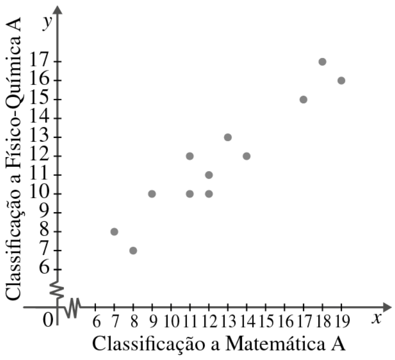
Ficha para praticar 23 **Págs. 112 e 113**

1.1. $(x\,,\,y) = ((8\,,7)\,,(11\,,10)\,,(12\,,10)\,,(17\,,15)\,,(18\,,17)$
$(19\,,16)\,,(11\,,12)\,,(7\,,8),(9\,,10)\,,$
$(12\,,11)\,,(13\,,13)\,,(14\,,12))$

1.2.



2.1. $e_A = 3{,}3 - 2{,}4\times 1 - 0{,}5 = 0{,}4$
$e_B = 3{,}6 - 2{,}4\times 2 - 0{,}5 = -1{,}7$
$e_C = 4{,}2 - 2{,}4\times 3 - 0{,}5 = -3{,}5$
$e_D = 5{,}1 - 2{,}4\times 4 - 0{,}5 = -5$

2.2. $S = 0{,}4 + (-1{,}7) + (-3{,}5) + (-5) = -9{,}8$

3.1. $\overline{x} = \dfrac{3+5+7}{3} = 5$ e $\overline{y} = \dfrac{5+4+3}{3} = 4$

3.2. Sabemos que $b = \overline{y} - a\overline{x} = 4 - 5a$

Logo:

$$f(a) = \sum_{i=1}^{3} (y_i - ax_i - b)^2 =$$
$$= (5 - 3a - 4 + 5a)^2 + (4 - 5a - 4 + 5a)^2 + (3 - 7a - 4 + 5a)^2$$
$$= (2a+1)^2 + 0^2 + (-2a-1)^2$$
$$= 8a^2 + 8a + 2$$

3.3. $f'(a) = \left(8a^2 + 8a + 2\right)' = 16a + 8$

3.4. $f'(a) = 0 \Leftrightarrow 16a + 8 = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

Para $a < -\dfrac{1}{2}$, $f'(a) < 0$ e para $a > -\dfrac{1}{2}$, $f'(a) > 0$.

Logo, f tem um mínimo absoluto para $a = -\dfrac{1}{2}$, pelo que

$m = -\dfrac{1}{2}$.

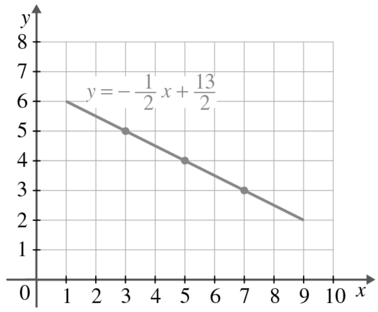
3.5. $SS_x = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - 3\overline{x}^2 = 3^2 + 5^2 + 7^2 - 3\times 5^2 = 8$

Logo, $\dfrac{\sum_{i=1}^{3} x_i y_i - 3\overline{x}\,\overline{y}}{SS_x} = \dfrac{3\times 5 + 5\times 4 + 7\times 3 - 3\times 5\times 4}{8}$

$$= -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} = m$$

3.6. Sabemos que $a = -\dfrac{1}{2}$ e que $b = 4 - 5\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 4 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{13}{2}$.

Logo, $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{13}{2}$ é a equação da reta a esboçar.



4. **1.ª** $\overline{x} = \dfrac{2+4+5+9}{4} = 5$ e $\overline{y} = \dfrac{3+2+4+7}{4} = 4$

2.ª $SS_x = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 - 4\overline{x}^2 = 2^2 + 4^2 + 5^2 + 9^2 - 4\times 5^2 = 26$

Logo, $a = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i y_i - 4\overline{x}\,\overline{y}}{SS_x} =$

$$= \frac{2\times 3 + 4\times 2 + 5\times 4 + 9\times 7 - 4\times 5\times 4}{26} = \frac{17}{26}$$

3.ª $b = \overline{y} - a\overline{x} = 4 - \dfrac{17}{26}\times 5 = 4 - \dfrac{85}{26} = \dfrac{19}{26}$

4.ª Portanto, $y = \dfrac{17}{26}x + \dfrac{19}{26}$ é a equação reduzida da reta de mínimos quadrados desta sequência de pontos.

5.1.

- $\overline{x} = \dfrac{2+3+4+5+6}{5} = 4$ e $\overline{y} = \dfrac{4+6+7+10+8}{5} = 7$
- $b = \overline{y} - a\overline{x}$, ou seja, $b = 7 - 4a$
- $SS_x = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 5\overline{x}^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 - 5\times 4^2 = 10$
- $a = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i y_i - 5\overline{x}\,\overline{y}}{SS_x} =$

  $= \dfrac{(2\times 4 + 3\times 6 + 4\times 7 + 5\times 10 + 6\times 8) - 5\times 4\times 7}{10} = 1{,}2$
- $b = 7 - 4\times 1{,}2 = 2{,}2$

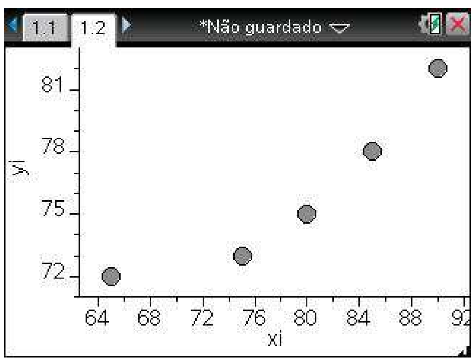
Logo, $y = 1{,}2x + 2{,}2$ é uma equação da reta t.

5.2. $e_1 = 4 - 1{,}2\times 2 - 2{,}2 = -0{,}6$
$e_2 = 6 - 1{,}2\times 3 - 2{,}2 = 0{,}2$
$e_3 = 7 - 1{,}2\times 4 - 2{,}2 = 0$
$e_4 = 10 - 1{,}2\times 5 - 2{,}2 = 1{,}8$
$e_5 = 8 - 1{,}2\times 6 - 2{,}2 = -1{,}4$

$\sum_{i=1}^{5} e_i = -0{,}6 + 0{,}2 + 0 + 1{,}8 - 1{,}4 = 0$.

6.1. A variável explicativa é a temperatura e a variável resposta é o comprimento.

6.2.



6.3. $\overline{x}=\frac{65+75+80+85+90}{5}=79º$

$\overline{y}=\frac{72+73+75+78+82}{5}=76$ cm

6.4. $\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=30\ 165$

$SS_x=\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=370$

$a=\frac{\sum_{i=1}^{x}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{SS_x}=\frac{30165-5\times79\times76}{370}=\frac{29}{74}\approx0{,}392$

$b=\overline{y}-a\overline{x}=76-\frac{29}{74}\times79=$

$=\frac{3333}{74}\approx45{,}041$

$t:y=0{,}392x+45{,}041$

6.5 $y=\frac{29}{74}x+\frac{3333}{74}$

$76=\frac{29}{74}\times79+\frac{3333}{74}\Leftrightarrow76=\frac{2291}{74}+\frac{3333}{74}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow76=\frac{5624}{74}\Leftrightarrow76=76$

6.6. $x=88$

$y=0{,}392\times88+45{,}041\approx79{,}5$

O comprimento esperado é 79,5 cm.

7. Seja a o declive da reta pedida.

$a=\frac{\sum_{i=1}^{3}x_iy_i-3\overline{x}\,\overline{y}}{SS_x}$

Sabemos que: $SS_x=8,\ \overline{x}=4$ e $\underset{\sim}{x}=\left(2\ ,4\ ,k\right)$.

$\overline{x}=\frac{2+4+k}{3}\Leftrightarrow4=\frac{2+4+k}{3}\Leftrightarrow12=6+k\Leftrightarrow k=6$

Portanto, $k=6$, e assim $\underset{\sim}{x}=\left(2\ ,4\ ,6\right)$. Por outro lado, temos que $\overline{y}=\frac{3+5+4}{3}=4$.

Logo:

$a=\frac{\sum_{i=1}^{3}x_iy_i-3\overline{x}\,\overline{y}}{SS_x}=\frac{\left(2\times3+4\times5+6\times4\right)-3\times4\times4}{8}=$

$=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

O declive da reta de mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos é $\frac{1}{4}$.

Ficha para praticar 24 **Págs. 114 e 115**

1.1. I corresponde a $r_3=-0{,}91$; II corresponde a $r_2=0{,}38$; III corresponde a $r_1=0{,}85$ e IV corresponde a $r_4=-0{,}24$.

1.2.
I Associação negativa forte
II Associação positiva fraca
III Associação positiva forte
IV Associação negativa fraca

2. **(i)** $\overline{x}=\frac{1+2+4+5}{4}=3$

(ii) $\overline{y}=\frac{2+1+3+2}{4}=2$

(iii) $SS_x=\sum_{i=1}^{4}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=$

$=\left(1-3\right)^2+\left(2-3\right)^2+\left(4-3\right)^2+\left(5-3\right)^2=$

$=4+1+1+4=10$

(iv) $SS_y=\sum_{i=1}^{4}\left(y_i-\overline{y}\right)^2=$

$=\left(2-2\right)^2+\left(1-2\right)^2+\left(3-2\right)^2+\left(2-2\right)^2=$

$=0+1+1+0=2$

(v) $\sum_{i=1}^{4}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)=$

$=\left(1-3\right)\left(2-2\right)+\left(2-3\right)\left(1-2\right)+\left(4-3\right)\left(3-2\right)+$

$+\left(5-3\right)\left(2-2\right)=$

$=0+1+1+0=2$

(vi) $r=\frac{\sum_{i=1}^{4}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{SS_xSS_y}}=\frac{2}{\sqrt{10\times2}}=\frac{2}{\sqrt{20}}=$

$=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\approx0{,}45$

Portanto, $r\approx0{,}45$

3. Temos que provar:

$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x\right)\left(y_i-y\right)}{\sqrt{SS_xSS_y}}=a\sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}$

Com efeito, tem-se:

$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_iy_i-x_i\overline{y}-\overline{x}y_i+\overline{x}\,\overline{y}\right)=$

$=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y}-\sum_{i=1}^{n}\overline{x}y_i+\sum_{i=1}^{n}\overline{x}\ \overline{y}=$

$=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{y}\,n\,\overline{x}-\overline{x}\,n\,\overline{y}+n\,\overline{x}\,\overline{y}=$

$=\sum_{i=1}^{n}x_iyi-2n\,\overline{x}\ \overline{y}+n\,\overline{x}\,\overline{y}=$

$=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\ \overline{x}\,\overline{y}$

Portanto, $\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{SS_xSS_y}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\,\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{SS_xSS_y}}$

Por outro lado:

$a\sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\,\overline{x}\,\overline{y}}{SS_x}\times\sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}=$

$=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\,\overline{x}\,\overline{y}\times\sqrt{\frac{SS_x}{SS_x^2SS_y}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\,\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{SS_xSS_y}}$

Assim, $\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{SS_xSS_y}}=a\sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}$.

4.1. ■ $\overline{x}=\dfrac{4+5+6}{3}=5$ e $\overline{y}=\dfrac{2+1+6}{3}=3$

■ $SS_x=\sum_{i=1}^{3}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=(4-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2=$

$=1+0+1=2$

■ $SS_y=\sum_{i=1}^{3}\left(y_i-\overline{y}\right)=(2-3)^2+(1-3)^2+(6-3)^2=$

$=1+4+9=14$

■ $a=\dfrac{\sum_{i=1}^{3}x_iy_i-3\overline{x}\,\overline{y}}{SS_x}=\dfrac{(4\times2+5\times1+6\times6)-3\times5\times3}{2}=$

$=\dfrac{4}{2}=2$

■ $r=a\sqrt{\dfrac{SS_x}{SS_y}}=2\sqrt{\dfrac{2}{14}}=2\sqrt{\dfrac{1}{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\approx0{,}76$

4.2. ■ $\overline{x}=\dfrac{1+2+4+5+6}{5}=3{,}6$

■ $\overline{y}=\dfrac{2+2+3+4+4}{5}=3$

■ $SS_x=\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=(1-3{,}6)^2+(2-3{,}6)^2+$

$+(4-3{,}6)^2+(5-3{,}6)^2+(6-3{,}6)^2=$

$=6{,}76+2{,}56+0{,}16+1{,}96+5{,}76$

$=17{,}2$

■ $SS_y=\sum_{i=1}^{5}\left(y_i-\overline{y}\right)=(2-3)^2+(2-3)^2+$

$+(3-3)^2+(4-3)^2+(4-3)^2=$

$=1+1+0+1+1=$

$=4$

■ $a=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{SS_x}=$

$=\dfrac{(1\times2+2\times2+4\times3+5\times4+6\times4)}{17{,}2}=\dfrac{8}{17{,}2}=\dfrac{20}{43}$

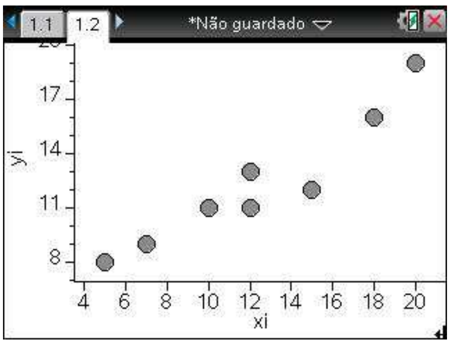
■ $r=a\sqrt{\dfrac{SS_x}{SS_y}}=\dfrac{20}{43}\sqrt{\dfrac{17{,}2}{4}}=\dfrac{20}{43}\sqrt{4{,}3}\approx0{,}96$

5.1. $\overline{x}=\dfrac{5+7+10+12+12+15+18+20}{8}=\dfrac{99}{8}=12{,}375$

$\overline{y}=\dfrac{8+9+11+11+13+12+16+19}{8}=\dfrac{99}{8}=12{,}375$

Portanto, a média do número de horas de estudo e a média das classificações obtidas pelos alunos é igual a 12,375.

5.2. **a)**



É possível visualizar uma reta de declive positivo que se ajusta aos pontos.
Portanto, podemos concluir que existe uma relação linear entre as variáveis.

b) $SS_x=\sum_{i=1}^{8}\left(x_i-12{,}375\right)^2=44{,}59375$

$a=\dfrac{\sum_{i=1}^{a}x_iy_i}{SS_x}\approx0{,}66$

$b=\overline{y}-a\overline{x}=12{,}375-a\times12{,}375\approx4{,}13$

A equação reduzida da reta de mínimos quadrados é $y=0{,}66x+4{,}13$

c) Se $x=17$, então, $y=0{,}66\times17+4{,}13\approx15{,}35$.

Assim, para um aluno que tenha estudado 17 horas para este exame é esperado que tenha, aproximadamente, 15 valores no exame.

6. Podemos, por exemplo, determinar o coeficiente de correlação *r*.

■ $\overline{x}=\dfrac{26+28+32+42+46+50+55+59+62+64}{10}$

$=\dfrac{464}{10}=46{,}4$

■ $\overline{y}=\dfrac{68+71+80+76+70+72+69+73+83+72}{10}$

$=\dfrac{734}{10}=73{,}4$

■ $SS_x=\sum_{i=1}^{10}\left(x_i-\overline{x}\right)=1780{,}4$

■ $SS_y=\sum_{i=1}^{10}\left(y_i-\overline{y}\right)^2=212{,}4$

■ $a=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\overline{x}\,\overline{y}}{SS_x}\approx0{,}071$

■ $r=a\sqrt{\dfrac{SS_x}{SS_y}}\approx0{,}206$

Portanto, $r_1\approx0{,}206$ é o valor do coeficiente de correlação associado aos dados desta tabela.
Trata-se de uma associação linear positiva fraca.
Podemos dizer que existe uma certa tendência para aumentar o *peso* com a idade, mas não se pode afirmar que é uma verdade absoluta.

Ficha de teste 12 **Págs. 116 e 117**

1. Temos que:

$\overline{x}=\dfrac{2+5+6+11}{4}=6$; $\overline{y}=\dfrac{3+8+3+10}{4}=6$

Portanto, $\dfrac{\overline{x}}{\overline{y}}=1$, $\overline{x}-\overline{y}=0$ ou $\overline{x}=\overline{y}$.

Resposta: **(B)**

2. $e_A=3{,}4-3{,}4\times2-0{,}2=-3{,}6$ e

$e_B=0{,}3-3{,}4\times5-0{,}2=-16{,}9$

Portanto, a soma dos desvios e_A e e_B é igual a $-3{,}6+(-16{,}9)=-20{,}5$

Resposta: **(A)**

3. Seja *a* o declive da reta de mínimos quadrados desta sequência de pontos, temos que:

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{3}x_iy_i-3\overline{x}\,\overline{y}}{SS_x}$$

Assim, $\overline{x}=\frac{3+5+7}{3}=5$ e $\overline{y}=\frac{1+4+1}{3}=2$.

Por outro lado:

$$SS_x=\sum_{i=1}^{3}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=$$

$$=\left(3-5\right)^2+\left(5-5\right)^2+\left(7-5\right)^2=4+0+4=8$$

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{3}x_iy_i-3\overline{x}\,\overline{y}}{SS_x}=\frac{\left(3\times1+5\times4+7\times1\right)-3\times5\times2}{8}=\frac{0}{8}=0$$

Então, o declive pedido é igual a zero.

Resposta: **(D)**

4. Se a associação linear duas variáveis é positiva então é necessário que se uma aumenta a outra tende, também a aumentar.

Resposta: **(B)**

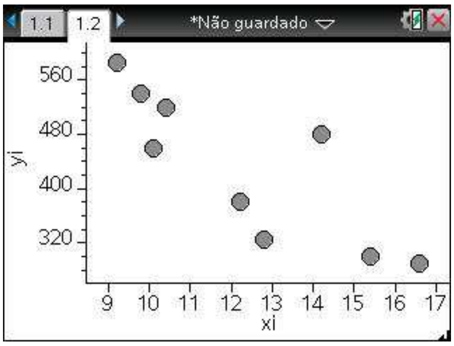
5. A associação linear entre as variáveis estatísticas é tanto mais é tanto mais forte quanto mais perto de 1 estiver o valor absoluto do coeficiente de correlação.

Resposta: **(D)**

6.1. Sabemos que a energia consumida depende da temperatura exterior.

Logo, a variável explicativa é a temperatura e a variável resposta é a energia consumida.

6.2. **a)**



Existe uma relação linear entre as variáveis dado qua da análise da nuvem de pontos, é possível visualizar uma reta de declive negativo que se ajusta a esses pontos.

b) Seja *x* a variável correspondente à temperatura exterior e *y* a variável correspondente à energia consumida, então,

$$\overline{x}=\frac{110,7}{9}=12,3 \text{ e } \overline{y}=\frac{38+9}{9}=431$$

Portanto, a média das temperaturas exteriores é 12,3 graus celsius e a medidas das energias consumidas é 431 kWh.

c) $SS_x=\sum_{i=9}^{9}\left(x_i-12,3\right)^2=56,28$

$$a=\frac{\sum_{i=9}^{9}\left(x_i-12,3\right)^2}{SS_x}\approx-34,6$$

$$b=\overline{y}-a\overline{x}\approx856,7$$

$$y=-34,6x+856,7$$

d) Se $y=400$, então:

$$400=-34,6+856,7\Leftrightarrow x=\frac{400-856,7}{-34,6}\Leftrightarrow x=13,2$$

Assim, para um mês em que a energia consumida seja igual a 192,38 kWh, a temperatura exterior esperada é de aproximadamente 13,2 ºC.

7.1. Se $r=-1$ os pontos da nuvem de pontos estão alinhados sobre uma reta de declive negativo.

Portanto, o gráfico IV corresponde a $r=-1$

7.2. Se $r=0$ a associação linear entre as variáveis estatísticas é nula.

Assim, o gráfico I corresponde a $r=0$

7.3. Se $r>0$ a associação linear entre as variáveis estatísticas é positiva.

Logo, o gráfico II representa essa situação

7.4. Se a associação linear entre as duas variáveis estatísticas é negativa, mas fraca, o coeficiente de correlação é um valor negativo próximo de 0.

O gráfico III representa essa situação