portanto, quer o gráfico de *f*, quer o gráfico de *g*, admitem a reta de equação $y=-1$, como assíntota horizontal.

11.1. Recorrendo ao algoritmo da divisão, temos:

$$\begin{array}{r|l} 4x^2+0x+3 & 2x+1 \\ \cline{2-2} -4x^2-2x & 2x-1 \\ \hline -2x+3 & \\ 2x+1 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$f(x) = 2x-1+\frac{4}{2x+1}$

11.2. ■ $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x+1 \ne 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} \frac{4x^2+3}{2x+1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to-\frac{1}{2}^-} \frac{4x^2+3}{2x+1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

Portanto, a reta de equação $x=-\frac{1}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico de *f* e é a única assíntota vertical, uma vez que a função *f* é contínua

Por outro lado, temos que *f* pode ser definida por $f(x) = 2x-1+\frac{4}{2x+1}$ e como:

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{2x+1} = 0^+$

$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{2x+1} = 0^-$

Podemos concluir que a reta de equação $y=2x-1$ é assíntota não vertical ao gráfico de *f* em $-\infty$ e em $+\infty$.

■ $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x-4 \ne 0\} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$\lim_{x\to4^+} g(x) = \lim_{x\to4^+}\left(-2+\frac{2-3x}{x-4}\right) = -2+\lim_{x\to4^+} = \frac{2-3x}{x-4} =$

$= -2+\frac{-10}{0^+} = -2+(-\infty) = -\infty$

$\lim_{x\to4^-} g(x) = \lim_{x\to4^-}\left(-2+\frac{2-3x}{x-4}\right) = -2+\lim_{x\to4^-} \frac{2-3x}{x-4} =$

$= -2+\frac{-10}{0^-} = -2+(+\infty) = +\infty$

Portanto, a reta de equação $x=4$ é assíntota vertical ao gráfico de *g* e é a única assíntota vertical, uma vez que a função *g* é contínua .

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{2-3x}{x-4}\right) = -2+\lim_{x\to+\infty} \frac{2-3x}{x-4} =$

$= -2+\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{x} = -2-3 = -5$

De modo análogo, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -5$.

Portanto, a reta de equação $y=-5$ é assíntota horizontal ao gráfico de *g* em $+\infty$ e em $-\infty$.

Equações das assíntotas ao gráfico:

f: $x=-\frac{1}{2}$ e $y=2x-1$

g: $x=4$ e $y=-5$

11.3. a) $g(x) \ge -1 \Leftrightarrow -2+\frac{2-3x}{x-4} \ge -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2-3x}{x-4} - 1 \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2-3x-x+4}{x-4} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{6-4x}{x-4} \ge 0$

- $6-4x=0 \Leftrightarrow 4x=6 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$
- $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		4	$+\infty$
$6-4x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{6-4x}{x-4}$	$-$	0	$+$	n.d.	$-$

Logo, $g(x) \ge -1 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, 4\right[$

$S = \left[\frac{3}{2}, 4\right[$

b) $f(x) < 2x \Leftrightarrow \frac{4x^2+3}{2x+1} < 2x \Leftrightarrow \frac{4x^2+3}{2x+1} - 2x < 0$

$\Leftrightarrow \frac{4x^2+3-4x^2-2x}{2x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{3-2x}{2x+1} < 0$

- $3-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$
- $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$3-2x$	+	+	+	0	–
$2x+1$	–	0	+	+	+
$\frac{3-2x}{2x+1}$	–	n.d.	+	0	–

Logo, $f(x) < 2x \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

$S = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

12.1. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{-1-2}{1+1} = \frac{1}{2}$

A reta de equação $x=1$ não é assíntota vertical ao gráfico de *f* e, portanto, a afirmação é falsa.

12.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \wedge x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)=0 \wedge (x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1 \vee x-2) \wedge (x \neq 1 \wedge x \neq -1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2$

Portanto, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

13.1. $g(x) = \frac{x+1}{|x|} = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{se } x>0 \\ \frac{x+1}{-x} & \text{se } x<0 \end{cases}$

Assim;

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$

Portanto, a reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal ao gráfico de *g* em $+\infty$, logo $a=1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{-x} = -1$

Portanto, a reta de equação $y=-1$ é assíntota horizontal ao gráfico de *g* em $-\infty$, logo $b=-1$.

Logo, $a=1$ e $b=-1$.

13.2. Por análise do gráfico de *g* verifica-se que a função toma valores negativos ou nulos para valores de *x* menores que zero, assim, vem:

x		-1		0
$x+1$	–	0	+	
$-x$	+	+	+	
$g(x)$	–	0	+	

$\frac{x+1}{-x} \leq 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -1\right]$

Ficha de teste 9 **Págs. 90 e 91**

1. A função *g* não tem zeros quando o seu gráfico for obtido a partir do gráfico de *f* pela translação de vetor $\vec{u}(0, 2)$, ou seja, quando $g(x) = f(x)+2$. Portanto, $k=-2$.

Resposta: **(C)**

2. Sabemos que:

$f(x) = 2 + \frac{a}{x+3}$

$g(x) = -1 + f(x-2) = -1+2+\frac{a}{x-2+3}$

$= 1 + \frac{a}{x+1} = \frac{x+1+a}{x+1}$

Logo, pode ser $g(x) = \frac{x+3}{x+1}$, sendo $a+1=3$.

Resposta: **(B)**

3. As funções desta família são injetivas, pelo que objetos diferentes têm imagens diferentes.

Assim, e caso o contradomínio seja diferente de $\mathbb{R}\setminus\{5\}$ a equação $f(x)=5$, tem exatamente uma solução, já que no caso em que o contradomínio é igual a $\mathbb{R}\setminus\{5\}$ a equação $f(x)=5$ não tem solução.

Resposta: **(C)**

4. A função *f* tem domínio $\mathbb{R}^+$ e a reta de equação $y=-2x$ é assíntota ao seu gráfico, pelo que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$, ou seja,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{f(x)} = -\frac{1}{2}$.

Por outro lado:

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+2x] = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Resposta: **(D)**

5. Sejam *x* e *y* as medidas do comprimento dos lados diferentes do retângulo.

Como o perímetro do retângulo é igual a 40 cm, temos:

$40 = 2x+2y \Leftrightarrow 20 = x+y \Leftrightarrow y = 20-x$

Por outro lado, temos que, a área *A*, em cm², do retângulo é igual a:

$A = xy \Leftrightarrow A = x(20-x) \Leftrightarrow A = 20x - x^2$

Resposta: **(D)**

6.1.
- $D_g = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$
- Assíntotas verticais

A função *g* é contínua.

$\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^4-5x^2-12}{x^2-1} = \frac{-16}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{x^4-5x^2-12}{x^2-1} = \frac{-16}{0^-} = +\infty$

Logo, a reta de equação $x=1$ é assíntota vertical ao gráfico de *g*.

$\lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{x^4-5x^2-12}{x^2-1} = \frac{-16}{0} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \frac{x^4-5x^2-12}{x^2-1} = \frac{-16}{0^+} = -\infty$

Logo, a reta de equação $x=-1$ é assíntota vertical ao gráfico de *g*.

■ Assíntotas não verticais

■ Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^4-5x^2-12}{x^2-1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-5x^2-12}{x^3-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^3}$$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, como $m \notin \mathbb{R}$, então o gráfico de g não admite assíntota não vertical, em $+\infty$.

■ Em $-\infty$:

De modo análogo,

$m = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, $m \notin \mathbb{R}$, pelo que o gráfico de g não admite assíntota não vertical, em $-\infty$.

As retas de equações $x=-1$ e $x=1$ são as assíntotas verticais ao gráfico de g e este não admite assíntotas não verticais.

6.2. **(i)**

$$\begin{array}{r|l} -8x+2 & -2x+1 \\ \cline{2-2} 8x-4 & 4 \\ \hline -2 & \end{array}$$

$$f(x) = 4 - \frac{2}{-2x+1} = 4 + \frac{1}{x-\frac{1}{2}}$$

(ii) $D_f = \mathbb{R}\left\{\frac{1}{2}\right\}$

(iii) Equação da assíntota vertical: $x = \frac{1}{2}$

Equação da assíntota horizontal: $y = 4$

(iv) $D'_f = \mathbb{R}\setminus\{4\}$

(v) ■ Interseção com o eixo Ox

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2-8x}{1-2x} \Leftrightarrow 2-8x=0 \Leftrightarrow 1-2x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow 8x=2 \wedge 2x\neq 1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\wedge x\neq\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$$

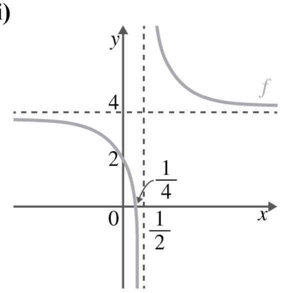
O ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox tem coordenadas $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

■ Interseção com o eixo Oy :

$$f(0)=\frac{2-8\times 0}{1-2\times 0} \Leftrightarrow f(0)=2$$

O ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy tem coordenadas $(0, 2)$.

(vi)



6.3. **a)** $f(x)=x+5 \Leftrightarrow \frac{2-8x}{1-2x}=x+5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2-8x}{1-2x}-(x+5)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-8x-(x+5)(1-2x)}{1-2x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-8x-x+2x^2-5+10x}{1-2x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+x-3}{1-2x}=0 \Leftrightarrow 2x^2+x-3=0 \wedge 1-2x\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 2\times(-3)}}{2\times 2}\wedge x\neq\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x=\frac{-1+5}{4}\vee x=\frac{-1-5}{4}\right)\wedge x\neq\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x=1\vee x=-\frac{3}{2}\right)\wedge x\neq\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1\vee x=-\frac{3}{2}$$

$$S=\left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$$

b) $g(x)\leq 3 \Leftrightarrow \frac{x^4-5x^2-12}{x^2-1}\leq 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4-5x^2-12}{x^2-1}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4-5x^2-12-3(x^2-1)}{x^2-1}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4-5x^2-12-3x^2+3}{x^2-1}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4-8x^2-9}{x^2-1}\leq 0$$

■ Zeros do numerador:

$$x^4-8x^2-9=0 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^2-8x^2-9=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\times(-9)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{8\pm\sqrt{100}}{2} \Leftrightarrow x^2=\frac{8+10}{2}\vee x^2=\frac{8-10}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=9\vee x^2=-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-3\vee x=3$$

$$x^4-8x^2-9=0 \Leftrightarrow (x^2-9)(x^2+1)$$

■ Zeros do numerador

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1\vee x=1$$

x	$-\infty$	-3		-1		1		3	$+\infty$
x^2-9	+	0	–	–	–	–	–	0	+
x^2+1	+	+	+	+	+	+	+	+	+
x^2-1	+	+	+	0	–	0	+	+	+
Q	+	0	–	n.d.	+	n.d.	–	0	+

O conjunto-solução da condição $g(x)\leq 3$ é, portanto,

$$S=[-3, -1[\cup]1, 3]$$

7.1. $f(3)-f(0)=$

$=\frac{14{,}5\times 3+22{,}5}{3+1}-\frac{22{,}5}{1}$

$=16{,}5-22{,}5$

$=-6$

Nas primeiras 3 semanas a população de coelhos reduziu-se em 6000.

7.2. Pretende-se determinar *t* tal que:

$f(t)>16 \wedge t\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{14{,}5+22{,}5}{t+1}>16 \wedge t\geq 0 \Leftrightarrow$ (16 000 = 16 milhares)

$\Leftrightarrow \frac{14{,}5t+22{,}5}{t+1}-16>0 \wedge t\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{14{,}5t+22{,}5-16(t+1)}{t+1}>0 \wedge t\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{14{,}5t+22{,}5-16t-16}{t+1}>0 \wedge t\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-1{,}5t+6{,}5}{t+1}>0 \wedge t\geq 0$

- Zeros do numerador:

  $-1{,}5t+6{,}5=0 \Leftrightarrow t=\frac{6{,}5}{1{,}5} \Leftrightarrow t=\frac{13}{3}$

- Zeros do denominador:

  $t+1=0 \Leftrightarrow t=-1$

Construindo uma tabela de sinais e tendo em conta que $t\geq 0$, vem:

x	0		$\frac{13}{3}$	$+\infty$
$-1{,}5t+6{,}5$	$+$	$+$	0	$-$
$t+1$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-\frac{1{,}5t+6{,}5}{t+1}$	$+$	$+$	0	$-$

Portanto, $f(t)>16 \Leftrightarrow t\in\left[0,\frac{13}{3}\right[$.

Por outro lado, temos que $\frac{13}{3}\approx 4{,}3333$, ou seja, 4,3333 semanas é igual a $(4{,}3333\times 7)$ dias $\approx 30{,}3331$ dias.

Logo, o número de coelhos existentes na referida região, após a doença ter sido detetada, foi superior a 16 000, durante, aproximadamente um mês.

Ficha para praticar 19 **Págs. 92 a 95**

1.1. $\text{t.m.v.}_{(f\,,-3\,,-1)}=\dfrac{f(-1)-f(-3)}{-1-(-3)}=$

$=\dfrac{\left(2(-1)-(1)^2\right)-\left(2(-3)-(-3)^2\right)}{-1+3}=\dfrac{-3-(-15)}{2}=\dfrac{12}{2}=6$

A taxa média de variação de *f* entre –3 e –1 é igual a 6.

1.2. $\text{t.m.v.}_{(f\,,2a\,,a)}=\dfrac{f(a)-f(2a)}{a-2a}=$

$=\dfrac{\left(2a-a^2\right)-\left(2\times 2a-(2a)^2\right)}{-a}=\dfrac{2a-a^2-4a+4a^2}{-a}$

$=\dfrac{3a^2-2a}{-a}=\dfrac{a(3a-2)}{-a}=2-3a$

2.1. O declive da reta *AB* é igual à taxa média de variação de *f* entre –2 e 3.

Portanto, temos que:

$\text{t.m.v.}_{(f\,,-2\,,3)}=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow\dfrac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{\left(k\times 3^2-3+1\right)-\left(k\times(-2)^2-(-2)+1\right)}{5}=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{(9k-2)-(4k+3)}{5}=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{5k-5}{5}=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow k-1=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=-\dfrac{5}{2}+1\Leftrightarrow k=-\dfrac{3}{2}$

Logo, $k=-\dfrac{3}{2}$.

2.2. A ordenada do ponto *A* é igual a:

$f(-2)=-\dfrac{3}{2}\times(-2)^2-(-2)+1=-3$

e a ordenada do ponto *B* é igual a:

$f(3)=-\dfrac{3}{2}(3)^2-3+1=-\dfrac{31}{2}$

Logo, $A(-2\,,-3)$ e $B\left(3\,,-\dfrac{31}{2}\right)$.

O declive da reta *AB* é igual a

$\dfrac{-\frac{31}{2}-(-3)}{3-(-2)}=\dfrac{-\frac{31}{2}+3}{3+2}=\dfrac{-\frac{25}{2}}{5}=-\dfrac{5}{2}$

O declive da reta *t*, m_t, é tal que:

$m_t\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)=-1\Leftrightarrow m_t=\dfrac{2}{5}$

Assim, a equação reduzida da reta *t* é da forma $y=\dfrac{2}{5}x+b$.

Como o ponto $C(-3\,,0)$ pertence à reta *t*, temos que:

$0=\dfrac{2}{5}\times(-3)+b\Leftrightarrow b=\dfrac{6}{5}$

Portanto, $y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{6}{5}$ é a equação reduzida da reta *t*.

3.1. $f'(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3-\left(2^2+3\right)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3-7}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$

Portanto, $f'(2)=4$.

3.2. $g'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+x-2-\left(2\times(-1)^3+(-1)-2\right)}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+x-2+5}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+x+3}{x+1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & & -2 & 2 & -3 \\ \hline & 2 & -2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\left(2x^2-2x+3\right)}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1}\left(2x^2-2x+3\right)=2\times(-1)^2-2(-1)+3=7$

Portanto, $g'(-1)=7$

3.3. $h'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{3x}{x+2}-\frac{3\times 1}{1+2}}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{3x}{x+2}-1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{3x-(x+2)}{x+2}}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{3x-x-2}{x+2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{(x-1)(x+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)}{(x-1)(x+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{2}{1+2}=\dfrac{2}{3}$

Portanto, $h'(1)=\dfrac{2}{3}$

3.4. $j'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{j(x)-j(0)}{x-0}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{\sqrt{2x+4}-\sqrt{2\times 0+4}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2x+4}-2\right)\left(\sqrt{2x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{2x+4}+4\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2x+4}\right)^2-2^2}{x\left(\sqrt{2x+4}+2\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+4-4}{x\left(\sqrt{2x+4}+2\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x\left(\sqrt{2x+4}+2\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{2x+4}+2}=$

$=\dfrac{2}{\sqrt{2\times 0+4}+2}=\dfrac{1}{2}$

Portanto, $j'(0)=\dfrac{1}{2}$.

4.1. O declive *m* da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa $x=2$ é igual a $f'(2)$.

Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, temos que:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=$$

$$f(x)=x(3-x)=3x-x^2$$
$$f(2)=6-4=2$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3x-x^2-2}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\times(x+1)}{\cancel{(x-2)}}=$$

$$=-2+1=-1$$

	–1	3	–2
2		–2	2
	1	1	0

Por outro lado, temos que o ponto de tangência é $(2\,,\,f(2))$, ou seja, $(2\,,2)$.

Uma equação da reta *s* é:

$y-2=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=-1(x-2)+2\Leftrightarrow y=-x+4$

Logo, $y=-x+4$ é a equação reduzida da reta *s*.

4.2. Determinamos as coordenadas do ponto *P*.

$$\begin{cases}y=f(x)\\ y=g(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\ x(3-x)=\dfrac{2}{x}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\ 3x-x^2=\dfrac{2}{x}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\ \dfrac{3x^2-x^3}{x}=\dfrac{2}{x}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\ x^3-3x^2+2=0\wedge x\neq 0\end{cases}\qquad\textbf{(1)}$$

Vamos fatorizar o polinómio $P(x)=x^3-3x^2+2$.

Se o polinómio tiver raízes inteiras estas são os divisores de 2, ou seja, –2, –1, 1 e 2.

Tem-se que $P(1)=0$, portanto 1 é raiz de $P(x)$.

Recorrendo à regra de Ruffini, vem que:

	1	–3	0	2
1		1	–2	–2
	1	–2	–2	0

Logo, $P(x)=(x-1)(x^2-2x-2)$

Voltando a **(1)**, vem:

$$\begin{cases}y=f(x)\\ (x-1)(x^2-2x-2)\wedge x\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\ x=1\vee x=1+\sqrt{3}\vee x=1-\sqrt{3}\end{cases}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(-2)}}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{2+\sqrt{12}}{2}\vee x=\frac{2-\sqrt{12}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=1+\sqrt{3}\vee x=1-\sqrt{3}$$

Contudo, pretende-se o ponto do 1.º quadrante com abcissa inteira.

Esse ponto tem, então, abcissa igual a 1.

A sua ordenada é igual a $f(1)$, ou $g(1)$, isto é, igual a 2, portanto, $P(1\,,2)$.

O declive da reta *t* é igual a $g'(1)$.

Assim, vem que:

$$g'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{x}-2}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2-2x}{x}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2-2x}{x(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2(x-1)}{x(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2}{x}=-2$$

Por outro lado, temos que, sendo o declive da reta *t* igual a -2 , um vetor diretor desta reta, é, por exemplo, $\vec{t}\,(1\,,-2)$.

Assim, $(x\,,\,y)=(1\,,2)+k(1\,,-2),\,k\in\mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta *t*.

5. Temos que $f(x)=|x+3|=\begin{cases}x+3 & \text{se } x\geq -3\\ -(x+3) & \text{se } x<-3\end{cases}$

Para estudar a existência de $f'(-3)$ temos de calcular as derivadas laterais.

Assim:

$$f'(-3^+)=\lim_{x\to -3^+}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}=$$

$$=\lim_{x\to -3^+}\frac{x+3-0}{x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x+3}=1$$

$$f'(-3^-)=\lim_{x\to -3^-}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}=$$

$$=\lim_{x\to -3^-}\frac{-(x+3)-0}{x+3}=$$

$$=\lim_{x\to -3^-}\frac{-(x+3)}{x+3}=-1$$

Dado que $f'(-3^-)\neq f'(-3^+)$, *f* não é derivável no ponto de abcissa –3 pelo que não existe derivada de *f* em $x=-3$.

6.1. A velocidade média do ponto *P* nos quatro primeiros segundos é igual a:

$$\frac{d(4)-d(0)}{4-0}=\frac{0{,}8\times 4^2+4-0}{4}=\frac{16{,}8}{4}=4{,}2$$

Portanto, a velocidade média pedida é igual a 4,2 cm/s.

6.2. A velocidade de *P* no instante $t=1$ é igual a $d'(1)$. Assim:

$$d'(1)=\lim_{t\to 1}\frac{d(t)-d(1)}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{0{,}8t^2+t-1{,}8}{t-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\qquad\textbf{(1)}$$

Recorrendo à regra de Ruffini e sabendo que 1 é raiz do polinómio $R(t)=0{,}8t^2+t-1{,}8$ vem:

	0,8	1	1,8
1		0,8	1,8
	0,8	1,8	0

$$R(t)=\frac{(t-1)(0{,}8t+1{,}8)}{t-1}=\lim_{t\to 1}(0{,}8t+1{,}8)=0{,}8\times 1+1{,}8=2{,}6$$

Portanto, a velocidade do ponto *P* no instante $t=1$ é igual a 2,6 cm/s.

Por outro lado, temos que $d(1)=0{,}8\times1^2+1=1{,}8$, pelo que, o ponto *P*, no instante $t=1$ encontra-se a 1,8 cm à direita da origem.

6.3. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{d(2+h)-d(2)}{h}=$

$$=\lim_{h\to0}\frac{0{,}8(2+h)^2+(2+h)-\left(0{,}8\times2^2+2\right)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{0{,}8\left(4+4h+h^2\right)+2+h-5{,}2}{h}=$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{3{,}2+3{,}2h+0{,}8h^2+2+h-5{,}2}{h}=$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{0{,}8h^2+4{,}2h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h(0{,}8h+4{,}2)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to0}(0{,}8h+4{,}2)=4{,}2$$

Como $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-d(2)}{h}=4{,}2$, significa que $d'(2)=4{,}2$, ou seja, que a velocidade do ponto *P* no instante $t=2$ s é igual a 4,2 cm/s.

7. $g'(-1)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}$

$$-\frac{3}{2}=\lim_{x\to-1}\frac{ax^2-2-\left(a\times(-1)^2-2\right)}{x+1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow-\frac{3}{2}=\lim_{x\to-1}\frac{ax^2-2-a+2}{x+1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow-\frac{3}{2}=\lim_{x\to-1}\frac{ax^2-a}{x+1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow-\frac{3}{2}=\lim_{x\to-1}\frac{a\left(x^2-1\right)}{x+1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow-\frac{3}{2}=\lim_{x\to-1}\frac{a(x+1)(x-1)}{x+1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow-\frac{3}{2}=\lim_{x\to-1}a(x-1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow-\frac{3}{2}=a(-1-1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow-\frac{3}{2}=-2a\Leftrightarrow a=\frac{3}{4}$$

Portanto, $a=\dfrac{3}{4}$

8.1. $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ e $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Seja $a\in D_f$, então:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{x}{x-2}-\frac{a}{a-2}}{x-a}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{x(a-2)-a(x-2)}{(x-2)(a-2)}}{x-a}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{ax-2x-ax+2a}{(x-2)(a-2)}}{x-a}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{2a-2x}{(x-2)(a-2)}}{x-a}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{2a-2x}{(x-a)(x-2)(a-2)}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{-2(x-a)}{(x-a)(x-2)(a-2)}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{-2}{(x-2)(a-2)}=$$
$$=\frac{-2}{(a-2)(a-2)}=\frac{-2}{(a-2)^2}$$

Portanto, $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-2)^2}$.

8.2. Uma equação da reta *s* é $y-f(-1)=f'(-1)(x-(-1))$.

$f(-1)=\dfrac{-1}{-1-2}=\dfrac{1}{3}$ e $f'(-1)=\dfrac{-2}{(-1-2)^2}=-\dfrac{2}{9}$,

Assim:

$$y-\frac{1}{3}=-\frac{2}{9}(x+1)\Leftrightarrow y=-\frac{2}{9}x-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\Leftrightarrow y=-\frac{2}{9}x+\frac{1}{9}$$

Portanto, $y=-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{1}{9}$ é a equação reduzida da reta *s*.

9.1. $f(x)=|2-2x|=\begin{cases}2-2x & \text{se } 2-2x\ge0\\-(2-2x) & \text{se } 2-2x<0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2-2x & \text{se } x\le1\\-(2-2x) & \text{se } x>1\end{cases}$$

- Para determinar $f'(1)$, temos que calcular as derivadas laterais, assim vem:

$$f'\left(1^+\right)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to1^+}\frac{-(2-2x)-0}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2x-2}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$
$$f'\left(1^-\right)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to1^-}\frac{2-2x-0}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to1^-}\frac{-2(x-1)}{x-1}=-2$$

Como $f'\left(1^+\right)\ne f'\left(1^-\right)$, não existe $f'(1)$, ou seja *f* não é diferenciável no ponto $x=1$.

- Por outro lado, a função *f* é contínua em $x=1$ se e só se existe $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left[-(2-2x)\right]=0$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(2-2x)=0=f(1)$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$, então existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, pelo que, *f* é contínua em $x = 1$.

9.2. ■ Temos que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0) = \sqrt{0} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\sqrt{-x}\right) = 0$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = g(0)$, existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, pelo que a função é contínua em $x = 0$.

■ Vejamos se *f* é diferenciável em $x = 0$.

$$g'\left(0^+\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{x\times\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = +\infty$$

$$g'\left(0^-\right) = \lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{-x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{-x}\times\sqrt{-x}}{x\sqrt{-x}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-(-x)}{x\sqrt{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{-x}} = \frac{1}{0^+} + \infty$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$, contudo e apesar de se escrever $g'(0) = +\infty$, a função não é diferenciável pois $g'(0)$ não é um número real. Logo, a proposição é falsa, já que a função *g* é contínua mas não é diferenciável no ponto de abcissa $x = 0$.

10.1. O declive da reta *t* é dado por:

$$f'(4) = \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$

Assim, tem-se:

$$\lim_{x\to 4}\frac{5x - x^2 - \left(5\times 4 - 4^2\right)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{5x - x^2 - 4}{x-4}$$

Recorrendo à regra de Ruffini, temos:

	–1	5	–4
4		–4	–4
	–1	1	0

Logo, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(-x+1)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4}(-x+1) = -4+1 = -3$

O declive da reta *t* é, portanto, –3.

Seja θ a inclinação da reta *t*, então,

$\tan\theta = -3 \wedge \theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, ou seja, $\theta \approx 1{,}9$ rad.

A inclinação da reta *t* é, aproximadamente, $1{,}9$ rad.

10.2. Sendo a reta *s* perpendicular à reta *t* de declive –3 é imediato que o declive da reta *s* é $\dfrac{1}{3}$.

Como a reta *s* passa pelo ponto $P(4, 4)$ então uma equação desta reta é:

$$y - 4 = \frac{1}{3}(x-4) \Leftrightarrow y - 4 = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} + 4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$$

Assim, $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}$ é a equação da reta *s*.

11.1.

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(1+\frac{1}{1}\right)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x+\frac{1}{x}-2}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{x^2+1-2x}{x}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x} = \frac{1-1}{1} = 0$$

Portanto, $f'(1) = 0$.

11.2. O declive da reta *s* é igual a $f'(2)$.

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(2+\frac{1}{2}\right)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x+\frac{1}{x}-\frac{5}{2}}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x^2+2-5x}{2x}}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{2x(x-2)}$$

Recorrendo à regra de Ruffini, temos:

	2	–5	2
4		4	–2
	2	–1	0

Logo, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(2x-1)}{2x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{2x} = \dfrac{2\times 2-1}{2\times 2} = \dfrac{3}{4}$

Assim, $y - f(2) = \dfrac{3}{4}(x-2)$ é uma equação da reta *s*, portanto, temos:

$$y - \frac{5}{2} = \frac{3}{4}(x-2) \Leftrightarrow y - \frac{5}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + 1$$

A equação reduzida da reta *s* é $y = \dfrac{3}{4}x + 1$.

Por outro lado: $0 = \dfrac{3}{4}x + 1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{3}$

Logo, $\left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$ são as coordenadas do ponto pedido.

12. A função *g* é contínua em $x = -2$ se e somente se existe $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ e por sua vez este limite existe quando $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = g(-2)$.

$g(x)=|x+2|=\begin{cases} x+2 & \text{se } x\geq -2 \\ -(x+2) & \text{se } x<-2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(x+2)=0=g(-2)$

$\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left[-(x+2)\right]=0$

Como $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)=g(-2)$, existe $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ e, consequentemente, a função *g* é contínua em $x=-2$.

Mostremos agora que *f* não é diferenciável em $x=-2$.

$f'(-2^+)=\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{x+2-0}{x+2}=1$

$f'(-2^-)=\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{-(x+2)-0}{x+2}=-1$

Como $f'(-2^+)\neq f'(-2^-)$, a função *f* não é diferenciável em $x=-2$.

13. $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{x-1}{(x-1)^3}}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^2}}=$

$=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}}=$

$=\sqrt[3]{\frac{1}{0^+}}=\sqrt[3]{+\infty}=+\infty$

Portanto, $f'(1)=+\infty$.

Significa que a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de coordenadas $(1\,,0)$ é uma reta vertical.

14.1. A afirmação é verdadeira.

14.2. A afirmação é falsa, uma vez que toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto.

14.3. A afirmação é verdadeira.

15. Como $f'(1)=3$, a função *f* tem derivada finita no ponto $x=1$, pelo que é contínua nesse ponto.

Portanto, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=-1$.

Assim:

$g'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-1)f(x)-(1^2-1)f(1)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-1)f(x)-0}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-1)f(x)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)f(x)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)f(x)=$

$=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)\times\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2\times(-1)=-2$

Portanto, $g'(1)=-2$.

16.1. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)-5}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=$

$=f'(-2)=4$

16.2. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x(x+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to -2}\left[\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}\times\frac{1}{x}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}\times\lim\limits_{x\to -2}\frac{1}{x}=$

$=f'(-2)\times\lim\limits_{x\to -2}\frac{1}{x}=$

$=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$

16.3. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{-12h}=$

$=-\frac{1}{12}\times\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=$

$=-\frac{1}{12}\times f'(-2)=-\frac{1}{12}\times 4=-\frac{1}{3}$

17.1. Hipótese:

Existe $f'(a)$, isto é, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ e é um número real.

Tese: *f* é contínua em $x=a$.

17.2. Para $x\in D_f\setminus\{a\}$, temos:

$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]=$

$=\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right]$

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim\limits_{x\to a}(x-a)=$

$=f'(a)\times 0=0$

Logo, $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]=0$, isto é, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ o que significa que *f* é contínua em $x=a$.

18. Como $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$ significa que *f* é contínua em $x=1$.

Por outro lado, pode então existir $f'(1)$ pois a continuidade não garante a diferenciabilidade, no entanto, pode existir, porque *f* é contínua em $x=1$.

Ficha para praticar 20 **Págs. 96 a 99**

1.1. $f'(x)=\left(\sqrt{2}x^3+3x\right)'=3\sqrt{2}x^2+3$

1.2. $g'(x)=\left[(1-4x)-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-5^2\right)\right]'=$

$=(1-4x)'-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-5^2\right)'=$

$=-4-\left(\frac{3x^2}{3}-\frac{2x}{2}-0\right)=$

$=-4-x^2+x=-x^2+4x-4$

1.3. $h'(x)=\left[(x+10)^2+5x(1-x)\right]'=$

$$=\left[(x+10)^2\right]'+\left[5x(1-x)\right]'=$$
$$=2(x+10)(x+10)'+(5x)'(1-x)+5x(1-x')=$$
$$=2(x+10)+5(1-x)+5x(-1)=$$
$$=2x+20+5-5x-5x=$$
$$=-8x+25$$

1.4. $$j'(x)=\left(\sqrt{x^2+2}\right)'=\frac{\left(x^2+2\right)'}{2\sqrt{x^2+2}}=$$
$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

1.5. $$p'(x)=\left(\frac{-2x+1}{2x^2+x-2}\right)'=$$
$$=\frac{(-2x+1)'\left(2x^2+x-2\right)-(-2x+1)\left(2x^2+x-2\right)'}{\left(2x^2+x-2\right)^2}=$$
$$=\frac{-2\left(2x^2+x-2\right)-(-2x+1)(4x+1)}{\left(2x^2+4-2\right)^2}=$$
$$=\frac{-4x^2-2x+4+8x^2+2x-4x-1}{\left(2x^2+x-2\right)^2}=$$
$$=\frac{4x^2-4x+3}{\left(2x^2+x-2\right)^2}$$

1.6. $$r'(x)=\left[\left(\frac{x}{x-1}\right)^3\right]'=3\left(\frac{x}{x-1}\right)^2\left(\frac{x}{x-1}\right)'=$$
$$=3\left(\frac{x}{x-1}\right)^2\left(\frac{x'(x-1)-x(x-1)'}{(x-1)^2}\right)=$$
$$=3\left(\frac{x}{x-1}\right)^2\left(\frac{x-1-x}{(x-1)^2}\right)=$$
$$=3\left(\frac{x}{x-1}\right)^2\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)=\frac{-3x^2}{(x-1)^3}$$

1.7. $$s'(x)=\left(\frac{x}{(2-x)^2}\right)'=\frac{x'(2-x)^2-x\left[(2-x)^2\right]}{\left[(2-x)^2\right]^2}=$$
$$=\frac{(2-x)^2-x\left(2(2-x)(2-x)'\right)}{(2-x)^4}=$$
$$=\frac{(2-x)^2-x\left(2(2-x)(-1)\right)}{(2-x)^4}=$$
$$=\frac{(2-x)^2+2x(2-x)}{(2-x)^4}=$$
$$=\frac{(2-x)\left[(2-x)+2x\right]}{(2-x)^4}=\frac{2+x}{(2-x)^3}$$

1.8. $$t'(x)=\left(\frac{\sqrt{1-x}}{2x+5}\right)'=\frac{\left(\sqrt{1-x}\right)'(2x+5)-\left(\sqrt{1-x}\right)(2x+5)'}{(2x+5)^2}=$$
$$=\frac{\frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}}(2x+5)-\left(\sqrt{1-x}\right)\times 2}{(2x+5)^2}=$$
$$=\frac{\frac{-(2x+5)}{2\sqrt{1-x}}-2\sqrt{1-x}}{(2x+5)^2}=$$
$$=\frac{-(2x+5)-4(1-x)}{2\sqrt{1-x}(2x+5)^2}=$$
$$=\frac{-2x-5-4+4x}{2\sqrt{1-x}(2x+5)^2}=\frac{2x-9}{2\sqrt{1-x}(2x+5)^2}$$

1.9. $$v'(x)=\left[\frac{4}{x-1}\times\left(2+\frac{3}{x}\right)\right]'=\left(\frac{4}{x-1}\times\frac{2x+3}{x}\right)'=$$
$$=\left(\frac{8x+12}{x^2-x}\right)=\frac{(8x+12)'\left(x^2-x\right)-(8x+12)\left(x^2-x\right)'}{\left(x^2-x\right)^2}=$$
$$=\frac{8\left(x^2-x\right)-(8x+12)(2x-1)}{\left(x^2-x\right)^2}=$$
$$=\frac{8x^2-8x-\left(16x^2-8x+24x-12\right)}{\left(x^2-x\right)^2}=$$
$$=\frac{8x^2-8x-16x^2+8x-24x+12}{\left(x^2-x\right)^2}=$$
$$=\frac{-8x^2-24x+12}{\left(x^2-x\right)^2}$$

1.10. $$w'(x)=\left(\frac{\sqrt{1+4x}+2}{\sqrt{x}}\right)'=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{1+4x}+2\right)'\sqrt{x}-\left(\sqrt{1+4x}+2\right)\times\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=$$
$$=\frac{\left(\frac{(1+4x)'}{2\sqrt{1+4x}}+0\right)\sqrt{x}-\left(\sqrt{1+4x}+2\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=$$
$$=\frac{\frac{4}{2\sqrt{1+4x}}\times\sqrt{x}-\frac{\sqrt{1+4x}+2}{2\sqrt{x}}}{x}=$$
$$=\frac{\frac{4\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}-2\sqrt{1+4x}\left(\sqrt{1+4x}+2\right)}{4\sqrt{x}\sqrt{1+4x}}}{x}=$$
$$=\frac{8x-2(1+4x)-4\sqrt{1+4x}}{4x\sqrt{x}\sqrt{1+4x}}=$$
$$=\frac{8x-2-8x-4\sqrt{1+4x}}{4x\sqrt{x}\sqrt{1+4x}}=$$
$$=-\frac{2+4\sqrt{1+4x}}{4x\sqrt{x}\sqrt{1+4x}}=-\frac{1+2\sqrt{1+4x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{1+4x}}$$

2.1. $$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)=x^2+\left(\frac{x^3}{3}-5x\right)'=$$
$$=x^2+\left(\frac{3x^2}{3}-5\right)=x^2+\left(x^2-5\right)=2x^2-5$$

Portanto, $(f+g)'(x)=2x^2-5$.

2.2. $(f\times g)'(2)=f'(2)\times g(2)+f(2)\times g'(2)=$

$$=2^2\times\left(\frac{2^3}{3}-5\times 2\right)+4\times\left(2^2-5\right)=$$

$$=4\times\left(\frac{8}{3}-10\right)+4\times(-1)=$$

$$=4\times\left(-\frac{22}{3}\right)-4=-\frac{88}{3}-4=-\frac{100}{3}$$

Portanto, $(f\times g)'(2)=-\dfrac{100}{3}$.

2.3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)=\dfrac{f'(2)\times g(2)-f(2)\times g'(2)}{\left(g(2)\right)^2}=$

$$=\frac{4\times\left(-\frac{22}{3}\right)-4\times(-1)}{\left(-\frac{22}{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{-\frac{88}{3}+4}{\frac{484}{9}}=\frac{-\frac{76}{3}}{\frac{484}{9}}=-\frac{57}{121}$$

Portanto, $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)=-\dfrac{57}{121}$.

3. O declive dessas retas é igual a zero, pelo que, se pretende determinar *x* tal que $h'(x)=0$, sendo os valores de *x* que verificam esta equação as abcissas dos pontos do gráfico de *h* onde as retas tangentes ao gráfico são paralelas ao eixo *Ox*.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left(x^3-9x^2+4\right)'=0\Leftrightarrow 3x^2-18x=0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x-6)=0\Leftrightarrow 3x=0\vee x-6=0\Leftrightarrow x=0\vee x=6$$

De facto há dois pontos do gráfico de *h* nas condições exigidas no enunciado são os pontos de abcissas 0 e 6.
Determinemos, agora, as equações das retas pedidas.

- Reta tangente ao gráfico de *h* no ponto de abcissa 0:
  $y-h(0)=h'(0)(x-0)$

Como $h(0)=4$ e $h'(0)=0$:

$y-4=0(x-0)\Leftrightarrow y=4$

- Reta tangente ao gráfico de *h* no ponto de abcissa 6:
  $y-h(6)=h'(6)(x-6)$

  Como $h(6)=-104$ e $h'(6)=0$:

  $y-(-104)=0(x-6)\Leftrightarrow y=-104$.

Portanto, as equações pedidas são $y=4$ e $y=-104$.

4.1.
- $f'(x)=\left(2x^4-x^2-2\right)'=8x^3-2x$
- $f'(x)=0\Leftrightarrow 8x^3-2x=0\Leftrightarrow 2x\left(4x^2-1\right)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x=0\vee 4x^2-1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0\vee x^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=0\vee x=-\frac{1}{2}\vee x=\frac{1}{2}$$

Portanto, $f'(x)=8x^3-2x$ e os zeros de f' são:

$x=0\vee x=-\dfrac{1}{2}\vee x=\dfrac{1}{2}$

4.2.
- $g'(x)=\left(2(3x+1)^2\right)'=2\left[(3x+1)^2\right]'=$

$$=2\left(2(3x+1)(3x+1)'\right)=2\left(2(3x+1)\times 3\right)=$$

$$=12(3x+1)=36x+12$$

- $g'(x)=0\Leftrightarrow 36x+12=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{12}{36}\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$

Portanto, $g'(x)=36x+12$ e o zero de g' é $x=-\dfrac{1}{3}$.

4.3.
- $h'(x)=\left(\dfrac{1}{x^2+3}\right)'=\dfrac{1'\times\left(x^2+3\right)-1\times\left(x^2+3\right)'}{x^2+3}=$

$$=\frac{-2x}{x^2+3}$$

- $h'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{-2x}{x^2+3}=0\Leftrightarrow -2x=0\wedge x^2+3\neq 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=0\wedge x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x=0$$

Portanto, $h'(x)=-\dfrac{2x}{x^2+3}$ e o zero de h' é $x=0$.

4.4.
- $y'(x)=\left(\dfrac{x}{(3-x)^2}\right)=\dfrac{x'(3-x)^2-x\left[(3-x)^2\right]'}{\left[(3-x)^2\right]^2}=$

$$=\frac{(3-x)^2-x\left(2(3-x)(3-x)'\right)}{(3-x)^4}=$$

$$=\frac{(3-x)^2-x\left(2(3-x)(-1)\right)}{(3-x)^4}=$$

$$=\frac{(3-x)^2+2x(3-x)}{(3-x)}=$$

$$=\frac{(3-x)\left[(3-x)+2x\right]}{(3-x)^4}=\frac{3+x}{(3-x)^3}$$

- $j(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{3+x}{(3-x)^3}=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3+x=0\wedge(3-x)^3\neq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-3\wedge x\neq 3\Leftrightarrow x=-3$$

Portanto, $j'(x)=\dfrac{3+x}{(3-x)^3}$ e o zero de j' é $x=-3$.

4.5.
- $p'(x)=\left[\left(2x-x^2\right)x\right]'=\left(2x^2-x^3\right)'=4x-3x^2$
- $p'(x)=0\Leftrightarrow 4x-3x^2=0\Leftrightarrow x(4-3x)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=0\vee 4-3x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{4}{3}$$

$p'(x)=4x-3x^2$ e os zeros de p' são $x=0$ e $x=\dfrac{4}{3}$.

4.6.
- $r'(x)=\left(1+\dfrac{2x}{x-3}\right)'=1'+\left(\dfrac{2x}{x-3}\right)'=$

$$=0+\frac{(2x)'(x-3)-2x(x-3)'}{(x-3)^2}=$$

$$=\frac{2(x-3)-2x\times 1}{(x-3)^2}=\frac{2x-6-2x}{(x-3)^2}=\frac{-6}{(x-3)^2}$$

- $r'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-6}{(x-3)^2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6=0 \wedge (x-3)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \varnothing$

Portanto, $r'(x)=-\dfrac{6}{(x-3)^2}$ e a função r' não tem zeros.

5.1. $f(x)=|x-1|+2=$

$=\begin{cases} x-1+2 & \text{se } x \geq 1 \\ -(x-1)+2 & \text{se } x<1 \end{cases}=$

$=\begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x+3 & \text{se } x<1 \end{cases}$

Vejamos se a função *f* é diferenciável em $x=1$, para tal determinemos as derivadas laterias.

$f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$

e

$f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x+3-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x+1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x-1)}{x-1}=-1$

Como $f'(1^+)\neq f'(1^-)$, podemos concluir que *f* não é diferenciável em $x=1$, ou seja, que $f'(1)$ não existe, portanto $1 \notin D'_f$.

Por outro lado, para $x<1$, temos que

$f'(x)=(-x+3)'=-1$ e para $x>1$, temos que

$f'(x)=(x+1)'=1$

Logo:

$f':\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x>1 \\ -1 & \text{se } x<1 \end{cases}$

5.2. Uma equação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa $x=-1$ é:

$y-f(-1)=f'(-1)(x-(-1))$

Como $f(-1)=|-1-1|+2=2+2=4$ e $f'(-1)=-1$, vem:

$y-4=-1(x+1) \Leftrightarrow y=-x-1+4 \Leftrightarrow y=-x+3$

Portanto, $y=-x+3$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa $x=-1$.

6.1. $f'(x)=\left(-2x^3-x+\pi^2\right)'=-6x^2-1$

Portanto, $f'(-1)=-6\times(-1)^2-1=-6\times 1-1=-7$

e $f'(2)=-6\times(2)^2-1=-6\times 4-1=-25$.

6.2. $f'(x)=\left(\sqrt{x+5}\right)'=\dfrac{(x+5)'}{2\sqrt{x+5}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}$

Portanto, $f'(-1)=\dfrac{1}{2\sqrt{-1+5}}=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$ e

$f'(2)=\dfrac{1}{2\sqrt{2+5}}=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.

6.3. $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-2x}{3}\times\dfrac{6}{x}\right)'=\left[\dfrac{2(x^2-2x)}{x}\right]'=\left(\dfrac{2x^2-4x}{x}\right)'=$

$=\dfrac{(2x^2-4x)'(x)-(2x^2-4x)(x)'}{x^2}=$

$=\dfrac{(4x-4)x-(2x^2-4x)\times 1}{x^2}=$

$=\dfrac{4x^2-4x-2x^2+4x}{x^2}=\dfrac{2x^2}{x^2}=2 \qquad (x\neq 0)$

Portanto, $f'(-1)=f'(2)=2$.

6.4. $f'(x)=\left(-\dfrac{2}{2+x^2}+2x^2\right)'=$

$=\left(-\dfrac{2}{2+x^2}\right)'+\left(2x^2\right)'=$

$=-\dfrac{2'(2+x^2)-2(2+x^2)'}{(2+x^2)^2}+4x=$

$=-\dfrac{0-2\times 2x}{(2+x^2)^2}+4x=$

$=\dfrac{4x}{(2+x^2)^2}+4x$

Portanto:

$f'(-1)=\dfrac{4(-1)}{\left[2+(-1)^2\right]^2}+4\times(-1)=\dfrac{-4}{9}-4=-\dfrac{40}{9}$

$f'(2)=\dfrac{4\times 2}{(2+2^2)^2}+4\times 2=\dfrac{8}{36}+8=\dfrac{2}{9}+8=\dfrac{74}{9}$

7.1. $f'(x)=\left(2x^2-4x\right)'=4x-4$

Uma equação da reta *s* é:

$y-f(3)=f'(3)(x-3)$

$f(3)=2\times 3^2-4\times 3=6$

$f'(3)=4\times 3-4=8$

$y-6=8(x-3)\Leftrightarrow y=8x-24+6\Leftrightarrow y=8x-18$

A equação reduzida da reta *s* é $y=8x-18$.

7.2. Vamos determinar a abcissa do ponto de ordenada –2.

$f(x)=-2\Leftrightarrow 2x^2-4x=-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x+2=0\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

Esse ponto tem abcissa igual a 1.

A reta *s* pode ser definida pela equação:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$

Temos que $f(1)=-2$ e $f'(1)=4\times 1-4=0$.

Portanto, a equação reduzida da reta *s* é $y=-2$.

7.3. A equação reduzida da reta *t* é $y=2x-4$ pelo que o declive desta reta é igual a 2.

Como retas paralelas têm o mesmo declive, a reta *s* tem, também, declive igual a 2.

Determinemos a abcissa do ponto do gráfico de *f* onde a reta tangente a esta tem declive igual a 2.

$f'(x)=2\Leftrightarrow 4\times -4=2\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$

Essa abcissa é igual a $\frac{3}{2}$.

Portanto, uma equação da reta *s* é:

$$y - f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Temos que $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$, logo:

$$y + \frac{3}{2} = 2\left(x - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y = 2x - 3 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = 2x - \frac{9}{2}$$

Logo, $y = 2x - \frac{9}{2}$ é a equação reduzida da reta *s*.

7.4. A equação reduzida da bissetriz dos quadrantes ímpares é igual a $y = x$.

Esta reta tem declive 1 e consequentemente a reta *s* tem declive 1.

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow 4x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Portanto, uma equação da reta *s* é:

$$y - f\left(\frac{5}{4}\right) = f'\left(\frac{5}{4}\right)\left(x - \frac{5}{4}\right)$$

Como $f\left(\frac{5}{4}\right) = 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{15}{8}$ e $f'\left(\frac{5}{4}\right) = 1$:

$$y + \frac{15}{8} = 1\left(x - \frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow y = x - \frac{5}{4} - \frac{15}{8} \Leftrightarrow y = x - \frac{25}{8}$$

Logo, $y = x - \frac{25}{8}$ é a equação reduzida da reta *s*.

7.5. $\vec{p}(1, -2)$ é um vetor diretor da reta *p* pelo que o declive desta reta é igual a –2.

Seja m_s o declive da reta *s*.

O produto entre os declives de duas retas perpendiculares é igual a –1, portanto, $m_s \times (-2) = -1 \Leftrightarrow m_s = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x - 4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x = \frac{1}{2} + 4 \Leftrightarrow x = \frac{9}{8}$$

Assim, uma equação da reta *s* é $y - f\left(\frac{9}{8}\right) = f'\left(\frac{9}{8}\right)\left(x - \frac{9}{8}\right)$.

Como $f\left(\frac{9}{8}\right) = 2 \times \left(\frac{9}{8}\right)^2 - 4 \times \left(\frac{9}{8}\right) = -\frac{62}{32}$ e $f'\left(\frac{9}{8}\right) = \frac{1}{2}$:

$$y - \left(-\frac{63}{32}\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{9}{8}\right) \Leftrightarrow y + \frac{63}{32} = \frac{1}{2}x - \frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{16} - \frac{63}{32} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{81}{32}$$

Logo, $y = \frac{1}{2}x - \frac{81}{32}$ é a equação reduzida da reta *s*.

8.1. A bissetriz os quadrantes pares tem equação $y = -x$.

O declive desta reta é, por isso, –1.

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow \left(-2x^3\right) = -1 \Leftrightarrow -6x^2 = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{6}}{6} \vee x = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -2\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3 = 2 \times \frac{\sqrt{6} \times \left(\sqrt{6}\right)^2}{6^3} =$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{6} \times 6}{6^3} = \frac{\sqrt{6}}{18}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -2\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3 = -\frac{\sqrt{6}}{18}$$

A reta *r* é tangente ao gráfico de *f* nos pontos de coordenadas $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{18}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{18}\right)$

$$y - \frac{\sqrt{6}}{18} = -\left(x + \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \Leftrightarrow y = -x - \frac{\sqrt{6}}{9}$$

$$y + \frac{\sqrt{6}}{18} = -\left(x - \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \Leftrightarrow y = -x + \frac{\sqrt{6}}{9}$$

$\Leftrightarrow y = -x + \frac{\sqrt{6}}{9}$ são equações para a reta *s*.

$s: \ y = -x - \frac{\sqrt{6}}{9}$ ou $s: \ y = -x + \frac{\sqrt{6}}{9}$.

8.2. Utilizando a definição de derivada da função composta:

$$(g \circ f)'(2) = \frac{9}{32} \Leftrightarrow f'(2) \times g'(f(2)) = \frac{9}{32} \qquad \textbf{(1)}$$

Temos que $f'(x) = -6x^2$, pelo que $f'(2) = -24$.

$f(2) = -2 \times 2^3 = -16$ e $g'(x) = -\frac{a}{x^2}$.

Assim, e voltando a **(1)**:

$$f'(2) \times g'(f(2)) = \frac{9}{32} \Leftrightarrow -24 \times g'(-16) = \frac{9}{32} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -24 \times \left(-\frac{a}{(-16)^2}\right) = \frac{9}{32} \Leftrightarrow \frac{24a}{256} = \frac{9}{32} \Leftrightarrow \frac{3a}{32} = \frac{9}{32} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3a = 9 \Leftrightarrow a = 3$. Portanto, $a = 3$.

9. $a(0) = -4{,}9 \times 0^2 + 61{,}25 \times 0 + 1{,}2 = 1{,}2$

Portanto, a altura do projétil no instante em que foi lançado é 1,2 metro.

$a'(t) = 0 \Leftrightarrow -9{,}8t + 61{,}25 = 0 \Leftrightarrow t = 6{,}25$

A altura máxima é atingida quando a velocidade é nula, ou seja, no instante $t = 6{,}25$.

$a(6{,}25) = -4{,}9 \times 6{,}25^2 + 61{,}25 \times 6{,}25 + 1{,}2 = 192{,}606\,25$

Portanto, a diferença pedida é igual a:

192,60625 – 1,2 = 191,40625

Logo, a diferença entre a altura máxima atingida pelo projétil e a altura deste no instante em que foi lançado é 191,40625 metros.

10.1. $f'(x) = \left(\frac{x+1}{x+5}\right)' = \frac{(x+1)'(x+5) - (x+1)(x+5)'}{(x+5)^2} =$

$$= \frac{1 \times (x+5) - (x+1) \times 1}{(x+5)^2} = \frac{x + 5 - x + 1}{(x+5)^2} = \frac{4}{(x+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(0+5)^2} = \frac{4}{25}$$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 0 é, portanto, do tipo $y = \frac{4}{25}x + b$.

O ponto de tangência tem coordenadas $(0, f(0))$, ou seja, $\left(0, \frac{1}{5}\right)$. Portanto, $\frac{1}{5} = \frac{4}{25} \times 0 + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{5}$.

Assim, $y=\frac{4}{25}x+\frac{1}{5}$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

10.2. A reta tangente ao gráfico de f que é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares tem declive 1.

Vamos determinar as coordenadas do ponto de tangência.

$$f'(x)=1 \Leftrightarrow \frac{4}{(x+5)^2}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{(x+5)^2}-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-(x+5)^2}{(x+5)^2}=0 \Leftrightarrow 4-(x+5)^2=0 \wedge (x+5)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+5)^2=4 \wedge x \neq -5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+5=-2 \vee x+5=2) \wedge x \neq -5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=-3 \vee x=-7) \wedge x \neq -5 \quad \Leftrightarrow x=-3 \vee x=-7$$

A reta tem declive 1 e passa no ponto $(-3\,,\ f(-3))$ ou no ponto $(-7\,,\ f(-7))$.

Temos que $f(-3)=\frac{-3+1}{-3+5}=-1$ e $f(-7)=\frac{-7+1}{-7+5}=3$.

Logo, $y-f(-3)=1(x+3) \Leftrightarrow y+1=x+3 \Leftrightarrow y=x+2$

e $y-f(-7)=1(x+7) \Leftrightarrow y-3=x+7 \Leftrightarrow y=x+10$

Portanto, existem duas retas tangentes ao gráfico de f que são paralelas à bissetriz dos quadrantes ímpares, trata-se das retas de equações $y=x+2$ e $y=x+10$.

11. Tem-se $f(x)=x(x+1)-5 \Leftrightarrow f(x)=x^2+x-5$, portanto,

$$f'(x)=\left(x^2+x-5\right)'=2x+1.$$

Logo, $f(x)>f'(x)x^2+x-5>2x+1 \Leftrightarrow x^2-x-6>0$

$$x^2-z-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-\times 4(-6)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1+5}{2} \vee x=\frac{1-5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=3 \vee x=-2$$

Portanto, $x^2-x-6>0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,,-2\right[\cup \left]3\,,+\infty\right[$.

12.1. $f'(x)=\left(\frac{x^3}{1-x^2}\right)'=$

$$=\frac{\left(x^3\right)'\left(1-x^2\right)-x^3\left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{3x^2\left(1-x^2\right)-x^3(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{3x^2-3x^4+2x^4}{\left(1-x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{-x^4+3x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-x^4+3x^2}{\left(1-x^2\right)^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^4+3x^2=0 \wedge \left(1-x^2\right)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(3-x^2\right)=0 \wedge 1-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2=0 \vee 3-x^2=0\right) \wedge (x \neq -1 \wedge x \neq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x=0 \vee x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}\right) \wedge (x \neq -1 \wedge x \neq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}$$

Os zeros de f' são: $-\sqrt{3}, 0$ e $\sqrt{3}$.

12.2. $g'(x)=\left(\frac{x-2}{x^2+4}\right)'=\frac{(x-2)'\left(x^2+4\right)-(x-2)\left(x^2+4\right)'}{\left(x^2+4\right)^2}=$

$$=\frac{1\times\left(x^2+4\right)-(x-2)(2x)}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{x^2+4-2x^2+4x}{\left(x^2+4\right)^2}=$$

$$=\frac{-x^2+4x+4}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x+4}{\left(x^2+4\right)^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2+4x+4=0 \wedge \left(x^2+4\right)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(-1)\times 4}}{-2} \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{32}}{-2} \Leftrightarrow x=\frac{-4+4\sqrt{2}}{-2} \vee x=\frac{-4-4\sqrt{2}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=2-2\sqrt{2} \vee x=2+2\sqrt{2}$$

Como $2-2\sqrt{2}<2+2\sqrt{2}$, temos que:

$x_1=2-2\sqrt{2}$ e $x_2=2+2\sqrt{2}$, portanto:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\left(2-2\sqrt{2}\right)}{\left(2+2\sqrt{2}\right)\left(2-2\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{4-8\sqrt{2}+8}{2^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{12-8\sqrt{2}}{4-8}=\frac{12-8\sqrt{2}}{4}=2\sqrt{2}-3$$

13. $f'(x)=\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'=$

$$=\frac{(2x)'\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{2\left(x^2+1\right)-2x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$g'(x)=\left[(2x-3)^3\right]'=$$

$$=3(2x-3)^2(2x-3)'=3(2x-3)^2\times 2=$$

$$=6(2x-3)^2$$

13.1. $(f-g)'(-1)=f'(-1)-g'(-1)=$

$$=\frac{-2\times(-1)^2+2}{\left((-1)^2+1^2\right)}-6\times\left(2\times(-1)-3\right)^2=0-150=-150$$

Logo, $(f-g)'(-1)=-150$.

13.2. $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)=\frac{f'(1)\times g(1)-f(1)\times g'(1)}{\left(g(1)\right)^2}$

Temos que:

$$f'(1)=\frac{-2\times 1^2+2}{\left(1^2+1\right)^2}=0 \quad ; \quad g(1)=(2\times 1-3)^3=-1$$

$$f(1)=\frac{2\times 1}{1^2+1}=1$$

$$g'(1)=6(2\times 1-3)^2=6$$

Portanto:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(1)=\frac{0\times g(1)-1\times 6}{(-1)^2}=-6$$

Logo, $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)=-6$.

13.3. $(f\times g)'(0)=f'(0)\times g(0)+f(0)\times g'(0)$

$$f'(0)=\frac{-2\times 0^2+2}{\left(0^2+1\right)^2}=2$$

$$g(0)=(2\times 0-3)^3=-27$$

$$f(0)=\frac{2\times 0}{0^2+1}=0$$

Portanto:

$$(f\times g)'(0)=2\times(-27)+0\times g'(0)=-54$$

Assim, $(f\times g)'(0)=-54$.

14.1. Para $x<0$, temos que:

$$f'(x)=\left(\frac{2}{x}\right)'=\frac{2'x-2x'}{x^2}=\frac{0-2}{x^2}=-\frac{2}{x^2}$$

$f'(-1)=-\frac{2}{(-1)^2}=-\frac{2}{1}=-2$, pelo que o declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa –1 é igual a –2, logo o declive da reta *r* é $\frac{1}{2}$.

A reta *r* passa pelo ponto de coordenadas $(-1\,,\ f(-1))$, isto é, $(-1\,,-2)$.

$$y+2=\frac{1}{2}(x+1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-2\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

Portanto, $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ é a equação reduzida da reta *r*.

14.2. Para $x>0$:

$$f'(x)=\left(\sqrt{2x}\right)'=\frac{(2x)'}{2\sqrt{2x}}=$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{2x}}=\frac{1}{\sqrt{2x}}$$

O declive da reta *s* é $f'(1)$.

$$f'(1)=\frac{1}{\sqrt{2\times 1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

O ponto de tangência tem coordenadas $(1\,,\ f(1))$, isto é, $\left(1\,,\sqrt{2}\right)$.

Logo:

$$y-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$ é a equação reduzida da reta *s*.

15.1. $f'(x)=\left(\sqrt{3x+4}\right)'=$

$$=\frac{(3x+4)'}{2\sqrt{3x+4}}=$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$$

15.2. $g'(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)'}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}=$

$$=\frac{2x+\frac{1'\times x^2-1\times\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\frac{2x+\frac{0-2x}{x^4}}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2x-\frac{2x}{x^4}}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\frac{\frac{2x^5-2x}{x^4}}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\frac{2x^5-2x}{2x^4\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}=\frac{x^4-1}{x^3\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}$$

15.3. $h'(x)=\left[\left(x^3-2x\right)^{\frac{1}{2}}\right]'=\left(\sqrt{x^3-2x}\right)'=$

$$=\frac{\left(x^3-2x\right)'}{2\sqrt{x^3-2x}}=$$

$$=\frac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x}}$$

15.4. $p'(x)=\left(\sqrt{2x+1}\times x^{-2}\right)'=$

$$=\left(\sqrt{2x+1}\right)'\times x^{-2}+\sqrt{2x+1}\times\left(x^{-2}\right)'=$$

$$=\frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}}\times\frac{1}{x^2}+\sqrt{2x+1}\times(-2x)^{-2-1}=$$

$$=\frac{2}{2x^2\sqrt{2x+1}}+\sqrt{2x+1}\left(-2x^{-3}\right)=$$

$$=\frac{1}{x^2\sqrt{2x+1}}-\frac{2\sqrt{2x+1}}{x^3}=$$

$$=\frac{x-2\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}{x^3\sqrt{2x+1}}=$$

$$=\frac{x-2(2x+1)}{x^3\sqrt{2x+1}}=$$

$$=\frac{x-4x-2}{x^3\sqrt{2x+1}}=$$

$$=\frac{-3x-2}{x^3\sqrt{2x+1}}$$

15.5. $m'(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{2x^2+2}}\right)'=$

$$=\frac{x'\sqrt{2x^2+2}-x\left(\sqrt{2x^2+2}\right)'}{\left(\sqrt{2x^2+2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1\times\sqrt{2x^2+2}-x+\frac{\left(2x^2+2\right)'}{2\sqrt{2x^2+2}}}{2x^2+2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2x^2+2}-x\times\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+2}}}{2x^2+2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2x^2+2}-\frac{2x^2}{\sqrt{2x^2+2}}}{2x^2+2}=$$

$$=\frac{\frac{\left(\sqrt{2x^2+2}\right)^2-2x^2}{\sqrt{2x^2+2}}}{2x^2+2}$$

$$=\frac{2x^2+2-2x^2}{\left(2x^2+2\right)\sqrt{2x^2+2}}=$$

$$=\frac{2}{\left(2x^2+2\right)\sqrt{2x^2+2}}$$

$$=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{2x^2+2}}$$

15.6. $n'(x)=\left(\frac{\sqrt[3]{6x-3}}{x}\right)'=\frac{\left(\sqrt[3]{6x-3}\right)'x-\sqrt[3]{6x-3}\,x'}{x^2}=$

$$=\frac{\frac{(6x-3)'}{3\sqrt[3]{(6x-3)^2}}x-\sqrt[3]{6x-3}}{x^2}=$$

$$=\frac{\frac{2x}{\sqrt[3]{(6x-3)^2}}-\sqrt[3]{6x-3}}{x^2}$$

$$=\frac{\frac{2x}{\sqrt[3]{(6x-3)^2}}-\sqrt[3]{6x-3}}{x^2}=$$

$$=\frac{\frac{2x-\sqrt[3]{(6x-3)^3}}{\sqrt[3]{(6x-3)^2}}}{x^2}=$$

$$=\frac{2x-(6x-3)}{x^2\sqrt[3]{(6x-3)^2}}=$$

$$=\frac{-4x+3}{x^2\sqrt[3]{(6x-3)^2}}$$

16. $f'(x)=\left(3x-2x^2\right)'=3-4x$

- Equação da reta r

Declive da reta r = $f'(2)=3-4\times 2=3-8=-5$

Coordenadas do ponto de tangência:

$(2\,,\,f(2))$, ou seja, $(2\,,-2)$

$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y+2=-5(z-2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-5x+10-2\Leftrightarrow y=-5x+8$

Portanto, $y=-5x+8$ é a equação reduzida da reta r.

- Equação da reta s

Declive da reta s = $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1$

Coordenadas do ponto de tangência:

$m=-1$, pelo que, $f'(x)=-1\Leftrightarrow 3-4x=-1$

$\Leftrightarrow -4x=-4\Leftrightarrow x=1$

$(1\,,\,f(1))$, ou seja, $(1\,,1)$.

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=-1(x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-x+1+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-x+2$

Portanto, $y=-x+2$ é a equação reduzida da reta s

- Ponto de interseção de r e s

$-5x+8=-x+2\Leftrightarrow -4x=-6\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

$y=-\frac{3}{2}+2\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$

Portanto, $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ são as coordenadas do ponto de interseção das retas r e s.

17.
- $f'(x)=\left(x\sqrt{9-6x}\right)'=x'\sqrt{9-6x}+x\left(\sqrt{9-6x}\right)'=$

$=1\times\sqrt{9-6x}+x\frac{(9-6x)'}{2\sqrt{9-6x}}=$

$=\sqrt{9-6x}+x\frac{-6}{2\sqrt{9-6x}}=$

$=\sqrt{9-6x}-\frac{3x}{\sqrt{9-6x}}=$

$=\frac{\left(\sqrt{9-6x}\right)^2-3x}{\sqrt{9-6x}}=$

$=\frac{9-6x-3x}{\sqrt{9-6x}}=\frac{9-9x}{\sqrt{9-6x}}$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{9-9x}{\sqrt{9-6x}}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9-9x=0\wedge\sqrt{9-6x}\neq 0\wedge 9-6x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1\wedge x\neq\frac{3}{2}\wedge x<\frac{3}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1$

Portanto, o zero de f' é 1.

Ficha de teste 10 **Págs. 100 e 101**

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)+1}{3x-x^2}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-(-1)}{-x(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{-x(x-3)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{-x}=$

$=f'(3)\times\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{-x}=2\times\frac{1}{-3}=\frac{2}{3}$

Resposta: **(B)**

2. A expressão analítica da função f é do tipo $f(x)=ax^2+b+c$, com $a\in\mathbb{R}^-$.

Logo, $f'(x)=\left(ax^2+bx+c\right)'=2ax+b$.

Portanto, a derivada da função *f* é uma função afim cujo gráfico é uma reta de declive negativo, já que $a<0\Rightarrow 2a<0$

Resposta: **(C)**

3. $a'(t)=\left(120t-6t^2\right)'=120-12t$

$a'(2)=120-12\times 2=96$

Portanto, a velocidade do projétil dois segundos após o instante em que foi lançado é igual a 86 m/s.

Resposta: **(D)**

4. $f'(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+3^2\right)'=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'+\left(3^2\right)=$

$=\dfrac{1'\sqrt{x}-1\times\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}+0=$

$=\dfrac{0-\dfrac{x'}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=$

$=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

Resposta: **(A)**

5. Temos que:

$(f\circ g)'(1)=g'(1)\times f'(g(1))\quad=\dfrac{1}{2}\times f'(2)$

Como $f'(x)=\left(1-2x^2\right)=-4x,\ f'(2)=-4\times 2=-8$:

$(f\circ g)'(1)=\dfrac{1}{2}\times(-8)=-4$

Resposta: **(B)**

6.1. ■ $D_g=\{x\in\mathbb{R}:\ 2+4x\neq\}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

■ A função *g* é contínua

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+} g(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3x+2}{2+4x}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+}\dfrac{1}{2}x+\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+}\dfrac{3x+2}{2+4x}=$

$=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\frac{1}{2}}{0^+}=-\dfrac{1}{4}+\infty=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^-} g(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^-}\dfrac{1}{2}x+\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^-}\dfrac{3x+2}{2+4x}=$

$=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\frac{1}{2}}{0^-}=-\dfrac{1}{4}=-\infty=-\infty$

Portanto a reta de equação $x=-\dfrac{1}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico de *g*.

■ Vejamos se o gráfico de *g* admite assíntotas não verticais.

Em $+\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{2}x+\frac{3x+2}{2+4x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3x+2}{2x+4x^2}\right)=$

$=\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{4x^2}=\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{4x}=\dfrac{1}{2}+0=\dfrac{1}{2}$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3x+2}{2+4x}-\dfrac{1}{2}x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{2+4x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{4x}=\dfrac{3}{4}$

A reta de equação $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$ é assíntota ao gráfico de *g* em $+\infty$.

■ Em $-\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3x+2}{2x+4x^2}\right)=$

$=\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{4x^2}=\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{4x}=\dfrac{1}{2}+0=\dfrac{1}{2}$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2}{2+4x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{4x}=\dfrac{3}{4}$

A reta de equação $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$ é assíntota ao gráfico de *g* em $-\infty$.

6.2. **a)** $g'(x)=\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3x+2}{2+4x}\right)'=\left(\dfrac{1}{2}x\right)'+\left(\dfrac{3x+2}{2+4x}\right)'=$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{(3x+2)'(2+4x)-(3x+2)(2+4x)'}{(2+4x)^2}=$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3\times(2+4x)-(3x+2)\times 4}{(2+4x)^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{6+12x-12x-8}{(2+4x)^2}$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{-2}{(2+4x)^2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{(2+4x)^2}$

Logo, $g'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{(2+4x)^2}$

b) $g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{(2+4x)^2}=0\Leftrightarrow\dfrac{2}{(2+4x)^2}=\dfrac{1}{2}$

Como $x\neq-\dfrac{1}{2}$, temos que:

$g'(x)=0\Leftrightarrow(2+4x)^2=4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2+4x=-2\vee 2+4x=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x=-4\vee 4x=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=0$

Os zeros de g' são -1 e 0 e a sua soma é –1.

c) Uma equação da reta *t* é:

$y-g(1)=g'(1)=g'(1)(x-1)$

$g(1)=\dfrac{1}{2}\times 1+\dfrac{3\times 1+2}{2+4\times 1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{4}{3}$ e

$g'(1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{(2+4\times 1)^2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{18}=\dfrac{4}{9}$

$y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{9}(x-1)$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{4}{9}x-\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow y=\dfrac{4}{9}x+\dfrac{8}{9}$

Portanto, $y=\dfrac{4}{9}x+\dfrac{8}{9}$ é a equação reduzida da reta *t*, tangente ao gráfico de *g*, no ponto de abcissa $x=1$.

7.1. $f(x)=x \Leftrightarrow \frac{4x}{x+2}=x \Leftrightarrow \frac{4x}{x+2}-x=0 \Leftrightarrow \frac{4x-x(x+2)}{x+2}=0$

$\Leftrightarrow \frac{4x-x^2-2x}{x+2}=0 \Leftrightarrow 2x-x^2=0 \wedge x+2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x(2-x)=0 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

$S=\{0\ ,\ 2\}$

	-1	2	3
-1		1	-3
	-1	3	0

7.2. $f'(x)=\left(\frac{4x}{x-2}\right)'=\frac{(4x)'(x+2)-4x(x+2)'}{(x+2)^2}=$

$=\frac{4(x+2)-4x}{(x+2)^2}=\frac{4x+8-4x}{(x+2)^2}=\frac{8}{(x+2)^2}$

Assim:

$f'(x)\geq f(x) \Leftrightarrow \frac{8}{(x+2)^2}\geq\frac{4x}{x+2} \Leftrightarrow \frac{8}{(x+2)^2}-\frac{4x}{x+2}\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{8-4x(x+2)}{(x+2)^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{8-4x^2-8x}{(x+2)^2}\geq 0$

- Zeros do numerador:

  $8-4x^2-8x=0 \Leftrightarrow x^2+2x-2=0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x=-1-\sqrt{3} \vee x=-1+\sqrt{3}$

- Zeros do denominador:

  $(x+2)^2=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

  Construindo uma tabela de sinais, vem:

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{3}$		2		$-1+\sqrt{3}$	$+\infty$
$8-4x^2-8x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
Q	$-$	0	$+$	n.d.	$+$	0	$-$

Portanto, o conjunto da condição $f'(x)\geq f(x)$ é:

$S=\left[-1-\sqrt{3}\ ,\ -2\right[\ \cup\ \left]-2\ ,\ -1+\sqrt{3}\right]$

8.1. Para $x>-1$, temos que $h'(x)=\left(\frac{x^2+4x}{(x+1)^2}\right)'$.

$=\frac{(x^2+4x)'(x+1)^2-(x^2+4x)\left[(x+1)^2\right]'}{\left[(x+1)^2\right]^2}=$

$=\frac{(2x+4)(x+1)^2-(x^2+4x)\times 2(x+1)(x+1)'}{(x+1)^4}=$

$=\frac{(2x+4)(x+1)^2-2(x^2+4x)(x+1)}{(x+1)^4}=$

$=\frac{(x+1)\left[(2x+4)(x+1)-2(x^2+4x)\right]}{(x+1)^4}=$

$=\frac{2x^2+2x+4x+4-2x^2-8x}{(x+1)^3}=\frac{4-2x}{(x+1)^3}$

Para $x<-1$, temos que $h'(x)=(2x-x^2)'=2-2x$.

Vejamos se a função h é diferenciável em $x=-1$.

$h'(-1^-)=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{2x-x^2-\left(2\times(-1)-(-1)^2\right)}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{2x-x^2+3}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{(x+1)(-x+3)}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1^-}(-x+3)=-(-1)+3=4$

$h'(-1^+)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{\frac{x^2+4x}{(x+1)^2}-\left(2\times(-1)-(-1)^2\right)}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{\frac{x^2+4x}{(x+1)^2}+3}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2+4x+3(x+1)^2}{(x+1)^3}=$

$=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2+4x+3x^2+6x+3}{(x+1)^3}=$

$=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{4x^2+10x+3}{(x+1)^3}=\frac{-3}{0^+}=-\infty$

Como $h'(-1^-)\neq h'(-1^+)$ podemos concluir que h não é diferenciável em $x=-1$, portanto, $-1\in D'_h$.

Assim, a função h' pode ser caracterizada do modo que se segue:

$$h':\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{4-2x}{(x+1)^3} & \text{se } x>-1 \\ 2-2x & \text{se } x<-1 \end{cases}$$

8.2. Pretende-se determinar a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa nula, isto é, no ponto de abcissa $x=0$.

Uma equação dessa reta é:

$y-h(0)=h'(0)(x-0)$

$h(0)=\frac{0^2+4\times 0}{(0+1)^2}=0$ e $h'(0)=\frac{4-2\times 0}{(0+1)^3}=\frac{4}{1}=4$

$y-h(0)=h'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-0=4(x-0) \Leftrightarrow y=4x$

Portanto, a equação pedida é $y=4x$.

9.1. Uma equação da reta *t* é:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$

Como $f(1)=1$ e $f'(1)=4\times 1^2-1=3$:

$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=3(x-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=3x-3+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=3x-2$

Assim, $y=3x-2$ é a equação reduzida da reta *t*.

9.2. $f'(1)=3$, pelo que a função *f* é diferenciável em $x=1$.

E, tendo em conta, o teorema: Se uma função é diferenciável num ponto, então é contínua nesse ponto.

Podemos concluir que a função *f* é contínua em $x=1$.

Ficha para praticar 21 **Págs. 102 a 105**

1. $f'(x)=\left(x^3+x\right)'=3x^2+1$

Determinemos, caso existam, os zeros de f'.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-\frac{1}{3}$, impossível em $\mathbb{R}$, pois $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2\geq 0$, logo, a função f' não tem zeros.

A função *f* é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a derivada de *f* não tem zeros, portanto, podemos concluir que a função *f* não tem extremos, como queríamos mostrar.

2.1. $g(x)=7x^2 \Leftrightarrow \frac{x^6-8}{x}=7x^2 \Leftrightarrow \frac{x^6-8}{x}-7x^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^6-7x^3-8}{x}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^6-7x^3-8=0 \wedge x\neq 0 \Leftrightarrow \left(x^3\right)^2-7x^3-8=0 \wedge x\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\times1\times(-8)}}{2\times1} \wedge x\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3=\frac{7\pm\sqrt{81}}{2} \wedge x\neq 0 \Leftrightarrow \left(x^3=\frac{7+9}{2} \vee x^3=\frac{7-9}{2}\right) \wedge x\neq 0$

$\Leftrightarrow \left(x^3=8 \vee x^3=-1\right) \wedge x\neq 0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-1$

Portanto, $S=\{-1\,,\,2\}$.

2.2. $g'(x)=\left(\frac{x^6-8}{x}\right)'\left(\frac{x^6}{x}-\frac{8}{x}\right)'=\left(x^5-\frac{8}{x}\right)'=\left(x^5\right)'-\left(\frac{8}{x}\right)'=$

$=5x^4-\left(-\frac{8}{x^2}\right)=5x^4+\frac{8}{x^2}$

$5x^4+\frac{8}{x^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Logo a função g' não tem zeros.

A função *g* é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e a derivada de *g* não tem zeros, portanto podemos concluir que a função *g* não tem extremos, como queríamos mostrar.

3.1. $f'(x)=\left(-1+4x-x^2\right)'=4-2x$

A função *f* é diferenciável em $\mathbb{R}$ e, também, é contínua em $\mathbb{R}$ pois é uma função polinomial. Em particular, *f* é contínua em $[0\,,\,2]$ e é diferenciável em $]0\,,\,2[$, pelo que satisfaz, no intervalo $[0\,,\,2]$, as hipóteses do Teorema de Lagrange.

Então, existe pelo menos um ponto $c\in\,]0,\,2[$ tal que:

$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$

$f'(c)=4-2c$

$f(2)=3$

$f(0)=-1$

$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0} \Leftrightarrow 4-2c=\frac{3-(-1)}{2-0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4-2c=2 \Leftrightarrow 2c=2 \Leftrightarrow c=1$

Portanto, $c=1$.

3.2. Temos que $f'(x)=\left(\sqrt{1-x}\right)'=\frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}}=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$

Por outro lado, temos que $D_g=\{x\in\mathbb{R}:1-x\geq 0\}=\,]-\infty\,,\,1]$

A função *g* é contínua em $]-\infty\,,\,1]$ pois é definida pela raiz quadrada de uma função polinomial e é diferenciável em $]-\infty\,,\,1[$.

Em particular, *g* é contínua em $[-8\,,\,-3]$ e é diferenciável em $]-8\,,\,-3[$ pelo que satisfaz, no intervalo $[-8\,,\,-3]$, as hipóteses do Teorema de Lagrange.

Então, existe pelo menos um ponto $c\in\,]-8\,,\,-3[$ tal que:

$g'(c)=\frac{g(-3)-g(-8)}{-3-(-8)}$

$g'(c)=-\frac{1}{2\sqrt{1-c}},\ g(-3)=2$ e $g(-8)=3$

$-\frac{1}{2\sqrt{1-c}}=\frac{2-3}{-3-(-8)} \Leftrightarrow -\frac{1}{2\sqrt{1-c}}=\frac{-1}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{1-c}}=\frac{1}{5}$

Como $c\in\,]-8\,,\,-3[$, $2\sqrt{1-c}$ é sempre diferente de zero, pelo que:

$\frac{1}{2\sqrt{1-c}}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow 2\sqrt{1-c}=5 \Leftrightarrow \sqrt{1-c}=\frac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sqrt{1-c}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 1-c=\frac{25}{4} \Leftrightarrow c=1-\frac{25}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c=-\frac{21}{4}$

Como $-\frac{21}{4}\in\,]-8\,,\,-3[$, então o número pedido é $c=-\frac{21}{4}$.

3.3. $h'(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=$

$=\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$

Por outro lado, temos que $D_h\{x\in\mathbb{R}:x-1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

A função *h* é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ pois é definida pelo quociente de duas funções contínuas: ambas funções polinomiais e é, também, diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Em particular, *h* é contínua em $[-1\,,\,0]$ e diferenciável em $]-1\,,\,0[$ pelo que satisfaz, no intervalo $[-1\,,\,0]$. As hipóteses do Teorema de Lagrange.

Então, existe pelo menos um ponto $c\in\,]-1\,,\,0[$ tal que:

$h'(c)=\frac{h(0)-h(-1)}{0-(-1)}$

$h'(c)=\frac{-2}{(c-1)^2},\ h(0)=-1$ e $h(-1)=0$

Assim:

$\frac{-2}{(c-1)^2}=\frac{-1-0}{0-(-1)} \Leftrightarrow \frac{-2}{(c-1)^2}=-1 \Leftrightarrow \frac{2}{(c-1)^2}=1$

Como $c\in\,]-1\,,\,0[$, $(c-1)^2$ é sempre diferente de zero:

$\frac{2}{(c-1)^2}=1 \Leftrightarrow 2=(c-1)^2 \Leftrightarrow c-1=-\sqrt{2} \vee c-1=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow c=1-\sqrt{2} \vee c=1+\sqrt{2}$

$1-\sqrt{2} \in \left]-1\,,0\right[$, mas $1+\sqrt{2} \notin \left]-1\,,0\right[$, pelo que o número pedido é $c=1-\sqrt{2}$

3.4. $j'(x)=\left(x^3-x\right)'=3x^2-1$

A função j é contínua em $\mathbb{R}$ por ser uma função polinomial e, também, é diferenciável em $\mathbb{R}$. Em particular, é contínua em $[1\,,3]$ e diferenciável em $]1\,,3[$ pelo que satisfaz, no intervalo $[1\,,3]$, as hipóteses do Teorema de Lagrange.

Então, existe pelo menos um $c \in \left]1\,,3\right[$ tal que:

$$j(c)=\frac{j(3)-j(1)}{3-1}$$

$j'(c)=3c^2-1,\ j(3)=24$ e $j(1)=0$

Assim:

$$3c^2-1=\frac{24-0}{3-1} \Leftrightarrow 3c^2-1=12 \Leftrightarrow c^2=\frac{13}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c=-\sqrt{\frac{13}{3}} \vee c=\sqrt{\frac{13}{3}} \Leftrightarrow c=-\frac{\sqrt{39}}{3} \vee c=\frac{\sqrt{39}}{3}$$

Como $c \in \left]1\,,3\right[$, então $c=\frac{\sqrt{39}}{3}$, pois $\frac{\sqrt{39}}{3} \in \left]1\,,3\right[$ e $-\frac{\sqrt{39}}{3} \notin \left]1\,,3\right[$, portanto, o número pedido é $c=\frac{\sqrt{39}}{3}$.

4.1. $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{(x)'}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$ e $f(4)=\sqrt{4}=2$

Uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x=4$ é $y-f(4)=f'(4)(x-4)$

Portanto:

$$y-2=\frac{1}{4}(x-4) \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-1+2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+1$$

Logo, $y=\frac{1}{4}x+1$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x=4$.

4.2. Consideremos a função $f(x)=\sqrt{x}$ e o intervalo $\left[14{,}12^2\,;14{,}18^2\right]=\left[199{,}3744\,;201{,}0724\right]$.

A função f é contínua no seu domínio, isto é, em $\left[0\,,+\infty\right[$, pelo que, em particular, é contínua no intervalo $\left[199{,}3744\,;201{,}0724\right]$.

Por outro lado, $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ é finita, $\forall x \in \left[199{,}374\ 4\,;201{,}072\ 4\right]$, então, f é diferenciável nesse intervalo.

Então, o Teorema de Lagrange garante que:

$\exists c \in \left]199{,}3744\,;201{,}0724\right[$:

$$f'(c)=\frac{f(201{,}0724)-f(199{,}3744)}{201{,}0724-199{,}3744}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{201{,}0724}-\sqrt{199{,}3744}}{1{,}698} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}}=\frac{14{,}18-14{,}12}{1{,}698} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}}=\frac{10}{283}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{c}=\frac{283}{10} \Leftrightarrow \sqrt{c}=\frac{283}{20}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{c}=14{,}15$$

Portanto, $\sqrt{201}$ está compreendida entre 14,12 e 14,18, como queríamos mostrar.

5.
- Teorema de Lagrange

  Dados uma função $f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um intervalo $[a\,,b] \subset D_f$ $(a<b)$ tais que:
  - f é contínua em $[a\,,b]$ e
  - f é diferenciável em $]a\,,b[$

  Então existe pelo menos um ponto $c \in \left]a\,,b\right[$ tal que

  $$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- A função f é polinomial, pelo que é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, é, em particular, contínua no intervalo $[-2\,,1]$.

  Por outro lado, temos que $f'(x)=\left(2x^2-5\right)'=4x$, logo f' é finita, $\forall x \in \left]-2\,,1\right[$, ou seja, f é diferenciável em $\left]-2\,,1\right[$.

  Assim, a função f satisfaz, no intervalo $[-2\,,1]$, as hipóteses do teorema de Lagrange.

  Então, existe pelo menos um $c \in \left]-2\,,1\right[$ tal que

  $$f'(c)=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}.$$

  $f'(c)=4c,\ f(1)=-3$ e $f(-2)=3$

  $$4c=\frac{-3-3}{1-(-2)} \Leftrightarrow 4c=-2 \Leftrightarrow c=-\frac{1}{2}$$

  Portanto, $c=-\frac{1}{2}$.

  Designando por A e B os pontos de coordenadas, respetivamente, iguais a $\left(-2\,,f(-2)\right)=(-2\,,3)$ e $\left(1\,,f(1)\right)=(1\,,-3)$.

  $\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=-2$ é o declive da reta secante ao gráfico de f, que passa pelos pontos A e B.

  $f'(c)$ é numericamente igual ao declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $\left(c\,,f(c)\right)$, ou seja, $\left(-\frac{1}{2}\,,f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\left(-\frac{1}{2}\,,-\frac{9}{2}\right)$.

  O Teorema de Lagrange aplicável a f garante a existência de um ponto de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}\,,-\frac{9}{2}\right)$, do gráfico de f, onde a tangente é paralela à secante que passa pelos pontos $(-2\,,3)$ e $(1\,,-3)$.

6.1. $f'(x)=\left(\frac{2}{x+1}\right)'=\frac{(2)'(x+1)-2(x+1)'}{(x+1)^2}$

$$=\frac{0-2\times 1}{(x+1)^2}=-\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{2}{(x+1)^2}=0 \Leftrightarrow -2=0 \wedge (x+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \varnothing$$

Portanto, a função f' não tem zeros.

Construindo um quadro, temos:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	–	n.d.	–
f	↘	n.d.	↘

Portanto, a função *f* é estritamente decrescente em $]-\infty\,,-1[$ e em $]-1\,,+\infty[$.

6.2. Determinemos a abcissa do ponto onde a reta é tangente ao gráfico de *f*.

$f(x)=2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x+1}=2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x+1}-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-2(x+1)}{x+1}=0 \quad \Leftrightarrow \dfrac{2-2x-2}{x+1}=0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x}{x+1}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-2(x+1)}{x+1}=0 \Leftrightarrow \dfrac{2-2x-2}{x+1}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x}{x+1}=0 \Leftrightarrow -2x=0 \wedge x+1\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \wedge x\neq -1 \ \Leftrightarrow x=0$

Essa abcissa é $x=0$

Logo, $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ é uma equação da reta pedida.

Temos que $f(0)=2$ e $f'(0)=-2$

$y-2=-2(x-0) \Leftrightarrow y=-2x+2$

$y=-2x+2$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de ordenada 2.

7.1. $g'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}-x^2\right)'=x^2-2x$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x-2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

Construindo um quadro, temos que:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
g'	+	0	–	0	+
g	↗		↘ .		↗
		Máx.		Mín.	

A função *g* é estritamente crescente em $]-\infty\,,0]$ e em $[2\,,+\infty[$ e é estritamente decrescente em $[0\,,2]$.

7.2. **a)** Como a reta tangente ao gráfico de *g* é paralela ao eixo *Ox*, o seu declive é igual a zero. Assim,

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

$g(0)=0$

$g(2)=\dfrac{8}{3}-4=-\dfrac{4}{3}$

As equações pedidas são $y=0$ e $y=-\dfrac{4}{3}$

b) Como o declive é igual a $a-1$, temos:

$g'(x)=-1 \Leftrightarrow x^2-2x=-1 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Logo, $y-g(1)=g'(1)(x-1)$ é uma equação da reta pedida.

$g(1)=\dfrac{1^3}{3}-1^2=-\dfrac{2}{3}$ e $g'(1)=1^2-2\times 1=-1$, assim

$y-\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-1(x-1) \Leftrightarrow y+\dfrac{2}{3}=-x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-x+1-\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow y=-x+\dfrac{1}{3}$

Portanto, $y=-x+\dfrac{1}{3}$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *g* que tem declive –1.

8.1. ■ $f'(x)=\left(-\dfrac{x^2}{4}+2x-3\right)'=-\dfrac{x}{2}+2$

■ $f'(x)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{x}{2}+2=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}=2 \Leftrightarrow x=4$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
f'	+	0	–
f	↗	1	↘
		Máx.	

Intervalos de monotonia:

f é estritamente crescente em $]-\infty\,,4]$ e é estritamente decrescente em $[4\,,+\infty[$.

Extremos:

máximo absoluto: $f(4)=-\dfrac{4^2}{4}+2\times 4-3=1$

mínimo absoluto: não tem

máximos relativos: $f(4)=1$

mínimos relativos: não tem

8.2. ■ $g'(x)=\left(x^2-x^3\right)'=2x-3x^2$

■ $g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-3x^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(2-3x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee 2-3x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\dfrac{2}{3}$

■

x	$-\infty$	0		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
g'	–	0	+	0	–
g	↘	0	↗	$\frac{4}{27}$	↘
		Mín.		Máx.	

Intervalos de monotonia:

g é estritamente decrescente em $]-\infty\,,0]$ e em $\left[\frac{2}{3}\,,+\infty\right[$

e é estritamente crescente em $\left[0\,,\frac{2}{3}\right]$.

Extremos:

máximo absoluto: não tem

mínimo absoluto: não tem

máximos relativos: $g\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$

mínimos relativos: $g(0)=0$

8.3. ■ $h'(x)=\left(4x^3+10x^2+3x+1\right)'=12x^2+20x+3$

■ $h'(x)=0\Leftrightarrow 12x^2+20x+3=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{-20\pm\sqrt{20^2-4\times12\times3}}{2\times12}\Leftrightarrow x=\frac{-20\pm\sqrt{256}}{24}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{-20\pm16}{24}\Leftrightarrow x=\frac{-20-16}{24}\vee x=\frac{-20+16}{24}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}\vee x=-\frac{1}{6}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{6}$	$+\infty$
h'	+	0	–	0	+
h	↗	$\frac{11}{2}$	↘	$\frac{41}{54}$	↗
		Máx.		Mín.	

$h\left(-\frac{3}{2}\right)=4\left(-\frac{3}{2}\right)^3+10\left(-\frac{3}{2}\right)^2+3\left(-\frac{3}{2}\right)+1=\frac{11}{2}$

$h\left(-\frac{1}{6}\right)=4\left(-\frac{1}{6}\right)^3+10\left(-\frac{1}{6}\right)^2+3\left(-\frac{1}{6}\right)+1=\frac{41}{54}$

Intervalos de monotonia:

f é estritamente crescente em $\left]-\infty\,,-\frac{3}{2}\right]$ e em

$\left[-\frac{1}{6}\,,+\infty\right[$ e é estritamente decrescente em $\left[-\frac{3}{2}\,,-\frac{1}{6}\right]$

Extremos:

Máximo absoluto: não existe

Mínimo absoluto: não existe

Máximos relativos: $h\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{11}{2}$

Mínimos relativos: $h\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{41}{54}$

8.4. ■ $j(x)=\left(x^3+3x+2\right)^2=3x^2+3$

■ $j'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2+3=0\Leftrightarrow x^2=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\varnothing$, pois, $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2\geq 0$.

Como, $\forall x\in\mathbb{R},\ j'(x)>0$, então a função j é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e não tem extremos.

8.5. ■ $p'(x)=\left(-\frac{x^4}{4}+x-\frac{1}{2}\right)'=-x^3+1$

■ $p'(x)=0\Leftrightarrow -x^3+1=0\Leftrightarrow x^3=1\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{1}\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
p'	+	0	–
p	↗	$\frac{1}{4}$	↘
		Máx.	

Intervalos de monotonia:

p é estritamente crescente em $]-\infty\,,1]$ e é estritamente decrescente em $[1\,,+\infty[$.

Extremos:

Máximo absoluto: $p(1)=-\frac{1^4}{4}+1-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

Mínimo absoluto: não existe

Máximos relativos: não existe

Mínimos relativos: $p(1)=\frac{1}{4}$

8.6. ■ $r'(x)=\left(\sqrt{2}x^3-\sqrt{18}x\right)'=3\sqrt{2}x\ -\sqrt{18}=3\sqrt{2}x^2-3\sqrt{2}$

■ $r'(x)=0\Leftrightarrow 3\sqrt{2}x^2-3\sqrt{2}=0\Leftrightarrow x^2=\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=-1\vee x=1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
r'	+	0	–	0	+
r	↗	$2\sqrt{2}$	↘	$-2\sqrt{2}$	↗
		Máx.		Mín.	

$r(-1)=\sqrt{2}\times(-1)^3-\sqrt{18}\times(-1)=-\sqrt{2}+3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

Intervalos de monotonia:

r é estritamente crescente em $]-\infty\,,-1]$ e em $[1\,,+\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-1\,,1]$

Extremos:

máximo relativo: $r(-1)=2\sqrt{2}$

mínimo absoluto: não tem

máximos absoluto: não tem

mínimos relativos: $r(1)=-2\sqrt{2}$

9.1. ■ $f'(x)=\left(x^2+2\right)'=2x$

■ $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$

x	-2		0		2
f'	n.d.	–	0	+	+
f	n.d.	↘	2	↗	6
			Mín.		Máx.

Intervalos de monotonia:

f é estritamente decrescente em $]-2\,,0]$ e é estritamente crescente em $[0\,,2]$.

Extremos:

Máximo absoluto: $f(2)=6$

Mínimo absoluto: $f(0)=2$

Máximos relativos: $f(2)=6$

Mínimos relativos: $f(0)=2$

9.2. ■ $g'(x)=\left(x^3-2x^2-1\right)'=3x^2-4x$

■ $g'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(3x-4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee 3x-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{4}{3}$

x	-1		0		$\frac{4}{3}$		3
g'	+	+	0	–	0	+	n.d.
g	-4	↗	1	↘	$-\frac{59}{27}$	↗	n.d.
	Mín.		Máx.		Mín.		

$g(-1)=(-1)^3-2(-1)^2-1=-4$

$g\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^3-2\left(\frac{4}{3}\right)^2-1=-\frac{59}{27}$

$g(-1)<g\left(\frac{4}{3}\right)$

Intervalos de monotonia:

g é estritamente crescente em $[-1,0]$ e em $\left[\frac{4}{3},3\right[$ e é estritamente decrescente em $\left[0,\frac{4}{3}\right]$.

Extremos:

Máximo absoluto: não existe

Mínimo absoluto: -4

Máximos relativos: $g(0)=1$

Mínimos relativos: $g\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{59}{27}$ e $g(-1)=-4$

9.3. ■ $h'(x)=\left[(x+1)^3-x^3\right]'-\left(x^3\right)'=3(x+1)^2(x+1)'-3x^2=$

$=3(x+1)^2-3x^2=3\left(x^2+2x+1\right)-3x^2=$

$=3x^2+6x+3-3x^2=6x+3$

■ $h'(x)=0 \Leftrightarrow 6x+3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

x	-1		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
h'	n.d.	–	0	+
f	n.d.	↘	$\frac{1}{4}$.	↗
			Mín.	

$h\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+1\right)^3-\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$

Intervalos de monotonia:

h é estritamente decrescente em $\left]-1,-\frac{1}{2}\right]$ e é estritamente crescente em $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

Extremos:

máximo absoluto: não existe

mínimo absoluto: $h\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

máximos relativos: não existe

mínimos relativos: $h\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

9.4. ■ $j'(x)=\left[(3-x)x^2\right]'=\left(3x^2-x^3\right)'=6x-3x^2$

■ $j'(x)=0 \Leftrightarrow 6x-3x^2=0 \Leftrightarrow 3\times(2-x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=0 \vee 2-x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

x	$-\infty$	0		2
j'	–	0	+	0
j	↘	0	↗	4
		Mín.		Máx.

Intervalos de monotonia:

j é estritamente decrescente em $]-\infty,0]$ e é estritamente crescente em $[0,2]$.

Extremos:

Máximo absoluto: não existe

Mínimo absoluto: $j(0)=0$

Máximos relativos: $j(2)=(3-2)\times 2^2=4$

Mínimos relativos: $j(0)=0$

10.1. f é positiva em $]-3,1[$ e é negativa em $]-\infty,-3[\,\cup\,]1,+\infty[$

10.2. A função f é quadrática pelo que pode ser definida pela expressão:

$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, como $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e x_1 e x_2 são os zeros de f.

Assim, $f(x)=a(x+3)(x-1)$, pois -3 e 1 são os zeros de f.

Por outro lado, o ponto $C(0,3)$ pertence ao gráfico de f.

$f(0)=3 \Leftrightarrow a(0+3)(0-1)=3 \Leftrightarrow -3a=3 \Leftrightarrow a=-1$

Logo, $f(x)=-(x+3)(x-1)$, ou seja, $f(x)=-x^2-2x+3$, portanto, $f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x-2=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Como $f'(x)>0, \forall x\in\,]-\infty,-1[$ e $f'(x)<0, \forall x\in\,]-1,+\infty[$, então $f(-1)$ é o máximo absoluto de f.

$f(-1)=-(-1)^2-2(-1)+3=4$

O máximo absoluto é 4.

10.3. $f(x)=g'(x)$ e como, $\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $f(x)>0$, então $\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $g'(x)>0$.

Logo, a função g é estritamente crescente em $\left[0\,,\,\frac{1}{2}\right]$, pelo que a proposição p é falsa.

11. A função g' é nula em –4 e em 1, negativa em $]1\,,\,4]$ e é positiva em $]-6\,,\,-4[$ e em $]-4\,,\,1[$, pelo que, a função g é estritamente crescente em $]-6\,,\,1]$ e é estritamente decrescente em $[1\,,\,4]$.

g tem um máximo relativo em $x=1$ e tem um mínimo absoluto em $x=4$.

12.1. A função h é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ pois é definida pelo quociente de duas funções contínuas: ambas polinomiais.

Assim, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2-4}{x}=\frac{-4}{0^+}=-\infty$

e $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2-4}{x}=\frac{-4}{0^-}=+\infty$

Portanto, a reta de equação $x=0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de h.

12.2. $h(x)=-3 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x}=-3 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x}+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+4+3x}{x}=0 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \wedge x\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times 1(-4)}}{2\times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{-3+5}{2} \vee x=\frac{-3-5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-4$

Logo, $S=\{-4\,,\,1\}$.

12.3. ■ $h'(x)=\left(\frac{x^2-4}{x}\right)'=\left(\frac{x^2}{x}\right)'-\left(\frac{4}{x}\right)'=(x)'-\left(\frac{4}{x}\right)'=$

$=1-\left(-\frac{4}{x^2}\right)=1+\frac{4}{x^2}$

■ $h'(x)=0 \Leftrightarrow 1+\frac{4}{x^2}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{x^2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+4=0 \wedge x^2\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=-4 \wedge x\neq 0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$, pois

$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2\geq 0 \wedge x^2\neq 0$, significa que a função h' não tem zeros.

Como $h'(x)=1+\frac{4}{x^2}$, temos que, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\, 1+\frac{4}{x^2}>0$, pelo que, a função h é estritamente crescente em $]-\infty\,,\,0[$ e em $]0\,,\,+\infty[$ e não tem extremos.

13.1. ■ $f'(x)=\left(\frac{2x}{x+1}\right)'=$

$=\frac{(2x)'(x+1)-2x(x+1)'}{(x+1)^2}=$

$=\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x}{(x+1)^2}=$

$=\frac{2}{(x+1)^2}$

■ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\frac{2}{(x+1)^2}>0$, ou seja,

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f'(x)>0$, portanto, a função f é estritamente crescente em $]-\infty\,,\,-1[$ e em $]-1\,,\,+\infty[$ e não tem extremos.

13.2. ■ $g'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

■ $g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0 \Leftrightarrow x=0 \wedge \sqrt{x^2+1}\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \wedge x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	–	0	+
g	↘	1	↗
		Mín.	

Intervalos de monotonia:

g é estritamente decrescente em $]-\infty\,,\,0]$ e é estritamente crescente em $[0\,,\,+\infty[$.

Extremos:

Máximo absoluto: não existe
Mínimo absoluto: $g(0)=1$

Máximos relativos: não existem
Mínimos relativos: $g(0)=1$

13.3. ■ $h'(x)=\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)'=\frac{(x-2)'(2x+1)-(x-2)(2x+1)'}{(2x+1)^2}$

$=\frac{2x+1-(x-2)\times 2}{(2x+1)^2}=\frac{2x+1-2x+4}{(2x+1)^2}=\frac{5}{(2x+1)^2}$

■ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $\frac{5}{(2x+1)^2}>0$, ou seja, ,

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $h'(x)>0$

Portanto, a função h é estritamente crescente em $\left]-\infty\,,\,-\frac{1}{2}\right[$ e em $\left]-\frac{1}{2}\,,\,+\infty\right[$ e não tem extremos.

13.4. ■ $j'(x)=\left(\frac{2x}{(1-x)^2}\right)'=$

$=\frac{(2x)'(1-x)^2-(2x)\left[(1-x)^2\right]'}{\left[(1-x)^2\right]^2}=$

$=\frac{2(1-x)^2-4x(1-x)(1-x)'}{(1-x)^2}=$

$=\frac{2(1-x)^2+4x(1-x)}{(1-x)^4}=$

$=\frac{(1-x)(2(1-x)+4x)}{(1-x)^4}=$

$=\frac{2-2x+4x}{(1-x)^3}=\frac{2x+2}{(1-x)^3}$

■ $j'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+2}{(1-x)^3}=0 \Leftrightarrow 2x+2=0 \wedge (1-x)^3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x=-1 \wedge 1-x \neq 0 \Leftrightarrow x=-1 \wedge x \neq 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
j'	$-$	0	$+$	n.d.	-1
j	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	n.d.	↘
		Mín.			

Intervalos de monotonia:

j é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $]1, +\infty[$ é estritamente crescente em $[-1, 1[$.

Extremos:

Máximo absoluto: não existe

Mínimo absoluto: não existe

Máximos relativos: não existem

Mínimos relativos: $j(-1)=-\dfrac{1}{2}$

13.5. ■ $p'(x)=\left(3x+\dfrac{9}{x}\right)'=(3x)'+\left(\dfrac{9}{x}\right)'=3-\dfrac{9}{x^2}=$

$=\dfrac{3x^2-9}{x^2}$

■ $p'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-9}{x^2} \Leftrightarrow 3x^2-9=0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=3 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \left(x=-\sqrt{3} \vee x=\sqrt{3}\right) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\sqrt{3} \vee x=\sqrt{3}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
p'	$+$	0	$-$	n.d.	$-$	0	$+$
p	↗	$-6\sqrt{3}$	↘	n.d.	↘	$6\sqrt{3}$	↗
		Máx.				Mín.	

$p\left(\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}+\dfrac{9}{\sqrt{3}}=6\sqrt{3}$

$p\left(-\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}+\dfrac{9}{-\sqrt{3}}=-6\sqrt{3}$

Intervalos de monotonia:

p é estritamente crescente em $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right]$ e em $\left[\sqrt{3}, +\infty\right[$ e é estritamente decrescente em $\left[-\sqrt{3}, 0\right[$ e em $\left]0, \sqrt{3}\right]$.

Extremos:

Máximo absoluto: não existe

Mínimo absoluto: não existe

Mínimos relativos: $p\left(\sqrt{3}\right)=6\sqrt{3}$

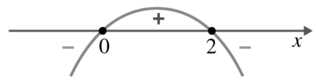
Máximos relativos: $p\left(-\sqrt{3}\right)=-6\sqrt{3}$

14.1. $D_f=\left\{x \in \mathbb{R} : 6x-3x^2 \geq 0\right\}$

■ $6x-3x^2=0 \Leftrightarrow 3x(2-x)=0 \Leftrightarrow 3x=0 \vee 2-x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

■



$6x-3x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 2]$.

Assim, $D_f=[0, 2]$

14.2. Temos que $f(1)=\sqrt{6\times 1-3\times^2}=\sqrt{3}$.

$\dfrac{3}{\sqrt{3}-9}=\dfrac{3\left(\sqrt{3}+9\right)}{\left(\sqrt{3}-9\right)\left(\sqrt{3}+9\right)}=\dfrac{3\left(\sqrt{3}+9\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-9^2}=$

$=\dfrac{3\left(\sqrt{3}+9\right)}{3-81}=\dfrac{3\left(\sqrt{3}+9\right)}{-78}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}+9}{-26}=-\dfrac{\sqrt{3}+9}{26}$

14.3. ■ $f'(x)=\left(\sqrt{6x-3x^2}\right)'=\dfrac{\left(6x-3x^2\right)'}{2\sqrt{6x-3x^2}}=\dfrac{6-6x}{2\sqrt{6x-3x^2}}$

■ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{6-6x}{2\sqrt{6x-3x^2}}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6-6x=0 \wedge 2\sqrt{6x-3x^2} \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1 \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq 2) \Leftrightarrow x=1$

x	0		1	0	2
f'	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
f	0	↗	$\sqrt{3}$	↘	0
	Mín.		Máx.		Mín.

Intervalos de monotonia:

f é estritamente crescente em $[0, 1]$ e é estritamente decrescente em $[1, 2]$.

Extremos:

Máximo absoluto: $f(1)=\sqrt{3}$

Mínimo absoluto: $f(0)=f(2)=0$

Máximos relativos: $f(1)=\sqrt{3}$

Mínimos relativos: $f(0)=f(2)=0$

15.1. ■ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x^3+4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-1=0 \wedge x^3+x \neq 0$

$\Leftrightarrow (x=-1 \vee x=1) \wedge x\left(x^2+1\right) \neq 0$

$\Leftrightarrow (x=-1 \vee x=1) \wedge x \neq 0$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$

Como $D_{f'}=\mathbb{R}^+$, 1 é o único zero de f' .

x	0		1	$+\infty$
f'	n.d.	$-$	0	$+$
f	n.d.	↘	$f(1)$	↗
			Mín.	

Intervalos de monotonia:

f é estritamente decrescente em $]0\,,1]$ e é estritamente crescente em $[1\,,+\infty[$.

Extremos:

Máximo absoluto: não existe
Mínimo absoluto: $f(1)$

Máximos relativos: não existe
Mínimos relativos: $f(1)$

15.2. $y-f(1)=f'(1)(x-1)$; como $f'(1)=0$, temos que $y-f(1)=0(x-1)$, ou seja, $y-f(1)=0 \Leftrightarrow y=f(1)$.

Logo, $y=f(1)$ é equação reduzida da reta *r*.

16. ■ $f'(x)=\left(\dfrac{x}{x^2+4}\right)'=\dfrac{x'\left(x^2+4\right)-x\left(x^2+4\right)'}{\left(x^2+4\right)^2}=$

$=\dfrac{x^2+4-x\times 2x}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{-x^2+4}{x^2+4}$

■ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+4}{x^2+4}=0 \Leftrightarrow -x^2+4=0 \wedge x^2+4\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=-2 \vee x=2)\wedge x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘
		Mín.		Máx.	

$f(-2)=\dfrac{-2}{(-2)^2+4}=-\dfrac{1}{4}$ é mínimo relativo de *f* e

$f(2)=\dfrac{2}{2^2+4}=\dfrac{1}{4}$ é máximo relativo de *f*.

Portanto $A\left(-2,-\dfrac{1}{4}\right)$ e $B\left(2,\ \dfrac{1}{4}\right)$.

O declive da reta *AB* é igual a $\dfrac{\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)}{2-(-2)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{4}=\dfrac{1}{8}$.

Como a reta passa pelo ponto *A*, temos que:

$y-\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{8}\left(x-(-2)\right) \Leftrightarrow y+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}(x+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{8}x$

Logo, $y=\dfrac{1}{8}x$ é a equação reduzida da reta que passa pelos pontos *A* e *B*.

Ficha para praticar 22 **Págs. 106 a 109**

1.1. $a(0)=-4,9\times 0^2+36,75\times 0+19,6=19,6$

A altura do projétil no instante em que foi lançado é 19,6 m.

1.2. $\dfrac{a(3)-a(0)}{3-0}=\dfrac{\left(-4,9\times 3^2+36,75\times 3+19,6\right)-19,6}{3}$

$=\dfrac{-4,9\times 3^2+36,75\times 3}{3}=\dfrac{66,15}{3}=22,05$

A velocidade média nos três primeiros segundos é 22,05 m/s.

1.3. $a'(t)=\left(-,49t^2+36,75t+19,6\right)'=-9,8t+36,75$

$a'(1)=-9,8\times 1+36,75=26,95$

A velocidade no instante $t=1$ é 26,95 m/s.

1.4. $a'(t)=0 \Leftrightarrow -9,8t+36,75=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{36,75}{9,8} \Leftrightarrow t=3,75$.

A altura máxima é atingida quando a velocidade é nula, ou seja, no instante $t=3,75$.

$a(3,75)=-4,9\times 3,75^2+36,75\times 3,75+19,6=88,50625$

A altura máxima atingida pelo projétil foi, aproximadamente, 88,5 metros.

2.1. $d(0)=0^2-19\times 0+48=48$

A distância do ponto *P* à origem no instante inicial é 48 cm.

2.2. $\dfrac{d(8)-d(5)}{8-5}=\dfrac{\left(8^2-19\times 8+48\right)-\left(5^2-19\times 5+48\right)}{3}=-6$

A velocidade média do ponto *P* no intervalo $[5\,,8]$ é -18 cm/s.

2.3. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{d(2+h)-d(2)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left[(2+h)^2-19(2+h)+48\right]-\left[2^2-19\times 2+48\right]}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4+4h+h^2-38-19h+48-4+38-48}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2-15h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h-15)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h-15)=-15$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{d(2+h)-d(2)}{h}=d'(2)$, pelo que a velocidade no instante $t=2$ é -15 cm/s.

2.4. $d'(t)=\left(t^2-19t+48\right)'=2t-19$

$d'(t)=0 \Leftrightarrow 2t-19=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{19}{2}$

A velocidade é nula ao fim de 9,5 s.

3. Sejam *x* e *y* as medidas de comprimento, em cm, de cada um dos catetos do triângulo.

A soma dos seus comprimentos é 40 cm, ou seja, $x+y=40$, e portanto, $y=40-x$.

Logo, a área, *A*, do triângulo é dada por:

$A=\dfrac{x(40-x)}{2}=\dfrac{40x-x^2}{2}$

$A'=\left(\dfrac{40x-x^2}{2}\right)'=\left(20x-\dfrac{x^2}{2}\right)=20-x$

$A'(0)\Leftrightarrow 20-x=0 \Leftrightarrow x=20$

Temos, ainda, que

$D_a=\{x\in\mathbb{R}: x>0 \wedge 40-x>0\}=\{x\in\mathbb{R}: x>0 \wedge x<40\}=$

$=]0\,,40]$

Assim:

x	0		20		70
A'	n.d.	+	0	–	n.d.
A	n.d.	$\nearrow$		$\searrow$	n.d.
			Máx.		

A área é máxima para $x = 20$, então, $y = 40 - 20 = 20$

Cada cateto do triângulo que tem área máxima mede 20 cm e a hipotenusa mede $\sqrt{20^2 + 20^2} = 20\sqrt{2}$ cm.

4.1. Temos que $P = 2x + y$.

Por outro lado, sabemos que a área do jardim é igual a 400 m^2, pelo que:

$$A = 400 \Leftrightarrow x - y = 400 \Leftrightarrow y = \frac{400}{x}$$

Então, $P = 2x + \frac{400}{x}$, isto é, $P = \frac{2x^2 + 400}{x}$.

Portanto, $P(x) = \frac{2x^2 + 400}{x}$, como queríamos mostrar.

4.2. $P'(x) = \left(\frac{2x^2 + 400}{x}\right)' = \left(2x + \frac{400}{x}\right)' = 2 - \frac{400}{x^2}$

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{400}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{400}{x^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 200 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{200} \Leftrightarrow x = \pm 10\sqrt{2}$

Como $x > 0$, temos que $x = 10\sqrt{2}$.

x	0		$10\sqrt{2}$	$+\infty$
P'	n.d.	–	0	+
P	n.d.	$\searrow$		$\nearrow$
			Mín.	

Portanto, a função P tem um mínimo para $x = 10\sqrt{2}$, e $y = \frac{400}{10\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$.

Assim, as dimensões que originaram o menor perímetro são:

$x = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1$ e $y = 20\sqrt{2}$, daí que,

$P = 2 \times 10\sqrt{2} + 20\sqrt{2} = 40\sqrt{2} \approx 56{,}6$ m

5.1. Área total do prisma = 2 Área da base + Área lateral =

$= 2x^2 + 4xy$

Área total do prisma = 200, temos que:

$2x^2 + 4xy = 200 \Leftrightarrow x^2 + 2xy = 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2xy = 100 - x^2 \Leftrightarrow y = \frac{100 - x^2}{2x}$

Por outro lado:

Volume do prisma = Área da base $\times$ altura

$= x^2 \times \left(\frac{100 - x^2}{2x}\right) = x \times \left(\frac{100 - x^2}{2}\right)$

$= \frac{100x - x^2}{2} = 50x - \frac{x^3}{2}$

Portanto, $V(x) = 50x - \frac{x^3}{2}$, como queríamos mostrar.

5.2. $V'(x) = \left(50x - \frac{x^3}{2}\right)' = 50 - \frac{3}{2}x^2$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 50 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$= \frac{3}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 = 50 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{100}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{100}{3}} \vee x = -\sqrt{\frac{100}{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{3} \vee x = -\frac{10\sqrt{3}}{3}$

Como $x > 0$, $x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

x	0		$\frac{10\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
V'	n.d.	+	0	–
V	n.d.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$
			Máx.	

Assim, $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ é o valor de x para o qual o volume do prisma é máximo.

6. Área retângulo [$ABCO$] = $\overline{OA} \times \overline{AB}$

Por outro lado, sabemos que o ponto B pertence ao gráfico de f.

Seja x a abcissa desse ponto, então, a sua ordenada é igual a $9 - x^2$.

Logo, $\overline{OA} = x$ e $\overline{AB} = 9 - x^2$.

Área retângulo [$ABCO$] = $x = (9 - x^2)$

$A(x) = x(9 - x^2)$.

$A'(x) = \left[x(9 - x^2)\right]' = (9x - x^3)' = 9 - 3x^2$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$

Como $0 < x < 3$, temos que $x = \sqrt{3}$.

x	0		$\sqrt{3}$		3
A'	n.d.	+	0	–	n.d.
A	n.d.	$\nearrow$		$\searrow$	n.d.
			Máx.		

Logo, a área do retângulo é máximo para $x = \sqrt{3}$.

7.1. Considerando $\overline{OQ}$ como base do triângulo [OPQ], vem que a altura correspondente é a ordenada do ponto P, ou seja, $\frac{10x}{x^2 + 1}$.

Como $\overline{OQ} = 2x$, vem que a área do triângulo [OPQ] é

$$\frac{2x\left(\frac{10x}{x^2 + 1}\right)}{2} = x\left(\frac{10}{x^2 + 1}\right) = \frac{10x^2}{x^2 + 1}$$

Logo, para $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se $A(x) = \frac{10x^2}{x^2+1}$, como queríamos mostrar.

7.2. $A'(x) = \left(\frac{10x^2}{x^2+1}\right)' =$

$= \frac{(10x^2)'(x^2+1) - 10x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{20x(x^2+1) - 10x^2(2x)}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{20x^3 + 20x - 20x^3}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{20x}{(x^2+1)^2}$

$A'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

Logo, a função A é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{10x^2}{x^2+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{10x^2}{x^2} = 10$

Significa que quanto maior for a abcissa do ponto P maior será a área do triângulo [OPQ] e para valores de x suficientemente grandes, a área deste triângulo tende a estabilizar no valor 10, sem contudo o atingir.

8. Tem-se que $f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 10x + \frac{1}{3}\right)' = x^2 - 7x + 10$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\times 10}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{7+3}{2} \vee x = \frac{7-3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 2$

Logo, a abcissa de A é 2 e a abcissa de B é 5.

Como $f(2) = \frac{2^3}{3} - \frac{7}{2}\times 2^2 + 10\times 2 + \frac{1}{3} = 9$, o ponto A tem ordenada 9.

Então, a área do triângulo [OAC] é, portanto, $\frac{5\times 9}{2} = 22{,}5$.

9. Seja $\overline{AC} = 6$, $\overline{AD} = x$ e $\overline{DC} = y$.

O triângulo [ADC] é retângulo em D, recorrendo ao teorema de Pitágoras, temos que:

$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 \Leftrightarrow 6^2 = x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow y^2 = 6^2 - x^2$, como $y > 0$, vem que $y = \sqrt{36 - x^2}$.

A área do retângulo é igual a $\overline{AD}\times\overline{DC}$, ou seja,

$\overline{AD}\times\overline{DC} = x \times y = x\sqrt{36-x^2}$

Portanto, a área A, do retângulo [$ABCD$], é dada em função de x por $A(x) = x\sqrt{36-x^2}$.

Por outro lado, temos:

$D_A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge 36 - x^2 > 0\} =]0\,,6[$

$A'(x) = \left(x\sqrt{36-x^2}\right)' =$

$= (x)'\sqrt{36-x^2} + x\left(\sqrt{36-x^2}\right)' =$

$= \sqrt{36-x^2} + x\frac{(36-x^2)'}{2\sqrt{36-x^2}} =$

$= \sqrt{36-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{36-x^2}} =$

$= \sqrt{36-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{36-x^2}} =$

$= \frac{\left(\sqrt{36-x^2}\right) - x^2}{\sqrt{36-x^2}}$

$= \frac{36 - x^2 - x^2}{\sqrt{36-x^2}} =$

$= \frac{36-2x^2}{\sqrt{36-x^2}}$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{36-2x^2}{\sqrt{36-x^2}} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 36 - 2x^2 = 0 \wedge \sqrt{36-x^2} \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 18 \wedge (x \neq -6 \wedge x \neq 6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3\sqrt{2} \vee x = -3\sqrt{2}$

Como $x \in]0\,,6[$, então, $x = 3\sqrt{2}$

Assim, temos que:

x	0		$3\sqrt{2}$		6
A'	n.d.	+	0	–	n.d.
A	n.d.	↗		↘	n.d.
			Máx.		

A área é máxima para $x = 3\sqrt{2}$.

Se $x = 3\sqrt{2}$, então, $y = \sqrt{36 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Portanto, o retângulo de área máxima que de pode inscrever numa circunferência de diâmetro 6 é um quadrado de lado $3\sqrt{2}$.

10.1. $C(4) = \frac{0{,}5 + 8\times 4}{4+4^2} \Leftrightarrow C(4) = 1{,}625$

A concentração de medicamento no segundo doente ao fim de quatro horas após ter administrado é igual a 1,625 miligramas por mililitro de sangue.

10.2. $C'(t) = \left(\frac{0{,}5+8t}{4+t^2}\right)' =$

$= \frac{(0{,}5+8t)'(4+t^2) - (0{,}5+8t)(4+t^2)'}{(4+t^2)^2} =$

$= \frac{8(4+t)^2 - (0{,}5+8t)(2t)}{(4+t^2)^2} = \frac{32 + 8t^2 - t - 16t^2}{(4+t^2)^2} =$

$= \frac{-8t^2 - t + 32}{(4+t^2)^2}$

$C'(t)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-8t^2-t+32}{\left(4+t^2\right)^2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8t^2-t+32=0 \wedge \left(4+t^2\right)\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times(-8)32}}{2\times(-8)} \wedge t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{1\pm\sqrt{1025}}{-16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{1+\sqrt{1025}}{-16} \vee t=\dfrac{1-\sqrt{1025}}{-16}$

Como, $t\geq 0$, temos que:

$t=\dfrac{1-\sqrt{1025}}{-16}\approx 1{,}938$

Assim, vem:

$t=1{,}938$ h = 1h + 0,938 h

= 1h + 0,938 $\times$ 60 min

= 1 h + 56,28 min

Portanto, $t=1{,}9838$ h $\approx$ 1 h 56 min.

Como o medicamento foi administrado às 8 horas da manhã, a sua concentração no sangue do doente foi máxima às 9h 56 min.

Ficha de teste 11 **Págs. 110 e 111**

1. $(f\times g)'(1)=f'(1)\times g(1)+f(1)\times g'(1)$

$g(1)=1-1=0$

$g'(x)=(x-1)'=1$

$g'(1)=1$

Portanto, $(f\times g)'(1)=f'(1)\times 0+3\times 1=3$

Resposta: **(C)**

2. $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^3-3x}\right)'=$

$=\dfrac{\left(x^3-3x\right)'}{3\sqrt[3]{\left(x^3-3x\right)^2}}=$

$=\dfrac{3x^2-3x}{3\sqrt[3]{\left(x^3-3x\right)^2}}=$

$=\dfrac{3\left(x^2-1\right)}{3\sqrt[3]{\left(x^3-3x\right)^2}}=$

$=\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x\right)^2}}$

Portanto:

$f'(2)=\dfrac{2^2-1}{\sqrt[3]{\left(2^3-3\times 2\right)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{(8-6)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}=$

$=\dfrac{\sqrt[3]{4^2}\times 3}{\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{4^2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{16}}{4}=\dfrac{3\sqrt[3]{2^3\times 2}}{4}=$

$=\dfrac{3\times 2\sqrt[3]{2}}{4}=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

Resposta: **(D)**

3. A reta *r* tem declive positivo.

$f(3)<0$, pelo que $\dfrac{1}{f(3)}<0$.

Logo, a reta *r* não pode ter declive zero, $\dfrac{1}{f(3)}$ e –1, pelo que das opções apenas $f(0)$ pode ser o declive da reta *r*, já que $f(0)>0$.

Resposta: **(D)**

4. Tem-se que $f(x)=x^{\alpha-1}$, donde $f'(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$.

Como do enunciado, se tem que o domínio de *f* é $\mathbb{R}^+$, vem que $x\in\mathbb{R}^+$, pelo que $x^{\alpha-2}$ é positivo.

Como, do enunciado, se tem que $\alpha\in\,]0,1[$, vem que α é positivo e que $\alpha-1$ é negativo.

Portanto, o produto $\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ é negativo.

Como, para qualquer *x* pertencente ao domínio de *f*, se tem $f'(x)<0$, a resposta correta é a opção *A*.

Resposta: **(A)**

5. Temos que $\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^2-\pi^3$ é um número real, portanto,

$f'(x)=0$.

Resposta: **(C)**

6.1. A função *f* é contínua em $\mathbb{R}$ pois é uma função polinomial, em particular, é contínua no intervalo $[1,4]$.

Por outro lado, temos que $f'(x)=\left(x^3-6x-3\right)'=3x^2-6$,

logo *f* é diferenciável em $\mathbb{R}$, já que, $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)\in\mathbb{R}$,

portanto, *f* é diferenciável em $]1,4[$, pelo que satisfaz, no intervalo [1 , 4], as hipóteses do Teorema de Lagrange.

Então, existe pelo menos um $c\in\,]1,4[$ tal que:

$$f'(c)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}$$

$f'(c)=3c^2-6,\ f(4)=4^3-6\times 4-3=37$

$f(1)=1^3-6\times 1-3=-8$

Assim:

$3c^2-6=\dfrac{37-(-8)}{3}\Leftrightarrow 3c^2-6=15\Leftrightarrow 3c^2=21\Leftrightarrow c^2=7\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c=-\sqrt{7}\vee c=\sqrt{7}$

Como $c\in\,]1,4[$, temos que $c=\sqrt{7}$.

7.1. Uma equação da reta pedida é:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$

Temos que $f(1)=1$ e $f'(1)=0$, pelo que:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y-1=0(x-1)\Leftrightarrow y-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=1$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa $x=1$ é $y=1$.

7.2. Como o valor de $f'(1)$ é finito e como toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto, podemos concluir que *f* é contínua em $x=1$.

7.3. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2x^2-3x+3}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \wedge 2x^2-3x+3\neq 0$

$\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	1	$\nearrow$
		Mín.	

Portanto, a função *f* é estritamente decrescente em $]-\infty\,,1]$ e é estritamente crescente em $[1\,,+\infty[$.

$f(1)=1$ é o mínimo absoluto da função *f*.

7.4. $g'(x)=\left(\dfrac{x-1}{2x^2-3x+3}\right)'=$

$=\dfrac{(x-1)'(2x^2-3x+3)-(x-1)(2x^2-3x+3)'}{(2x^2-3x+3)^2}=$

$=\dfrac{2x^2-3x+3-(x-1)(4x-3)}{(2x^2-3x+3)^2}=$

$=\dfrac{2x^2-3x+3-4x^2+3x+4x-3}{(2x^2-3x+3)^2}=$

$=\dfrac{-2x^2+4x}{(2x^2-3x+3)^2}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x^2+4x}{(2x^2-3x+3)^2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x^2+4x=0 \wedge (2x^2-3x+3)^2\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x(-x+2)=0 \wedge x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=0 \vee -x+2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{5}$	$\searrow$
		Mín.		Máx.	

A função *g* é estritamente decrescente em $]-\infty\,,0]$ e em $[2\,,+\infty[$ e é estritamente crescente em $[0\,,2]$.

$g(0)=-\dfrac{1}{3}$ é mínimo relativo

$g(2)=\dfrac{1}{5}$ é máximo relativo

8. $f'(x)=(x^3+2)'=3x^2$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)\geq 0$, pelo que *f* é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, logo $f(0)$ não é extremo relativo da função *f*.

Portanto, a proposição *p* é falsa.

9.1. Temos que 500 metros são 5 centenas de metros, e portanto,

$d(t)=5 \Leftrightarrow \dfrac{10t}{t+4}=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{10t}{t+4}-5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{10t-5(t+4)}{t+4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{10t-5t-20}{t+4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{5t-20}{t+4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5t-20=0 \wedge t+4\neq 0$

$t=4 \wedge t\neq -4 \Leftrightarrow t=4$

Portanto, ao fim de 4 minutos o Artur encontra-se a 500 metros do ponto de está a sua namorada.

9.2. $d'(t)=\left(\dfrac{10t}{t+4}\right)'=$

$=\dfrac{(10t)'(t+4)-10t(t+4)'}{(t+4)^2}=$

$=\dfrac{10(t+4)-10t}{(t+4)^2}=$

$=\dfrac{10t+40-10t}{(t+4)^2}=\dfrac{40}{(t+4)^2}$

$d'(8,5)=\dfrac{40}{(8,5+4)^2}=$

$=\dfrac{40}{156,25}=0,256$

$0,256\times 100=25,6$

A velocidade no instante $t=8,5$ min é de 25,6 m/min.

9.3. $\lim\limits_{t\to+\infty} d(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{10t}{t+4}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{10t}{t}=10$

Logo, $\lim\limits_{t\to+\infty} d(t)=10$, o que significa que com o decorrer do tempo a distância do Artur à namorada tende a estabilizar em 1000 m.